

ग्रह-गति-सिद्धान्त

ग्रह-गति-सिद्धान्त

ज्योतिःशास्त्रविषयक गणित ग्रंथमाला

ग्रह - गति - सिद्धांत

किंवा

ज्योतिर्गणिताचीं मूलतत्त्वे



लेखक

शिवराम गणपतराव पवार, गणकचूडामणि

पहिली आवृत्ती १९६८

प्रकाशक :

महाराष्ट्र राज्य
साहित्य आणि संस्कृति मंडळ,
सचिवालय (विस्तार भवन)
मुंबई-३२.

मुद्रक :

शासकीय मुद्रणालय,
नागपूर-१.

किंमत रु. १०.५०

निवेदन

मराठी भाषेला विद्यापीठाच्या भाषेचा दर्जा येण्याकरिता मराठीत विज्ञान, तत्त्वज्ञान, सामाजिक शास्त्रे आणि तंत्रविज्ञान या विषयांवरील ग्रंथांची रचना मोठ्या प्रमाणात होण्याची आवश्यकता आहे. वरील विषयांवर केवळ परिभाषाकोष अथवा पाठ्य पुस्तके प्रकाशित करून अशा प्रकारचा दर्जा मराठी भाषेला प्राप्त होणार नाही. सर्वसामान्य सुशिक्षितांपासून तो प्रज्ञावंत पंडितांपर्यंत मान्य होतील अशा ग्रंथांची रचना व्हावयास पाहिजे. मराठी भाषेत किंवा अन्य भारतीय भाषांमध्ये विज्ञान, सामाजिक शास्त्रे व तंत्रविज्ञान या विषयांचे प्रतिपादन करावयास उपयुक्त अशा परिभाषा-सूची किंवा परिभाषा-कोष तयार होत आहेत. परिभाषा किंवा शब्द यांचा प्रतिपादनाच्या ओघात समर्पकपणे वारंवार प्रतिष्ठित लेखांत व ग्रंथांत उपयोग केल्यानेच अर्थ व्यक्त करण्याची त्यात शक्ति येते. अशा तऱ्हेने उपयोगात न आलेले शब्द केवळ कोषात पडून राहिल्याने अर्थशून्य रहातात. म्हणून मराठीला आधुनिक

ज्ञानविज्ञानांची भाषा बनविण्याकरिता शासन, विद्यापीठे, प्रकाशन संस्था व त्या त्या विषयांचे कुशल लेखक यांनी ग्रंथरचना करणे आवश्यक आहे.

वरील उद्देश ध्यानात ठेवून महाराष्ट्र राज्य साहित्य-संस्कृति मंडळाने आपला वाङ्मयीन कार्यक्रम आखला आहे. मंडळाच्या वाङ्मयीन कार्याचा एक भाग म्हणून “विज्ञानमाला” सुरू केली असून सामान्य सुशिक्षित वाचकवर्गाकरिता विज्ञानविषयक सुबोध भाषेत लिहिलेली पुस्तके प्रकाशित करून स्वल्प किंमतीत देण्याची व्यवस्था केली आहे. या मालेत आजवर विविध शास्त्रीय विषयांवर एकूण अकरा पुस्तके मंडळाने प्रकाशित केली आहेत. कै. शि. ग. पवार यांनी लिहिलेले ग्रहगतिसिद्धांत हे या मालेतील बारावे पुष्प होय.

लक्ष्मणशास्त्री जोशी,

अध्यक्ष,

महाराष्ट्र राज्य साहित्य आणि संस्कृति मंडळ.

ग्रहगतिसिद्धांत कर्ते
कै. शिवराम गणपतराव पवार

(गणकचूडामणि)

लेखक : गंगाधर रामकृष्ण देव, नागपूर

(नागपूर-टिळक-पंचांग कर्ते)

कै. शिवराम गणपतराव उर्फ दादासाहेब पवार हे अहमदनगर जिल्ह्यातील राहुरी तालुक्यातील सुमारे ७५० लोकवस्तीच्या सडे नावाच्या गावातील एका शेतकरी कुटुंबातील मराठा जातीचे गृहस्थ. दादासाहेबांचा जन्म राहुरी येथे ज्येष्ठ शुक्ल १२ शके १७८८, शुक्रवार, तारीख २५ मे सन १८६६ रोजी झाला. त्यांचे शिक्षण फक्त प्राथमिक थर्ड इअर ट्रेनिंग झाले होते. पण ते फार बुद्धिमान गृहस्थ होते. पुणे ट्रेनिंग कॉलेजातील तिसऱ्या वर्षाची परीक्षा सन १८९० मध्ये उत्तीर्ण झाल्यानंतर त्यांनी झालाखात्यात नोकरी केली. प्राथमिक शिक्षक या नात्याने अहमदनगर जिल्ह्यात आणि पुणे ट्रेनिंग कॉलेज प्रॅक्टिसिंग स्कूलमध्ये

नोकरी केली. त्या खात्यात ते असि. डे. एज्यु. इन्स्पेक्टरच्या जागे-पर्यंत चढले आणि योग्यवेळी सेवानिवृत्त होऊन त्यांनी पेन्शन घेतले. पेन्शन घेतल्यानंतर ते आपल्या मूळगावी सडे येथे स्थायिक झाले. काही दिवस ते अहमदनगरच्या डिस्ट्रिक्ट स्कूलबोर्डचे सदस्य होते.

ट्रेनिंग कालेजमध्ये असताना कै. पवार यांनी तेथील शिक्षक, श्री. रावजीशास्त्री देवकुळे यांचेजवळ फावल्या वेळात सरलत्रिकोणमिती, गोलियत्रिकोणमिती, वैज्यभूमिती या विषयांचा अभ्यास केला. श्री. रावजीशास्त्री देवकुळे यांची एक "स्वयंशिक्षण पद्धती" अशी एक विशिष्ट पद्धती होती. ती त्यांनी कै. पवार यांना समजावून दिली होती. जात व परंपरा अनुकूल नसता आणि इंग्रजीचेही विशेष ज्ञान नसता त्यांनी स्वावलंबी शिक्षण पद्धतीने गणिताच्या उच्च शाखांचा अभ्यास केला आणि ज्योतिःशास्त्राचे चांगले ज्ञान संपादन केले. या पद्धतीने त्यांनी सूक्ष्मांशगणित आणि परमाणू-गणितशास्त्र यांचे इंग्रजी ग्रंथारूपन चांगले ज्ञान संपादिले. यानंतर आपल्या भारतीय ज्योतिःशास्त्रातील जुन्या सिद्धांतादि ग्रंथांचे वाचनही त्यांनी केले. संस्कृत भाषेचे ज्ञान कमी असल्यामुळे हे जुन्या ग्रंथांचे वाचन दुसऱ्याच्या सहाय्याने त्यांना करावे लागले.

ज्योतिःशास्त्राचे अध्ययन करीत असतानाच आपण काही स्वतंत्र ग्रंथाची रचना करावी आणि ज्योतिःशास्त्रातील पूर्वीच्या पौर्वत्य आणि पाश्चिमात्य रीतींची छाननी करून आपणास त्यात काही शुद्धता, अगर सुलभता आणता आली तर आणावी ही दृष्टी त्यांनी ठेवली होती. अर्थात् ह्या विषयाचे अध्ययन करीत असताना जुन्या ग्रंथात करण्यासारख्या पुष्कळच सुधारणा आणि नवीन विचारही त्यांना सुचले. त्यांनी तत्संबंधी टिप्पणे, टाचणे तयार करून ठेविली होती.

कै. दादासाहेब पवार यांचा मुख्य आणि महत्त्वाचा ग्रंथ "ग्रहगति-सिद्धांत" हा होय. या ग्रंथाचे लेखन आणि जुळवणी ते सुमारे २५ ते ३० वर्षेपर्यंत करीत होते. या ग्रंथाची प्रेस कॉपी स्वतः ग्रंथकर्त्याने आपल्या सुवाच्य, सुबोध आणि सुंदर अक्षरात शके १८५८ संवत् १९९३ इ. सन १९३६ मध्ये तयार केली. त्यांचा प्रसिद्ध झालेला पहिला ग्रंथ

“करणकौमुदी” हा शके १८२८ सन १९०७ साली प्रसिद्ध झाला. हा ग्रंथ लोकमान्य टिळक यांना दाखविण्यात आला होता आणि सांगली संमेलनात ठरल्याप्रमाणे पंचांगशोधन समेने हा “करणकौमुदी” ग्रंथ मागविला होता. “रेवतियोग तारेचा शोध” ही लेखमाला त्यांनी “केसरीतून शके १८५३ म्हणजे सन १९३२ च्या जानेवारी-फेब्रुवारी मध्ये” प्रसिद्ध केली. या लेखमालेत ज्योतिष्यगणिताचे आरंभस्थान रेवतियोग ताराच आहे असे त्यांनी सिद्ध केले आहे. सूर्यसिद्धान्तादि ग्रंथात निरयण-गणनेचे आरंभस्थान रेवतियोग तारा हेच आहे. यामुळे प्रस्तुत काळी अयनांश सुमारे १९ अंश हे त्यांनी गणिताने दाखवून दिले आहे. कै. दादासाहेब पवार यांचा दुसरा प्रकाशित ग्रंथ “सूर्येन्दुस्थान-मान” हा बडोद्याचे सयाजीराव महाराज गायकवाड यांच्या द्रव्य-साहाय्याने शके १८१९ म्हणजे सन १९३७ मध्ये प्रसिद्ध झाला आहे. कै. पवार यांचा तिसरा ग्रंथ “उपरागविज्ञान” हा हस्तलिखित स्वरूपातच आहे. या ग्रंथात चंद्रग्रहण आणि सूर्यग्रहण यांची माहिती दिली आहे. या ग्रंथात भारतीय शास्त्रातील आणि पाश्चात्य ज्योतिःशास्त्रातील सर्व रीती सोपपत्तिक आणि आकृतीसह दिल्या आहेत. या ग्रंथातील विशेष असा की, पाश्चात्य ग्रंथातील ग्रहणाच्या रीती, क्रांती आणि विषुवांश यामध्ये दिलेल्या आहेत. त्या आपल्या भारतीय पद्धतीप्रमाणे शर आणि भोग यामध्ये बसविल्या आहेत. त्रिकोणमिती आणि घातांक (लागरिथम) याच्या कोष्टकांच्या आधारे स्पर्शमोक्षादि काल साधनांची समीकरणे बसविली आहेत. ती बेसेल साहेबांच्या पद्धतीप्रमाणे आहेत. अखिल भूमंडलीय सूर्यग्रहण हे प्रकरण स्वतः ग्रंथकारांनी नवीनच आपल्या कल्पनेने लिहिले आहे. यावरून चंद्रछाया-गमनाचा भूपृष्ठावरील नकाशा तयार करता येतो. ह्या ग्रंथाची हस्तलिखित पृष्ठे सुमारे १५० आहेत. हल्ली या ग्रंथाबद्दल कै. पवार यांचे चिरंजीव श्री. रभाजीराव पवार, मुक्काम सडे, तालुका राहुरी, जिल्हा अहमदनगर यांजकडे विचारणा केली असता त्यांनी कळविले की, “उपरागविज्ञान” हे पुस्तक पावसाचे पाणी पडून आणि कसर लागून खराब झाले आहे त्याचे काहीच हाती लागण्यासारखे नाही.

कै. दादासाहेब पवार यांना लोकमान्य टिळकांच्या वेळेपासून मोठ-
मोठ्या ज्योतिष परिषदांची निमंत्रणे येत असत आणि त्या परिषदांना
ते हजर राहण्यास चुकत नसत. धारवाड येथील ज्योतिष परिषदेत
रैवतपक्षाचे पुरस्कर्ते ते एकटेच होते तरी चित्रापक्षाचे २२ अयनांश त्यांनी
चुकीचे ठरविले. आपल्या सिद्धांत ग्रंथातील रैवतपक्षाचे सत्यत्व प्रस्था-
पित करण्याकरिता कै. पवारांनी जे मुद्दे मांडले ते इतके शुद्ध आहेत की
ते प्रतिपक्षीयांना कबूलच करावे लागतात. त्या सभेत ज्योतिष प्रकरणी
एकादे गोष्टीत मतभेद झाला असता कै. पवार यांचे मत विचारात घेतले
जाई. इंदूर येथे शके १८५७ सन १९३५ मध्ये अखिल भारतीय
ज्योतिष महासंमेलन भरले होते. त्यालाही हे हजर होते. त्या
संमेलनात त्यांच्या विद्वत्तेची इतकी छाप पडली की, संमेलनातील चर्चा
मंडळाचे अध्यक्ष श्रीमंत पंतवैद्य यांनी कै. दादासाहेब पवार आणि
नागपूरचे विद्वत्त डॉ. केशव लक्ष्मण उर्फ भाऊजी दप्तरी यांचा सत्कार
त्यांनी आपले घरी खाजगीरीत्या केला. आणि हार व श्रीफळ अर्पण
करून एक मेजवानी दिली.

कै. दादासाहेब पवार यांना इंग्रजी येत नव्हते. यांना खेड्यांत
सर्व शेतकरी लोकांचाच सहवास होता. त्यात ते अधिष्ठित झाले
म्हणजे ते एक शेतकरीच वाटत असत. दादासाहेब हे तारीख १७
सप्टेंबर सन १९३९ रोजी सडे मुक्कामी कालवश झाले.

प्रस्तावना

कै. शिवराम गणपतराव उर्फ दादासाहेब पवार यांनी सन ३० वर्षे परिश्रम करून हा ग्रंथ लिहिला आहे. म्हणजे हा ग्रंथ लिहिण्यास कै. दादासाहेब पवार यांना ३० वर्षे लागली आहेत.

इंदूर येथे (शके १८५७) सन १९३५ च्या नोव्हेंबरमध्ये अखिल भारतीय ज्योतिष महासभेला भेगले होते. त्याला नागपूरचे विद्वान् डा. के. जय लक्ष्मण उर्फ भाऊजी दानरी, पृण्याचे जनार्दन सवारागम उर्फ तात्यासाहेब करंदीकर, सडे (अहमदनगर) येथील शिवराम गणपतराव उर्फ दादासाहेब पवार, गंगाधर रामकृष्ण देव, नागपूर; दगैरे मंडळी उपस्थित होती. त्यावेळी श्री. दादासाहेब पवार यांनी आपला "ग्रहगतिमिहान" हा हस्तलिखित ग्रंथ आपला होता. इंदूर येथे ह्या ग्रंथाचा परिचय ग्रंथकाराने विद्वान् डा. भाऊजी दानरी यांना करून दिला. हा ग्रंथ विद्वान् डा. भाऊजी दानरी आणि श्री. गंगाधर रामकृष्ण देव यांनी दोन रात्री, झोप न घेता, चाळून पाहिला आणि भारतीय भाषेत हा एक

अमोल ग्रंथ आहे असा स्पष्ट अभिप्राय डॉ. दप्तरी यांनी दिला. तेव्हा या ग्रंथाच्या छपाईस केसरी संस्था हातभार लावील असे तेथे इंदूरासच त्यावेळी श्री. तात्यासाहेब करंदीकर यांनी सांगितले. त्यानंतर दोन-तीन वर्षांनी श्री. दादामाहेब पवार यांची प्रकृती थोडी बिघडली, तेव्हा नागपूरला तार करून दादामाहेब पवार यांनी डॉ. दप्तरी यांना मडे (जिल्हा अहमदनगर) येथे बोलाविले. मडे येथे श्री. दादासाहेब पवार यांनी हा ग्रंथ डॉ. दप्तरी यांचे ओटीत टाकला. ग्रंथ घेऊन डॉ. दप्तरी पुण्यास आले. पुण्यास श्री. नरसिंह चिंतामण केळकर यांची भेट घेऊन केसरीच्या ट्रस्टींची बैठक बोलाविली. त्या बैठकीत डॉ. दप्तरी हे स्वतः हजर राहिले व केसरी संस्थेने हा ग्रंथ प्रसिद्ध करावा अशा आशयाचा ठराव पास करून घेतल्यावर ग्रंथ घेऊन ते नागपूरला परत आले. नागपूर येथे आल्यानंतर डॉ. दप्तरी यांनी ग्रंथाचे शुद्धीकरण आणि संपादन करण्याचे काम नागपूरच्या सायन्स कॉलेजचे माजी प्राचार्य कै. डॉ. नारायण गोविंद उर्फ नानासाहेब शंदे यांचेकडे आणि मुद्रणप्रत तयार करण्याचे काम श्री. गंगाधर रामकृष्ण देव यांचेकडे दिले. त्याप्रमाणे, पहिल्या भागाची शुद्ध अशी मुद्रणप्रत तयार होऊन सन १९३८ चे मुमारास केसरीकडे पाठविण्यात आली. सन १९४२ चे मुमारास या ग्रंथाचा एक फार्म तयार होऊन नागपूरला डॉ. दप्तरींकडे आणि सडे येथे श्री. दादामाहेब पवार यांचेकडे तो पहिला फार्म पाठविण्यात आला. त्याच मुमारास दुसऱ्या महायुद्धाचा वणवा फार जोगाने भडकला होता व त्या युद्धाचे लोण ब्रम्हदेशातून कलकत्त्यापर्यंत येऊन पोहोचले होते. त्यामुळे, ग्रंथाच्या छपाईचे काम सर्व गोष्टीच्या टंचाईमुळे केसरी संस्थेस बंद करावे लागले. पुढे भारत स्वतंत्र झाल्यावर, सन १९४८ चे मुमारास या ग्रंथाच्या छपाईच्या कामास सुरवात करण्याबद्दल डॉ. दप्तरी यांनी श्री. जनार्दन सखाराम उर्फ तात्यासाहेब करंदीकर यांना आग्रहाची विनंती केली. त्याला श्री. तात्यासाहेब करंदीकर यांनी उत्तर पाठविले की, ग्रंथाच्या छपाईला आता एक नवीनच अडचण उत्पन्न झाली आहे. त्या अडचणीचा परिहार झाल्याशिवाय ग्रंथाच्या छपाईचे काम हाती घेता येत नाही. ती अडचण अशी की, ग्रंथकार श्री. दादामाहेब पवार हे मृत्यू पावल्यामुळे

कायदेशीररणे या ग्रंथाचा वारसा त्यांचे चिरंजीव श्री. रभाजीराव शिवराम पवार यांचेकडे येतो. त्यांनी ग्रंथाबद्दलचे सर्व हक्क आपणाम दिव्यागिवाय कायद्याने आपणास यान काहीही करता येत नाही

यानंतर डॉ. दप्तरी यांनी हा ग्रंथ अभ्यासकरिता मुंबईचे श्री. दत्तात्रय कृष्णराव मुळे यांचेकडे पाठविला आणि छपाईच्या हक्काबद्दल आणि इतरही हक्कांबद्दल श्री. रभाजीराव पवार यांच्याशी पत्रव्यवहार चालू केला. त्यात तीनशे रुपयांना तो ग्रंथ श्री. रभाजीराव पवार यांनी सर्व हक्कांसहीन डॉ. दप्तरी यांना विकत देण्याचे ठरले. ग्रंथ विकत घेण्याकरिता तीनशे रुपये आणि इतर खर्चाकरिता दोनशे रुपये अशी पांचशे रुपयांची मागणी डॉ. दप्तरी यांनी टिळक ट्रस्ट फंडाला केली. टिळक ट्रस्ट फंड नागपूर-बऱ्हाड गावेतून या कामाकरिता पाचशे रुपये डॉ. दप्तरी यांना मिळाले. त्यातून त्यांनी तीनशे रुपये श्री. रभाजीराव पवार यांना देण्याकरिता पुण्याला केसरीकडे पाठवून दिले आणि रीतमर विक्रीपत्र करून घेण्याबद्दल श्री. तात्यासाहेब करंदीकर यांना कळविले. त्याप्रमाणे केसरी कार्यालयात श्री. रभाजीराव पवार यांचेकडून ग्रंथाचे सर्व हक्कांसहीन विक्रीपत्र नागपूरचे श्री. बालकृष्ण गोविंद उर्फ बंडोपंत ओगले यांचे नावे केसरीचे विश्वस्त श्री. अण्णासाहेब भोपटकर आणि श्री. जयनराव टिळक यांनी आपल्या साक्षी टाकून कायदेशीर आणि रीतमर करून घेतले. हे सर्व झाल्यानंतर ग्रंथ-छपाईचे काम केसरी संस्था पुढे चालू करील अशी अपेक्षा होती. पण, त्यानंतर दोन वर्षांनी श्री. तात्यासाहेब करंदीकर यांनी डॉ. दप्तरी यांना कळविले की, केसरी संस्थेच्या थोड्या नाजूक आर्थिक परिस्थितीमुळे या ग्रंथाच्या छपाईचे काम केसरी संस्था करू शकत नाही. पुढे, सन १९५६ मध्ये डॉ. दप्तरी मृत्यू पावले. आणि हा केसरी संस्थेच्या छपाईचा विषय पूर्णपणे दप्तरदाखल झाला.

सन १९६० चे सुमारास, पुन्हा या ग्रंथाच्या मुद्रणाच्या विषयाम चालता मिळाली. जुन्या मध्यप्रदेशाचे एके वेळचे शिक्षण मंत्री, नागपूरचे डॉ. वामन शिवदासपंत उर्फ दादामाहेब बारलिंगे आणि महाराष्ट्र राज्य

साहित्य-संस्कृति मंडळाचे अध्यक्ष, नाईचे पंडित तर्कनीर्थ श्री लक्ष्मण-
शास्त्री जोशी यांची नागपूरला भेट झाली व त्या भेटीत “ग्रहगति-
मिद्धान” या ग्रंथावर थोडी प्राथमिक चर्चा केली. नंतर, डॉ दादामाहेव
वारलिंगे यांनी श्री. गंगाधर रामकृष्ण देव, श्री. बाळकृष्ण गोविंद उर्फ
बंडोपंत ओगले, प्राध्यापक दामोदर केजव उर्फ बाळामाहेव दप्तरा वगैरे
मंडळींची एक बैठक घेऊन विचारविनिमय केला. त्यात हा ग्रंथ महा-
राष्ट्र राज्य साहित्य-संस्कृति मंडळ, मुंबई-३२, यांना देण्याचे निश्चित
केले. पुढे, सन १९६१ मध्ये, पंडित तर्कनीर्थ लक्ष्मणशास्त्री जोशी हे
नागपूरला आले अगता डॉ. दादामाहेव वारलिंगे, श्री. गंगाधर रामकृष्ण
देव आणि श्री. बाळकृष्ण गोविंद ओगले यांनी सर्व कागदपत्रांसोबत हा
ग्रंथ पंडित तर्कनीर्थ लक्ष्मणशास्त्री जोशी यांचे स्वाधीन केला.

सन १९६५ मध्ये हा ग्रंथ छपाईकरिता महाराष्ट्र राज्य साहित्य-
संस्कृति मंडळाने नागपूरचा शासकीय मुद्रणालयाकडे पाठविला. ग्रंथा-
माठी टंकमुद्रणीचे काम चालू झाल्यानंतर एक नवीनच अडचण पुढे
आली ती म्हणजे मोडी अक्षरांची. महाराष्ट्रात मोडी अक्षरे अक्षर-
मुद्रणात अजून आली नाहीत, त्याचे काय करावे? महाराष्ट्र राज्य
मुद्रणाचे उपसंचालक, श्री. वापराव नाईक हे नागपूरला आले अगता
त्यांनी मुद्दाम श्री. बाळकृष्ण गोविंद उर्फ बंडोपंत ओगले, प्राध्यापक
दामोदर केजव उर्फ बाळामाहेव दप्तरा आणि श्री. गंगाधर रामकृष्ण देव
या मंडळींना भेटीचा निरोप पाठवून भेटीला बोलाविले. ही बैठक
शासकीय मुद्रणालय, नागपूर याच्या कार्यालयात झाली. बैठकीत
मोडी अक्षरावद्दल चर्चा झाली. त्यात या ग्रंथकाराने ग्रंथात योजलेल्या
मोडी अक्षरांच्या टिकाणी मोडीच अक्षरे असावीत असे श्री. बंडोपंत
ओगले यांनी श्री नाईक यांना पटवून दिले आणि ते त्यांनी कबूल केले.
ग्रंथात मोडी अक्षरे कोणकोणती आहेत? ती किती आहेत?
आणि कोठे कोठे आहेत याची संपूर्ण आणि सविस्तर माहिती श्री. दत्तात्रय
कृष्णराव मुळे, मुंबई यांनी शासकीय मुद्रणालय, नागपूर यांना कळविली
त्याप्रमाणे मोडी अक्षराचे साचे तयार करून ती अक्षरे शासकीय मुद्रणा-
लयात मुद्रणालयाचे सहाय्यक व्यवस्थापक, श्री. मनमोहन दत्ताराम प्रभु

यांनी मेहनत घेऊन तयार करवून घेतली. ग्रंथाच्या मुद्रणाचे संबंधात मुद्रिते तयारण्यासंबंधीचा प्रश्न उद्भवला. कारण, या ग्रंथाची मुद्रित-तयारणी हे काम रुक्ष असून जाणत्या माणसाचेच होते. हे काम श्री. गंगाधर रामकृष्ण देव, नागपूर यांनी केले. ग्रंथाच्या मुद्रणाने मुळीच चुका राहू नये म्हणून श्री. देव यांनी मुद्रिते दोनदा तपासली. श्री. देव यांनी हे किचकट आणि रुक्ष काम पूर्णतः थम घेऊन करून दिले. हा ग्रंथ लिहिण्यास ग्रंथकाराला जशी ३० वर्षे लागली आणि त्याचे ह्यातीत हा ग्रंथ मुद्रित झाल्याचे पाहण्याचे भाग्य त्यांना लाभले नाही, तसेच हा ग्रंथ मुद्रित करण्याकरिता कै. डॉ. दत्तरी यांना सुमारे ३३ वर्षे लागली आणि त्यांच्या ह्यातीत हा ग्रंथ प्रसिद्ध झाल्याचे पाहण्याचे भाग्य त्यांनाही लाभले नाही. असो.

हा ग्रंथ ग्रहगतिविषयी आहे. या ग्रंथाचे दोन भाग आहेत. पूर्वार्ध आणि उत्तरार्ध. पहिल्या भागात या ग्रंथातील विषयाला आवश्यक नितके उच्च बीजगणित, सरळ आणि गोलीय त्रिकोणमिती, शंकुच्छिन्न-भूमिती, वैज्यभूमिती, शून्यलब्धि, सूक्ष्मांशगणित, सूक्ष्मांशसमीकरणे हे शुद्ध गणितातील महत्त्वाचे प्रमुख भाग सोपपत्तिकरीत्या प्रतिपादन केले आहेत. दुसऱ्या भागात गोल्डब्रुन (प्रॉब्लेम ऑफ टू वॉर्डीज), गोल्डब्रुन (प्रॉब्लेम ऑफ थ्री वॉर्डीज) याविषयी थोडी माहिती, न्यूटनच्या "प्रिन्सिपिया" मधील सिद्धांत, परमाणुगतिशास्त्रातील सिद्धांत, चंद्राचे सिद्धांत (लूनर थिअरी), ग्रहांचे सिद्धांत यांचे सोपपत्तिक विवेचन केले आहे. सूक्ष्मतेच्या चार पदवीपर्यन्तची सर्व समीकरणे आणि काही पदांची पांच व सहा पदवीपर्यन्तची समीकरणे सोडवून दाखविली आहेत. शेवटी तिथी नक्षत्र योगाच्या स्पष्ट कालसाधनाचे सिद्धांत आणि त्याची समीकरणे सूक्ष्मतेच्या चौथ्या पदवीपर्यन्त सोडवून दाखविली आहेत. एकूण, ज्योतिःशास्त्राचे मूलभूत सिद्धांत यात सोपपत्तिकरीत्या पूर्णपणे दिलेले आहेत. अमला अपूर्व ग्रंथ भारतीय भाषेत तरी हा पहिलाच होय.

ग्रंथकार कै शिवराम गणपतराव उर्फ दादासाहेब पवार हे स्वतःबद्दल लिहितात की, "मी प्राथमिक शाळेवरील शिक्षक, माझी जन्मभाषा मराठी आहे. संस्कृत भाषेचे साधारण ज्ञान आणि अन्य भाषेचे ज्ञान अगदीच थोडे. असे असताही गणितशास्त्रविषयक इंग्लिश ग्रंथातील उपपादन पाहून वाचनाने आणि स्वयंशिक्षणपद्धतीने कठीण अशा विषयांचे ज्ञान संपादन केले आहे." हा त्यांचा विनय आहे.

दत्तात्रय कृष्णराव सुळे,
बाळकृष्ण गोविंद ओगले.

ગ્રંથાત વાપરલેલી
મોડી અક્ષરે

ઐ	અ
ઘ	બ
ઙ	ક
ચ	ઘ
ઞ	ટ
ટ	ત
સ્પ	સ્પ
ઠ	ઝ
ડ	સ
ધ	શ
ન	ક
તં	સં
ઐ,	અ,
ઐ,	અ,
ઐ'	અ'
ઘ,	બ,
ઘ,	બ,
ઘ'	બ'
ઙ,	ક,
ઙ,	ક,
સ્પ'	સ્પ'
ડ	ઙ

अनुक्रमणिका

पृष्ठ

(१) तर्कतीर्थ लक्ष्मण शास्त्री जोशी यांचे निवेदन	(५)
(२) ग्रंथकाराचे ब्रीदक चरित्र	(७)
(३) प्रस्तावना	(११)

प्रकरण पहिलें

सूर्यमाला आणि तिची उत्पत्ति

प्रभुवंदन	१
तत्पपरमाणूयुक्त जगत	१
सृष्टशक्ति	१
उष्णता	२
स्नेहाकर्षण	२
गुरुत्वाकर्षण	२
प्रकृत्यंश = साठा × घनता	३
गुरुत्वाकर्षणाचा सिद्धांत	३
नेपच्यूनचा शोध	४
स्वयं प्रकाशित गोल	५

प्रकरण दुसरें

ग्रहगणिताचा उपयोग

शुभकार्ये निर्व्वध	८
फलज्योतिःशास्त्र	८
किरण प्रताप	९
नीकानयन	१०
वायुशास्त्र	१०
पर्जन्यवृष्टि विज्ञान	११

प्रकरण तिसरें

बीजगणित

घात, घातप्रकाशक आणि घातांक	पृष्ठ १४
द्विपदराशीचा घातविस्तार (द्विपद सिद्धांत)	२०
घातांक (लागरिथम)	२८
गुणकसम्य घातविस्तार पदमाला	३३
घातप्रकाशक सिद्धांत	३४
घातांकाचा पाया e	३६
क्रमिक संख्यांचे घातांक सिद्ध करण्याची समीकरणे	३७
घातांककोष्टक रचना	३९

प्रकरण चवथें

गणितशास्त्रांतील मुख्य सिद्धांत

सरलरेषा त्रिकोणमिती	४१
कोन, कंस, कोनमापन आणि वृत्तपरिमाण	४१
कोनाची भुजज्यादि गुणोत्तरे	४२
धनर्ण चिन्हांचे संकेत	४४
दोन कोनांची बेरीज आणि वजाबाकी यांची भुजज्यादि गुणोत्तरे	५०
भुजज्यादि गुणोत्तरांच्या किमती	५५
त्रिकोणाच्या बाजू व त्या बाजूसमोरच्या कोनाची भुजज्यादि गुणोत्तरे यांचा अन्योन्य संबंध	५७
त्रिकोणाचे अवयव संपादन	५९
त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ	६०

प्रकरण पांचवें

गोलीय त्रिकोणमिती

व्याख्या	६२
गोलीय त्रिकोण	६४
गोलीय त्रिकोणाच्या बाजू आणि कोन यांचा परस्पर संबंध	६८
गोलीय त्रिकोणमितीची समीकरणे	७१

प्रकरण सहावें
शंकुच्छिन्न

						पृष्ठ
वर्तुळ शंकुच्छिन्न	••	••	••	••	••	७७
परवलय	••	••	••	••	••	७८
परवलय बिंदु निधान	••	••	••	••	••	८१
दीर्घवलय	••	••	••	••	••	८२
उद्वलय	••	••	••	••	••	९१
उद्वलयाचे बिंदु निधान	••	••	••	••	••	९२

प्रकरण सातवें

बैज्यभूमितीचीं मूलतत्त्वे

बैज्यभूमिती	••	••	••	••	••	९४
बिंदूचें पातळीतलें स्थान	••	••	••	••	••	९४
सरलरेषा	••	••	••	••	••	९७
सरलरेषेचें समीकरण	••	••	••	••	••	९८
लंबरेषेचें समीकरण	••	••	••	••	••	९९
दोन रेषांच्या छेदन बिंदूचें स्थान आणि त्या स्थळीं असलेल्या कोनाचें मापन.						१००
त्रिकोनावृत्तीतील भास्कराचार्याच्या उदाहरणाची उपात्ति	••	••	••	••	••	१०७
चलत्रिज्या आणि वृत्तानुसारी बिंदु निर्णायकें	••	••	••	••	••	११९
वर्तुळ, अन्योन्य लंबाक्ष	••	••	••	••	••	१२८
परवलय	••	••	••	••	••	१४१
दीर्घवलय	••	••	••	••	••	१४६
उद्वलय	••	••	••	••	••	१५५
शंकुच्छिन्नावृत्तीच्या वक्ररेषांची अक्षीय समीकरणें	••	••	••	••	••	१५७

प्रकरण आठवें

सूक्ष्मांश गणिताची मूलतत्त्वे

	पृष्ठ
विकारी संख्या, अवलंबी संख्या, संचय, वृद्धि	१६२
लेखन पद्धति	१६३
शून्य आणि शून्यलब्धि	१६७
सूक्ष्मांश गुणासंबंधी कांहीं प्रस्थापित सिद्धांत	१६९
संस्मरणीय शून्यलब्धिगुण	१७२
वार्तिक शून्यलब्धिगुण, वृत्तपरिमाणाचें सूक्ष्मांशगुण	१७७
सूक्ष्मांशगुण परंपरा	१८०
संचय-स्पष्टीकरण	१८२
संकलन	१९६
संकलनाचें लेखन	१९७
सूक्ष्मतेची इयत्ता	२००
कांहीं नवीन सिद्धांत	२०९

प्रकरण नववें

वेग आणि वेगवृद्धि व त्यांची पृथःकरणे

प्रेरणा, वेग, स्थिरवेग, चलवेग, वेगाचें मापन	२१२
$\frac{\text{सू.च}}{\text{सू.क}} = \text{वेग}$	२१५
प्रेरणा समांतरभुज चौकोन	२१६
वेगांचें पृथःकरण	२१७
परमाणूचें बक्ररेषेनें गमन	२२०
बक्ररेषेची चलत्रिज्या	२२१
चलत्रिज्येशी समांतर दिशेत वेग = कोभुज $\frac{\text{सू.क्ष}}{\text{सू.क}}$	२२२
चलत्रिज्येवर लव दिशेत वेग = — भुज $\frac{\text{सू.क्ष}}{\text{सू.क}}$	२२३
वेगवृद्धि	२२४

प्रकरण दहावें

ग्रहकक्षेचीं सूक्ष्मांश समीकरणें आणि कक्षेसंबंधी पदांचा अन्योन्य संबंध

	पृष्ठ
ग्रहकक्षेची चलत्रिज्या समान कालांत समान क्षेत्रें आक्रमिते ..	२२९
अत्यंत सूक्ष्म अशा कालविभागांत चलत्रिज्येनें आक्रमिलेलें क्षेत्र ..	२३१
$ज = २ \frac{सूब}{सूक}$	२३२
चलत्रिज्येचें सूक्ष्मांश समीकरण	२४०
ग्रहाच्या प्रदक्षिणेचा काल $= २\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$..	२४८

प्रकरण अकरावें

ग्रहाचें कक्षेतील स्थान

कालाचें समीकरण	२४९
ग्रहावरून काल ठरविणें	२५०
स्पष्टग्रहावरून मध्यमग्रह ठरविणारें समीकरण	२५६
मध्यमग्रहावरून स्पष्टग्रह ठरविणारें समीकरण	२५८
बृहदक्षावरून चलत्रिज्येची किंमत ठरविणारें समीकरण	२६५

प्रकरण बारावें

द्विधा आकर्षण निमित्त कक्षेचीं सूक्ष्मांश समीकरणें

कक्षेच्या स्पर्शरेषेची समांतर वेगवृद्धि	२६७
चलत्रिज्येची समांतर वेगवृद्धि	२६८
शराच्या दिशेतील वेगवृद्धि	२६९
'प्र', 'त', 'ष' प्रेरणाचे स्पष्टीकरण	२८५
कालाच्या सूक्ष्मांशाचें समीकरण	२८६
चलत्रिज्येचें सूक्ष्मांश समीकरण	२८७
शराचें सूक्ष्मांश समीकरण	२९२
'प्र', 'त', 'ष' प्रेरणांच्या किंमती	३०२

प्रकरण तेरावें

चंद्राच्या कक्षेची सूक्ष्मांश समीकरणें

सूक्ष्मतेची पहिली पदवी	३०४
सूक्ष्मतेची दुसरी पदवी	३१०
राहुची दैनिक गति	३१७
चंद्रोच्च दैनिक गति	३१९
समीकरणांतील पदांच्या सामान्य स्वरूपाच्या किंमती	३२०

प्रकरण चवदावें

चंद्रकक्षेच्या सूक्ष्मांश समीकरणांचें संकलन

						पृष्ठ
तिसरी पदवी	३४४
शराच्या सूक्ष्मांश समीकरणांचें संकलन	३४५
चलत्रिज्येचें सूक्ष्मांश समीकरण	३४६
मध्यम भोगाचे समीकरण	३४४

प्रकरण पंधरावें

सूक्ष्मतेची चवथी पदवी

(श) ची किंमत	३५९
(व) ची किंमत	३६५
(कम) ची किंमत	३७९

प्रकरण सोळावें

काल आणि ग्रहाचे शर भोग

ग्रहाचे वेध आणि गणितांतर्गत सिद्धांत	४०५
निरयण गणनेचें आरंभस्थान	४०६
पौष्णांत, रेवति योगतारा (वैजयंति)	४०७
चंद्राचें क्षितिज लंबन	४२०
चंद्राची स्पष्टगति	४२५

प्रकरण सतरावें

पंचांग प्रवर्तनीय सिद्धांत

पंचांग, तिथिवार नक्षत्र योग करण	४२९
नक्षत्र रत्नमाला	४२९
तिथिमुक्ताहार	४३३
योगपद्मावली	४४५

ग्रहगतिसिद्धांत

प्रकरण पहिलें

सूर्यमाला आणि तिची उत्पत्ति

(प्रभुपद वंदन)

अखिल जीवाच्या जीवनासाठी परमकारुणिक अशा प्रभूने ही सृष्टि निर्माण केली आहे. तिच्या कृतीकडे मानवाचे लक्ष जाऊन त्याने विचार करावा म्हणून त्याच्या विचारशक्ति आणि अमूर्त कल्पनाशक्ति दिली आहे. सृष्टीतील अनेक वस्तु पाहून त्यांच्यामधील गुणधर्मांचे विचार प्राचीन कालापासून अव्याहत चालू आहेत. त्यांपैकी अंतरिक्षात जे अनेक पदार्थ आहेत त्यांच्याविषयीच्या विचारपरंपरेनेच ज्योतिःशास्त्राची उत्पत्ति झाली आहे. सरिताप्रवाह तिच्या उगमस्थानामधील अगदीच लहान अगता पुढे जसा तो वृद्धिगत होत जातो, तसेच ज्योतिःशास्त्राचे ज्ञान आरंभीं अल्प प्रमाणांत असून कालक्रमानुसार प्रवर्धमान स्थितीत आहे. ज्योतिःशास्त्राच्या परिशीलनाने मानवाची बुद्धि विकास पावते व त्या विकासाच्या परिणामाने परमात्मा जो जगदुत्पत्तिकर्ता त्याच्याविषयी अत्यंत पूज्य बुद्धि उत्पन्न होते. मनुष्य केवढाही बुद्धिमान आणि कल्पना करणारा असो त्याची मति गुण हळूहळू जाते. ह्या एकदर विचारांचे पर्यवसान शेवटी असें होतें की, त्याच्या मुखांतून असे उद्गार बाहेर पडतात : “हे परमात्मा तुझी कृति अगाध व अगम्य आहे” असा जो परमकारुणिक प्रभु परमात्मा, जगनिर्माता, जगत्संहारकर्ता त्याच्या चरणारविंदी अनन्यभावे वंदन असो.

ग्रहगतिसिद्धांत

२. आरंभी हे सर्व जगत् परमात्म्याने सूक्ष्म अशा अनेक प्रकारच्या परमाणूंनी भरलेले असे निर्माण केले. हे परमाणू तप्त आणि स्वयंप्रकाशित असून आकाशाच्या अनंत पोकळीत इतस्ततः भ्रमण करीत होते. हे परमाणू जरी अचेतन म्हणजे चैतन्य-विरहित अर्थात हालचाल न करणारे जडच आहेत तरी त्यांच्या ठायी सृष्टिकार्य करणाऱ्या काही शक्ति ठेविलेल्या आहेत. त्या शक्तिपैकी उष्णता आणि वीज ह्या शक्तीच्या कार्याने परमाणू हे अचेतन असून कंपनशील आणि प्रगमनशील बनलेले आहेत. दुसऱ्या दोन शक्ति—स्नेहाकर्षण आणि गुरुत्वाकर्षण—ह्या शक्तींनी परमाणूचे

संघ बनले आहेत. ह्याव्यतिरिक्त रसायनाकर्षण आणि किरणाकर्षण अशा दोन शक्ति आहेत. ह्या प्रत्येक शक्तीपासून कोणकोणी कार्ये घडतात ह्याचा विचार करता प्रत्येक शक्तीपासून एक स्वतंत्र शास्त्र निर्माण झाले आहे आणि त्या प्रत्येक शास्त्रावर मोठमोठे ग्रंथ तयार झाले आहेत. ह्या प्रत्येक शास्त्राचे वर्णन करणे हे येथे अस्थानी आहे. तथापि त्यांचा नामनिर्देश खाली देत आहे.

उष्णता

३. उष्णता म्हणजे अणु किंवा परमाणूची कपनरूप गति होय. परमाणूच्या अंगी उष्णता असजशी जास्त असेल तसतसे ते परमाणु परस्परास जास्त प्रतिसारित करितात. उष्णता एका परमाणूतून किंवा अणूमधून दुसऱ्या अणू किंवा परमाणूमध्ये जात असते. तशीच आकाशात लीन होत असते. ह्या दुसऱ्या कार्यास 'अरिभवन' असे म्हणतात. अरिभवन निरंतर चालू आहे. अरिभवनाने उष्णता विमजित होऊन परमाणू थंड होऊं लागला म्हणजे त्याची प्रतिसारण शक्ति कमी होत जाते. प्रतिसारण शक्ति कमी होत होत नाहीशी झाली म्हणजे परमाणु किंवा अणूच्या समूहास द्रवावस्था प्राप्त होते. ह्या स्थितीत अणु आणि परमाणु यांच्यामध्ये स्नेहाकर्षण नावाची शक्ति कार्ये करू लागते.

स्नेहाकर्षण

४. जेव्हा दोन अणु किंवा परमाणु एकमेकांच्या अति सनिध येतात तेव्हां ते परस्परांस आपणाकडे आकर्षिले जातात आणि त्यांच्या रूपान व गुणधर्मांत विपर्याय न होता त्यांचा एक अणु बनतो. ह्या आकर्षण क्रियेला स्नेहाकर्षण म्हणतात. ज्या परिमाणांत उष्णतेचे मान कमी होते त्याच्या व्यस्त प्रमाणात स्नेहाकर्षण वाढत जाते. ह्या स्थितीमध्ये अणु-परमाणूंच्या समूहास घनावस्था प्राप्त होते.

गुरुत्वाकर्षण

५. उष्णतेच्या न्यूनाधिक्यामुळे अणु-परमाणूंच्या समूहास घन, द्रव्य आणि वायुरूप अशा तीन अवस्था असतात. ह्या प्रत्येक अवस्थेमध्ये असलेल्या, अणु-परमाणु किंवा त्यांचे संघ ह्यावर गुरुत्वाकर्षण शक्तीचे कार्य घडते. ह्या शक्तीच्या योगाने अणु-परमाणूंचे समुदाय बनलेले आहेत. तारे, सूर्य, ग्रह, उपग्रह, धूमकेतु आणि उल्का-पाषाण हे जे स्वस्थ पदार्थ आपण पाहतो ते वर सांगितलेल्या तप्त परमाणूंचे गुरुत्वाकर्षण शक्तीने बनलेले समुदाय आहेत.

६. स्वस्थ पदार्थांना हल्ली दिसत असलेली स्थिति प्राप्त करून देणारी शक्ति गुरुत्वाकर्षण होय. गुरुत्वाकर्षण हे प्रत्येक दोन परमाणूंमध्ये आहे. ह्या आकर्षणाच्या योगाने एक परमाणु दुसऱ्या परमाणूस आपल्याकडे ओढितो. पदार्थ हे परमाणूंचे

समुदाय आहेत, म्हणून तेही एकमेकांम आपणाकडे ओढितात. ज्या पदार्थांमध्ये परमाणूंचा समुदाय जास्त त्याचें आकर्षण जास्त असतें. आकर्षण हे परिमेय आहे. म्हणजे तें मापन करण्यास योग्य आहे. अर्थात्, त्याला परिमाण हे असलेच पाहिजे. ठराविक अवकाशात ठराविक घनतेचे अणु-परमाणूंचा जो समुदाय त्याचें जें आकर्षण तें आकर्षण ह्या परिमयाचे परिमाण होय. सोप्या भाषेंत असें म्हणता येईल की, आकर्षण हें वजनानें मापितां येईल. परंतु वजन हें सगळ्या पृथ्वीचें आकर्षण आहे व ते फक्त भूमध्याच्याच दिशेनें कार्य करितें. विवक्षित अवकाशांत जो परमाणूंचा समुदाय आहे त्या अवकाशाची पोकळी आणि त्या परमाणु समुदायाची घनता या दोहोच्या संयोगानें त्या परमाणु समुदायाचे प्रकृत्यंश मापिता येतात. म्हणजे

$$\text{प्रकृत्यंश} = \text{साठा} \times \text{घनता}.$$

७. गुरुत्वाकर्षणाचे कार्य सर्व दिशांनी घडतें. म्हणजे आकर्षक परमाणु किंवा परमाणु समूह, त्याच्या कोणत्याही बाजूस असलेल्या परमाणूला आकर्षितो आकर्षण हें आकर्षक पदार्थाच्या प्रकृत्यंशाप्रमाणें कमी किंवा जास्त असतें. आकर्षक पदार्थांमध्ये जसजसें प्रकृत्यंश जास्त तसतसें त्याचें आकर्षण जास्त असतें. आकर्षित पदार्थ (किंवा परमाणु समुदाय) केवढाही असो आकर्षक पदार्थाचें आकर्षण कमी जास्त होत नाही. आकर्षण हे आकर्षक व आकर्षित पदार्थ ह्यांच्यामधील अंतरावर अवलंबून असतें. हे अंतर जसजसें जास्त तसतसें आकर्षण कमी होत जातें. विवक्षित पदार्थाचें आकर्षण हें, अंतराच्या एका परिमाणाइतक्या अंतरावर जर काही असेल तर दोन परिमाणाइतक्या अंतरावर त्याच्या $\frac{1}{4}$ घडेल, तीन परिमाणाइतक्या अंतरावर $\frac{1}{9}$ घडेल. म्हणजे अंतराच्या वर्गगुणोत्तराच्या व्यस्त प्रमाणांत असतें. दिव्याचा प्रकाश ५ हात अंतरावर जितका प्रकाशमान असतो तितका १० हात अंतरावर नसतो. त्याचा $\frac{1}{4}$ असतो. ५ हात अंतरावर जर एक चौरस हात क्षेत्राचा पडदा धरिला तर त्यावर प्रकाशाची जी प्रखरता असते ती १० हात अंतरावर ४ चौरस हात क्षेत्रावर वाटली जाते यामुळे ती प्रखरता $\frac{1}{4}$ होते. ह्याप्रमाणेंच गुरुत्वाकर्षणाची शक्ति जास्त अंतरावर कमी होते. गुरुत्वाकर्षणाचा सिद्धांत खाली लिहिल्याप्रमाणे आहे :—

सिद्धांत. गुरुत्वाकर्षण हें आकर्षक पदार्थाच्या प्रकृत्यंशाच्या सम-प्रमाणांत आणि आकर्षक व आकर्षित पदार्थांच्या मधील अंतराच्या वर्गाच्या व्यस्त प्रमाणांत असतें.

८. गुरुत्वाकर्षणाच्या सत्यत्वाविषयी सुगम असे प्रत्यक्ष प्रमाण जरी नाही, तरी गुरुत्वाकर्षणाचा सिद्धांत सत्य मानून त्यावरून गणित कार्यानें आणिलें ग्रहांचे गमन, त्यांच्या कक्षेंतील अनेक पदांचीं मांनें, विवक्षित क्षणीची त्यांची आकाशाताल स्याने

ही, त्यांच्या प्रत्यक्ष वेधानें आलेल्या मानांशी आणि स्थानाशी असदी सूक्ष्मपणें परस्पर मिळनात. ह्यावरूनच ह्या मिळनाची सत्यता स्थापित होत. युरेनस ह्या ग्रहाच्या गतीचे गणित करून त्यावरून वेद्य घेऊन अमना त्मान करक दिमू लागला. (वेद्य घेणें म्हणजे ग्रहादिकांचें आकाशातील स्थान यथाच्या सहाय्यानें प्रत्यक्ष पहाणें.) ह्या फरकाचें कारण शोधित असतां गुरुत्वाकर्षणाच्या मिळनाच्या आधारे वळून आले की, युरेनसाला ओढणाऱा नवीनच एखादा ग्रह असावा आणि तो अमक्या ठिकाणी असावा. गणिताने आलेल्या ठिकाणी दूर्बिणीतून पाहता नेपच्यून हा ग्रह सापडला. ह्यामुळे सर्व जगभर ह्या मिळनाची सत्यता स्थापित झाली आहे. गुरुत्वाकर्षणाच्या सिद्धांताने यथशास्त्रातील गणिशास्त्राची उत्तम रीतीनें सुधारणा झाली आहे.

९. वर सांगितलेले तत्त्व परमाणु आकाशाच्या पोखळीत असतां गुरुत्वाकर्षण शक्तीने त्याचे समूह बनत गेले. एखाद्या परमाणूवर दुसऱ्या ज्या परमाणूने अथवा परमाणु समूहाचे आकर्षण बळवान्ग असेल तिकडे तो जाऊन त्यास मिळू लागला. असें कार्य निरंतर चालल्यामुळे सर्व ब्रह्मांडभर असलेल्या परमाणूंचे लहान मोठे समुदाय बनले. हे समुदाय, सूक्ष्म परमाणु एका परमाणु समोवती सर्व अगाऊन मारखे मिळत गेल्यानें, गोळाकार बनले असले पाहिजे. एक परमाणु समूह दुसऱ्या परमाणु समूहाकडे आकर्षिला जाऊ लागल्यामुळे, त्यास आपल्या स्वतःमोवती भ्रमण करत दुसऱ्या समूहाकडे मोठ्या वेगाने जाण्याची गति मिळाली. अन्तःकालपर्यंत ही क्रिया चालत आलेली आहे, आणि आपणाम हे जगन् दृग्गोचर झाले आहे.

१०. तत्त्व परमाणु समूहाने बनलेले जे स्वयंप्रकाशित गोळ त्यांना आपण तारे, तारका किंवा नक्षत्र असे म्हणतो. प्रत्येक तारा, वरच्या लेखातील अनुमानाप्रमाणें, निर्माण झाला आहे ह्या म्हणण्याला प्रमाण प्रस्तुतकांशी आपणाम आकाशांत सापडत आहे. वरच्या लेखातील कल्पनेप्रमाणे घटना होत असलेले असे प्रकाशपुत्र आकाशांत दृष्टीस पडतात त्या प्रकाशपुत्रांत असे दिसने की मधला भाग जास्त प्रकाशित असून त्यासभोवती फिरत असल्याप्रमाणें उत्तरोत्तर विरळ होत जाणारे प्रकाशित मेघाकार वेष्टन दिसतें. असे तारे आकाशात अनेक दिसतात. भरत किंवा मृग तारकापुत्रात जवळजवळ सारख्या अंतरावर असणारे मोठ्या तीन तारे आहेत व ते एकाच सरळ रेषेत दिसतात. त्याच्या दक्षिणेस एकाच सरळ रेषेत असणारे लहान लहान सारख्या अंतरावर असलेले तीन तारे आहेत, त्यास वाण असेही म्हणतात. ह्या वाणातील मधला तारा वर सांगितल्या प्रकारचा आहे. साधारण दुर्बिणीतूनमुद्दा हा देखावा दृष्टीस पडतो. तारे हे आपणापासून वे ते स्वतः परस्परापासून अन्त अंतरावर आहेत त्या अंतराची कल्पनाही आपणाला करिता येत नाही. ह्या कारणानें त्यांचे खरें स्वरूप, त्यांचें महत्त्व, त्याचा परिवार ह्यांचे आपणाला ज्ञान होत नाही.

११. आकाशांत ज्या अनंत तेजोगयी आहेत, ज्यांना आपण तारका किंवा नक्षत्र म्हणतो, त्यांपैकीच, सर्व प्राण्यांना जीवन देणारा असा आपला सूर्यनारायण हा एक ताराच आहे. प्रत्येक ताऱ्याचे महत्त्व आपण ज्ञान नाही, पण सूर्यासंबंधी आपणाला पुष्कळ ज्ञान प्राप्त झाले आहे. सूर्यापासूनच ज्याची उत्पत्ति आहे अथवा सूर्य ज्या परमाणु समूहाचा बनला आहे असे काही परमाणु समूह सूर्यासमोवती भ्रमण करीत आहेत. पदार्थ ज्या मानात लहान किंवा मोठा असेल त्या मानाने त्यास थंड होण्यास कमी किंवा अधिक काळ लागेल. सूर्यासमोवती फिरणारे परमाणु समूह हे सूर्याच्या मानाने पाहिले तर फारच फार लहान आहेत, म्हणून त्या समूहातील उष्णता फार फार कमी झालेली आहे. या कारणामुळे ते अप्रकाशित झाले आहेत. त्यावर सूर्याचा प्रकाश पडून तो प्रकाश परावर्तन पावून आपणाकडे येतो म्हणूनच त्याचे आपणांस दृश्य होते असे जे सूर्यासमोवती भ्रमण करणारे परमाणु समूह त्यास आपण ग्रह, उपग्रह, धूमकेतु, उल्कापाषाण अशीं नावे देतो.

१२. सूर्यासमोवती फिरणारे ग्रह बुध, शुक्र, पृथ्वी, मंगळ, गुरु, शनि, बरुण (प्लुटस) आणि इतर (नेपचून), प्लुटो हे मुख्य आहेत. ही माहिती सूर्यापासून असलेल्या अंतराच्या क्रमाने लिहिली आहे. मंगळ आणि गुरु यांच्यामध्ये बाही लहान लहान ग्रह आहेत, त्यांना लघुग्रह म्हणतात. ग्रहांच्या आकर्षणाने काही परमाणु समूह ग्रहासमोवती भ्रमण करितात त्यांना 'उपग्रह' असे म्हणतात. आपल्या पृथ्वी-समोवती फिरणारा चंद्र हा पृथ्वीचा उपग्रह आहे. मंगळामसोवती दोन उपग्रह आहेत, गुरुसमोवती चार आहेत. शनिसमोवती आठ आहेत आणि बरुणसमोवती दोन उपग्रह आहेत. सूर्यासमोवती काही धूमकेतू आहेत. परंतु काही धूमकेतूंचे गमन मार्ग परबल्य (पॅरबोला) ह्या वक्ररेषावृत्तीचे व बाहीचे उद्बल्य (हेपरबोला), त्या वक्ररेषावृत्तीचे आहेत. आणि ह्या वक्ररेषावृत्ति अशा आहेत की त्या वक्ररेषांची दोन्ही टोके एकत्र होत नाहीत. अशा गमन मार्गाचे धूमकेतु एकदा सूर्यासमीप आल्यानंतर पुनरपि सूर्याकडे वळतही येत नाहीत. दीर्घ बलयावृत्ति गमन मार्गांचे काही धूमकेतु आहेत, ते नियमितकालाने सूर्यासमीप येतात. ग्रह, उपग्रह आणि धूमकेतु ह्याशिवाय काही घनरूप पदार्थ आकाशातून आहेत, त्यास 'उल्कापाषाण' असे म्हणतात. हे उल्कापाषाण पृथ्वीजवळ आले असता पृथ्वीच्या आकर्षणाने पृथ्वीकडे ओढले जातात, याचा स्वतःचा वेग फार बंद कर असल्यामुळे पृथ्वीवरील वातावरणातील वानकणांशी त्यांचे घर्षण होऊन अत्यंत उष्णता उत्पन्न होते, आणि त्या उष्णतेने त्या पाषाणाचे ज्वलन होते. ग्रह, उपग्रह व बाही धूमकेतु आणि उल्कापाषाण हा सूर्याचा परिवार होय. सूर्य आणि त्याचा परिवार ह्यास 'सूर्यमाला' असे म्हणतात.

१३. सूर्यमालेतील अंतराच्या क्रमाने आपल्या मंगळ हा तिसरा आहे. मंगळ म्हणजे पृथ्वी; ह्याचा आकार मंगळ आहे. ह्याद्वळ अनेक ग्रहातून विवरण केलेले आहे

ते येथे सांगत नाही. परंतु सूर्याची व ग्रहांची उत्पत्ति कशी झाली असावी याचे जें वर वर्णन केले आहे त्यावरून पाहता, सूर्य, ग्रह उपग्रह हे सर्व आकारानें सामान्यतः गोळचे असले पाहिजेत. वायूरूप व द्रवरूप पदार्थ आणि द्रव व घन ह्यांच्यामधील स्थितीत असलेले पदार्थ (उदाहरणार्थ चिखलाचा गोळा) हे सर्व दिशानी सारखे दाबले गेले तर ते गोळरूपच धारण करतील. ह्यास प्रत्यक्ष उदाहरण अंधुकीच्या गोळ्या आणि छरें याचें आहे. शिशाचा रस उंच टिकाणाहून निरनिराळ्या छिद्रांच्या चाळणीतून सोडला तर रसाचे थेंब खाली पडत असता रस्त्यात पड होण्यापूर्वी गोळाकार धारण करितात असे आहे. तसेच कोणत्याहि एका परमाणूसभोंवती दुसरे अनेक परमाणु त्यास सर्व दिशानी सलग्न होऊ लागले तर जो पदार्थ बनेल तो गोळाकारच असला पाहिजे.

१४. प्रत्येक ग्रहाचा आकार साधारणतः गोळरूप आहे, तसेच प्रत्येक ग्रह स्वतः-सभोंवती नियमित वेळात भ्रमण करितो, आणि सूर्यासभोंवती प्रदक्षिणा करितो. प्रत्येक ग्रहाचे हे प्रदक्षिणाकाल नियमित आहेत. आणि त्याचा परम्पराशी विशेष प्रकारचा संबंध आहे. सर्व ग्रहांचे प्रदक्षिणाकाल आणि त्यांचा सूर्यापासून अंतर ह्यांचा एकमेकाशी संबंध आहे. तो संबंध कसा प्रकारचा आहे हे ह्या प्रश्नात सोपपत्तिक रीतीने सिद्ध केले आहे.

१५. पृथ्वी ही आपल्या आसामसभोंवती फिरत असून त्या भ्रमणामह सूर्या-सभोंवती प्रदक्षिणा करित आहे. सूर्यासभोंवती एक पूर्ण प्रदक्षिणा करण्यास जा काल लागतो त्या कालास वर्ष असे म्हणतात व आसामसभोंवती एक फेरा फिरण्यास जो काल लागतो त्यास नाक्षत्रदिवस म्हणतात. एखादा तारा मध्यान्ह रेपेवर आपल्या-पासून तोच तारा पुन्हा याम्योत्तर रेपेवर येण्यास जा काल लागेल त्या कालाने आपणास नाक्षत्रदिवसाचें मात करून येते. पूर्वकाली ज्योतिःशास्त्राची कल्पना अशी होती की, पृथ्वी ही स्थिर आहे आणि आकाशातील पदार्थ तिच्यासभोंवती फिरतात. परंतु गुरुत्वाकर्षण शक्ति आणि गणितासत्र, तसेच गणितासत्र आणि यनशास्त्र यामध्ये जे मिळान मिळ झालेले आहेत त्यावरून पृथ्वी ही स्थिर नाही. ती आपल्या आसामसभोंवती भ्रमण करित सूर्यासभोंवती प्रदक्षिणा करिते, असे निश्चय सिद्ध झाले आहे.

१६. सूर्यमालेचा अन्विषित सूर्य आहे. तो ज्या महत्त्वाचा किंवा योग्यतेचा आहे त्याच योग्यतेचा, किंबहुना त्याच्या घनपट योग्यतेचा, आकाशातील प्रत्येक तारा आहे. सूर्य जसा स्वयंप्रकाशित आहे तसेच तारेही स्वयंप्रकाशित आहेत. सूर्यासभोंवती जशी ग्रहमाला आहे तशीच ताऱ्यासभोंवती ग्रहमाला असण्याचा संभव आहे. तारे आपणापासून अमर्याद अंतरावर असल्याकारणाने ते आपणास स्थिर आहेत असे

वाटते, परंतु त्यांना अत्यंत सूक्ष्म असें चलन आहे. ते चलन इतके सूक्ष्म आहे की, दोन-चार हजार वर्षांनी सुद्धा मोठ्या कष्टाने आपल्या अनुभवास येते. ग्रहावर जसे सूर्याचे आकर्षण, तसेच सूर्यावर ताऱ्यांचे आकर्षण आहे. या कारणाने आपला सूर्य, ही बुध्वादि ग्रहमाला बरोबर घेऊन आकाशाच्या अमर्याद पांवळीतून ताऱ्यांच्या आकर्षणाने स्थलांतर करीत आहे.

१७. प्रस्तुत काली पृथ्वीतळावर जी शास्त्रे आहेत, ती प्रगतीच्या मार्गावर आहेत. त्याप्रमाणे ज्योतिःशास्त्रही प्रगमनशील आहे. पाश्चात्य द्शान ज्योतिःशास्त्रविषयक वादमयाची पुष्कळ भरभराट झालेली आपण पाहत आहोत, परंतु आमच्या जुन्या कल्पना त्या परिपूर्ण असल्यामुळे हा मतभेद आहे असे म्हणून, सिद्ध झालेले सिद्धान्त आमचे भारतीय ज्योतिःशास्त्रज्ञ कबूल करीत नाहीत. पण ते सिद्धान्त स्वीकारल्याशिवाय प्रगति हाणे अशक्य असे जाणून प्रस्तुत ग्रंथातील विषय प्रतिपादन केले आहे.



प्रकरण दुसरें

ग्रहगणिताचा उपयोग

शुभकार्य निर्बंध

१८. ह्या भरत खंडांतील वैदिक वर्मानुयायाचा प्रत्येक धार्मिक अथवा ध्यावहारिक विधि करण्याचा काळ, ग्रहांच्या आकाशातील स्थानांशी संबंध असा आहे. उदाहरणार्थ लग्न विधि असेल तर चंद्र ठगविलेल्या अकरा नक्षत्रांपैकीच एका नक्षत्री असला पाहिजे. ज्या वधूवरांचा विवाह व्हावयाचा त्याच्या जन्मकालच्या चंद्राच्या गतीपासून विवाहकाली चंद्र अमुक इतक्या अंतरावर असला पाहिजे असा निर्बंध आहे. घर बांधणे, विहीर खोदणे, प्रयाण करणे वगैरे कार्य ठराविक वेळीच म्हणजे ठराविक ग्रहस्थिति असताच करावी असा निर्बंध आहे. हे निर्बंध फार प्राचीन काळापासून पाळले जात आहेत. ह्या निर्बंधाचा त्याग करून ते विधि कोणी करीत नाहीत. ह्या दृष्टीने पाहिले असता ग्रहांच्या स्थितीच्या ज्ञानाची आम्हास अत्यंत आवश्यकता आहे हे उघड आहे. हे विधि अमत्त्वाच वेळी का करावे या-विषयीचा विचार सप्रमाणपद्धतीने शास्त्रीयरीत्या झालेला आहे किवा वगे, हे ठगविण्याला प्रस्तुत काही साधने दिसत नाही. परंतु ह्या निर्बंधाविषयीचा जो संप्रह पूर्वकालीन ऋषींनी करून ठेवलेला आहे त्यामध्ये सत्यता काहीच नाही असे शास्त्रीय पद्धतीने सिद्ध झाल्याशिवाय त्याचा निरस्कार करणे केव्हाही उचित नाही व तो संप्रह त्याज्यही म्हणता येणार नाही.

फलज्योतिःशास्त्र

१९. ग्रहगणिताचा उपयोग फलज्योतिःशास्त्रात आहे. “विवक्षित ग्रह आकाशातील विवक्षित भागाच्या मर्यादित आवल्यापासून अमुक प्रकारचे फल निपट्ट होई, असे नियम पुष्कळशा अनुभवाने न्याय केलेले आहेत.” ह्या नियमाद्वारे ग्रहांचे आकाशात स्थान कोठे आहे हे गणिताने ठरवून फल मागणे हा फलज्योतिषाचा विषय आहे. हे फल वनेविषयाम् इच्छितलेल्या काळी ग्रहाची स्थाने कोठे आहेत हे ग्रह-गणितानेच समजते. फलज्योतिःशास्त्र हे अनुसवावलक्षी शास्त्र आहे. ह्यातील जे सिद्धान्त ठगविलेले आहेत ते पुष्कळशा अनुभवाने टूटले आहेत. म्हणून त्यात कार्य-कारणभावाचा विचार केलेला नाही. प्रत्येक शास्त्राच्या उत्पत्तिविषयी विचार केल्यास वळून येईल की, शास्त्राचा उगम प्रथमतः अनुभवानेच झालेला असतो. पूर्वकालच्या विद्वानांनी ग्रहांची स्थाने व त्याची फले यांमधल्या त्याता जे जे अनुभव आले ते ते त्यांनी ग्रथित करून ठेविलेले आहेत. त्यात कार्यकारणभावाचा विचार

नाही पण त्यास तो मिळाल्यास तें शास्त्र भरमगटीस आल्याशिवाय राहणार नाही. आधुनिक काही विद्वानाचा असा ग्रह झालेला आहे की, फलज्योतिष हे कांही तरी आहे. परंतु अशा समजूती वास्तव नाहीत. फलज्योतिष शास्त्रान सत्याचा अंग नाही हें जोपर्यंत नि मंदें मिद्ध झाले नाही तोपर्यंत पूर्वकालच्या ऋषींनी केलेले शोध व ते शोध एकत्र करून लिहिलेले ग्रंथ टाकून देता येत नाहीत. फलज्योतिष शास्त्राचा कार्यकारणभावानुरूप किंवा मर्यादितरूप विचार करू लागल्यास पूर्वचार्यांनी सकलित केलेल्या सिद्धांताचा त्यास केवढा आधार मिळेल याचा विचार करावा. याकरिता बहुजनसमाजाची ह्या विषयासंबंधी जी आसक्ति आहे ती कमी होऊ देणे आपणाला योग्य दिसत नाही. फलज्योतिषाचा विचार करिता खालच्या लेखान 'किरणप्रताप' म्हणून जो विषय दिला आहे त्यावरून फलशास्त्र ह्याला कांही विषय प्रकारचे वळण लागून ते जास्त अनुभव देणारे होईल असे मानण्यास पुष्कळ जगा आहे

किरणप्रताप

२०. किरण शब्दाच्या व्याख्येकडे पहा. व्यवहारात आपण सूर्यकिरण, चंद्रकिरण असा शब्दप्रयोग करिता. यातील किरण शब्द प्रकाशाच्या अनुलक्षून आहे. मी त्यात विजेलाही घेतो. यावरून मी असे म्हणतो की "बीज आणि नेज यांच्या ज्या लहरी (लाटा) त्याला किरण असे म्हणावे." ही व्याख्याहि अव्याप्यच आहे. कारण विशुत्किरण, नेज किरण ह्याप्रमाणे 'चैतन्यकिरण', भावनामय किरण वगैरे ह्यात घेतले पाहिजे. जर दर्शित केलेल्या किरणांमध्ये किरण, तमोमंडळातील प्रत्येक पिंड, ह्या भूगोळावर प्रतिध्वनी फेकित आहे. आणि ह्या किरणांची कार्ये भिन्न भिन्न असून प्राणी आणि वनस्पति यांच्या जीवनचक्रावर भिन्न भिन्न परिणाम घडत आहेत. हे परिणाम गतिरूप नसून भावनारूप व चैतन्यरूप आहेत. ग्रह किंवा तारा यांच्या किरणांची दिशा सूर्य किरणांच्या दिशेची जितक्या भिन्नस्वाते असेल तसे त्यांच्या कार्याचे परिणाम घडतात. अशा तऱ्हेच्या विचारांनी किरणप्रताप हे शास्त्र बनण्याचा संभव आहे आणि ह्याच शास्त्राने फलज्योतिष शास्त्रातील सिद्धांताची सिद्धी होईल. गरूवाचरपणाने जशी ग्रहांच्या गतीची सिद्धता आली तशीच फलशास्त्राची सिद्धता होऊन ते शास्त्र प्रगतिपथावर येईल. तमोमंडळाची ह्या नावाचा ओषधीचा प्रकार आहे त्यात सूर्यकिरणांच्या कार्याने शद्ध पाण्याच्या ओषधीचे गुण प्राप्त होतात. विशुत्किरणांची कार्ये, फोटोप्राक्ती वगैरे विषय किरणप्रताप ह्या शास्त्रान येतात. किरणप्रतापाची कार्ये आणि फलज्योतिष शास्त्राची उपपत्ति याचा काही अत्यांत्य मर्यादा असावा असे माझ्या कल्पनेत येते. काले वरून ते शास्त्र निर्माण होईल. नाही म्हणून बोणी सांगावे.

नीकानयन

२१. विवक्षित काली ग्रहाची स्थाने आकाशान कोठे आहेत हे गणिताने समजणे हा ज्योतिर्गणिताचा विषय आहे. ज्या कार्यात ज्योतिर्गणिताचा ह्या प्रकारचा उपयोग होईल अशी अनेक कार्ये आहेत. त्यापैकी नीकानयन म्हणजे जहाज एका ठिकाणाहून दुसरे ठिकाणी नेणे हे एक फार महत्त्वाचे कार्य आहे. नीकानयन निश्चिन्नेपणे यशस्वी होण्यास जी अनेक साधने आहेत त्यापैकी ज्योतिर्गणित हे एक अत्यंत आवश्यकतेचे साधन आहे. अफाट महासागरात हजारो मैलांच्या पमान्यात जेथे वरुनी आकाश आणि खाली पाणी ह्याव्यतिरिक्त काहीच दिसत नाही अशा ठिकाणी आपले जलयान पृथ्वीच्या कोणत्या भागी आहे, तसेच आपण कोणत्या दिशेला जात आहोत, अशा रीतीने गेल्यास इष्ट स्थानी जावयाला वेळ किती लागेल, इत्यादि गोष्टी निश्चिन्नेपणे समजण्यास ज्योतिर्गणित हेच उत्तम साधन हाय. किवहुना ज्योतिर्गणिताशिवाय नीकानयन अशक्य होय. पाश्चात्य ज्योतिःशास्त्रज्ञांनी ह्या शास्त्राची जी ही अत्यंत सुधारणा केली त्याचे कारण तरी नीकानयनाला सहाय्य हेच मुख्य आहे. ज्योतिःशास्त्राचे मूल उत्पत्तिस्थान हा आपला आर्यावर्त देशच आहे परंतु प्रस्तुत ह्याची जी सुधारणा झाली आहे त्यावरून अनामिज जनास ह्या शास्त्राच्या उत्पत्तिस्थानाचा संशय येण्यासारखा आहे.

वायुशास्त्र

२२. ग्रहगणिताच्या सहाय्याने वातावरणाची भविष्यकालीन स्थिति कशी होईल याविषयी समजणावली जी शास्त्रपद्धतीने ज्यामध्ये विचार केला आहे असे एक शास्त्र तयार होईल असा पूर्ण विद्यमान आहे. ह्या शास्त्राला “वायुशास्त्र” असे म्हणता येईल. चंद्राच्या गुरुत्वाकर्षण कार्याने समुद्रास भरती-ओहोटी होत. ह्याविषयी कोणासही संशय नाही. समुद्राला जसा भरती-ओहोटी होत, त्याप्रमाणे पृथ्वी-संभावनी असलेल्या वातावरणास भरती आणि ओहोटी होत आणि चंद्राच्या आकर्षणाने जसे हे कार्य घडते त्याचप्रमाणे सूर्य आणि ग्रह यांच्या आकर्षणानेही वायु सागराला भरती आणि ओहोटी होत. तसेच महासागरांमध्ये “गल्फ स्ट्रीम” सागरे प्रवाह उत्पन्न झालेले आपणांस माहित आहेत, त्याप्रमाणे वात सागरातही प्रवाह उत्पन्न होताना आणि त्यापैकी काही नियमित कालपर्यंत वाहत असताना.

२३. सूर्याला उष्णता सूर्यापासून प्राप्त होते. विवक्षित क्षेत्र विनाशान जो उष्णतेचा समग्र होता तो तीन गोष्टीवर अवलंबून असतो. पहिली गोष्ट सूर्यापासून जी उष्णता येते ती किती तीव्रतेची आहे. ही तीव्रता सूर्य आणि पृथ्वी यांमध्ये जे अंतर आहे त्या अंतरावर अवलंबून असते. पण ते अंतर सतत सारखे नसते; कधी कधी ते कधी जास्त असे अनियमित प्रमाणाने असते. दुसरी गोष्ट सूर्यकिरणाची

दिशा. सूर्यकिरणें भूपृष्ठावरील विवक्षित क्षेत्र विभागांत लंब दिशेने येतील किंवा निरकस दिशेने येतील. लंब दिशेने येणारी किरणें जेवढा क्षेत्र विभाग व्यापतील त्यापेक्षा जास्त क्षेत्र विभाग निरकस किरणें व्यापतील. हे कार्य सूर्याच्या उन्नततांनावर अवलंबून राहिले. निमरी गोष्ट सूर्यकिरणें एका अंतरातून किती वाळपावेना उष्णता देतात. त्या कालावर म्हणजे दिनमानावर उष्णतेचे आगमन अवलंबून राहिले. विवक्षित क्षेत्रावर उष्णता येते किती, परिमाणें आणि अग्निवन्नाने विमर्जित होतें किती आणि त्या स्थानी उष्णता राहते किती हा विचार ग्रहगणिताने ठरविता येईल त्रिकोणमिति आणि सूक्ष्मांश गणिताच्या सहाय्याने याचा निर्णय करिता येईल.

परजन्यवृष्टि विज्ञान

२४. आकाशातून जो पाण्याचा वर्षाव होतो त्याला परजन्यवृष्टि म्हणतात. सूर्याच्या उष्णतेने पृथ्वीवरील सर्व ठिकाणच्या पाण्याची वाफ होऊन ती वातावरणात मिगळते. आल्या वस्त्रामध्ये जसे पाणी शिरून वसते त्याप्रमाणें हवेमध्ये पाण्याची वाफ बसून राहते जाड धान्यामध्ये शरीक धान्य जसे त्याच्या फटीत घुसते तसे हवेच्या अणूंमध्ये वाफेचे अणू घुसतात. आल्या कापडावर दाब घातला किंवा ते पिळले असता जसे पाणी बाहेर येते म्हणजे वस्त्रापासून अलग होते, त्याप्रमाणें हवेवर दाब (हवेचाच दाब) जास्त झाला म्हणजे त्यातील वाफ मोकळी होते, आणि उष्णतेच्या कमताईमुळे ती थिजून पाण्याचे अणू बनतात. हे अणू अत्यंत सूक्ष्म असल्यामुळे हवेमध्ये धुळीच्या कणांप्रमाणे तरगत राहतात त्यास आपण दृग किंवा मेघ असे म्हणतो. मेघातील पाण्याचे अणू एकमेकाकडे गुरुत्वाकर्षण शक्तीने ओढिले जातात आणि त्या अणूंचे सघनून त्यांना विद्रुष प्राप्त होते. हवेच्या दाबाच्या कमीअधिक मानाप्रमाणे हवेतील वाफेच्या अणूची संख्या कमीअधिक असते. त्याप्रमाणे पाण्याचे थेंब लहानमोठे होतात. थेंब पृथ्वीच्या आकर्षण शक्तीने खाली येत असता मार्गात त्याला जिनके पाण्याचे थेंब आणि अणू भेटतील तिनक्याचा आपणा- मध्ये समावेश करून जमितीवर येतो. कदाचित उष्णतेचे मान वाढले आणि हवेचा दाब कमी झाला म्हणजे ते पाण्याचे थेंब किंवा अणू वाफरूप होऊन हवेत लुप्त होतात.

२५. भूपृष्ठास सूर्यकिरणांपासून उष्णता प्राप्त होते. सूर्यकिरणे सूर्यापासून निघून भूपृष्ठावर आघात करितात त्या आघाताने उष्णता उत्पन्न होते. अशा कार्यामुळे सूर्यकिरणांची उष्णता भूपृष्ठावर उत्पन्न होते आणि तेथून हवेला उष्णता प्राप्त होते. भूपृष्ठाजवळ हवेची उष्णता जास्त असते. तेथून जसे जसे आकाशात वर जावे तसतशी हवा थंड लागते. थंड हवेपेक्षा उष्ण हवा हलकी असते म्हणून ही हलकी पण उष्ण हवा थंड हवेमधून घुसून वर निघते. अशा प्रकारच्या अनेक

वाग्वर्णांनीं हवेचें मथन सदोदित चाललेले असते. ह्या मथनामुळे थंड हवेचें उष्ण होणे व उष्ण हवेचें थंड होणे ही क्रियाही चालू असते, त्याचप्रमाणे पाण्याच्या वाफेच्या अणूंचें ग्रहण आणि त्यास हाही चालू असतो.

२६. संपृष्ठावरील विविधित स्थानी एखादे वर्षी विपुल पर्जन्यवृष्टी होतं आणि त्याच स्थानी एखादे वर्षी अवर्षण पडतं ह्याचें कारण काय असावे ? ज्या सूर्याच्या उष्णतेच्या योगानें आणि ज्या समुद्राच्या पाण्याची वाफ होऊन वृष्टि होतं, तोच सूर्य आणि तोच समुद्र असता वृष्टीमध्ये असा न्यूनाधिकपणा का व्हावा ह्याचा विचार करू लागलें असता वृष्टीशी ग्रहाच्या आकर्षणाचा संबंध असल्या पाहिजे हें उघड आहे. ग्रहाच्या आकर्षण कार्याने हवेमध्ये हवेचे प्रवाह उरटमुळट बनतात. त्या प्रवाहाच्या आघाताने पर्जन्यवृष्टि कमीअधिक होईल. सहास्रपट्टाचे उदाहरण घेतले तर त्यावर पर्जन्यवृष्टि मज्ज्याध्वपासून होते. ह्या समुद्रावरून येणाऱ्या वाऱ्याची दिशा जर दक्षिणेकडे घळली तर वाफेने भरलेले मेघ दक्षिणेकडे जातील आणि अरवस्थानच्या वाळवंटावरील रक्ष धारे सहस्रपट्टावरून वाहतील. यामुळे पर्जन्यवृष्टि होणार नाही. असा प्रकार विचार केल्या असता वरील म्हणण्याची सत्यता अनुभवाम येईल.

२७. वातावरणाम चलन उत्पन्न होण्याचें मुख्य कारण सूर्याची उष्णता हे होय. हे एक कारण असतें तर पृथ्वीच्या सर्व भागावर वृष्टीमध्ये सारखेपणाच राहिला असता. परंतु, चंद्र, सूर्य आणि ग्रह यांच्या गुरुत्वाकर्षण कार्याने हवेमध्ये अनेक प्रकारचे प्रवाह उत्पन्न होतात आणि वृष्टीच्या कार्यामध्ये अनियमितपणा प्राप्त होतो. ग्रहाच्या युक्तिकाळी पर्जन्यास अश्विपणा येतो असा भासा समज आहे. या विषयाच्या गणितशास्त्राची अर्थात ज्योतिर्गणिताची योजना करून ग्रथ लिहित्यास आपल्या कृपिप्रधान भरत खंडाची किती सोय होईल ?

२८. वर दर्शित केल्याप्रमाणे पाहिले असता ज्योतिर्गणिताचा उपयोग फारच फार मोठा आहे. त्यात ही गणितशास्त्राची महती जास्त आहे. गणितशास्त्र म्हणजे गुणाकार-भागाकार नव्हत. त्यात अनेक मोठमोठे महत्त्वाचे विषय आहेत. ह्या ग्रंथात त्याच विषयाचें कामापुरते विवेचन येथून पुढे केलें आहे. हें विवेचन जरी परिपूर्ण ग्रंथाच्या स्वरूपाचें नाही तरी त्या त्या विषयाची जाणीव आणि योजना करिता येईल अशा रीतीने लिहिलेले आहे. येवढाचवत्तच बुद्धिवान उत्तम ग्रंथ लिहूं शकतील अशी मला आशा आहे.

प्रकरण तिसरे

गणितशास्त्रातील मुख्य सिद्धांत

बीजगणित

२९. ह्या ग्रंथान गणिशास्त्राचे सिद्धांत सिद्ध करून दाखवावयाचे आहेत जगान ज्योतिषास्त्राची जी अभिवृद्धि झाली आहे, आणि खगोलस्थ ज्योतिर्विषयी जें ज्ञान प्राप्त झालें, त्याला मुख्य कारण गणिशास्त्राचे सिद्धांत हें एक आहे. गति म्हणजे वाय, ती कशाने उत्पन्न होनि, तिचे मापन कसे करावे, वगैरे विवेचन ह्या ग्रंथान पुढे केलेले आहे. म्हणून गतिविषयी येथे वाट्टी मागत नाही पण गति-सिद्धांत सिद्ध करण्याकरिता गणिताच्या उच्च भागाची योजना करावी लागते. ते भाग असे, उच्चप्रतीचे बीजगणित, भूमिति, मण्डरेपा-त्रिकोणमिति, गोलीय-त्रिकोणमिती, शकुच्छिन्न-भूमिति, वैज्यभूमिति, अनुमानसिद्धि-भूमिति, विदुनिणांशक-भूमिति, मूढमाग-गणित, आकर्षणशास्त्र आणि प्रेरणाशास्त्र. ह्यावरून पाहता ज्या वाचकाला ह्या गणित भागांची माहिती नाही, त्याला पुढे सिद्ध केलेल्या गति-सिद्धांताच्या उपपत्तीचें ज्ञान होणें अशक्य आहे. महाराष्ट्र भाषेन ह्या गणित भागावर अद्यापि श्रवच नाहीत ही मोठी खेदाची गोष्ट आहे. महाराष्ट्र भाषाभिज्ञ काही गणितज्ञांस ह्या भागाच्या नावाची आळख मुद्दा नाही, अशा वाचकाला त्या त्रिषयाचें स्थूल स्वरूप समजावे म्हणून मुख्य मुख्य सिद्धांतांचें विवरण येथे देत आहे.

३०. बीजगणित म्हणजे सामान्य सख्यानी केलेले गणित. मग ती सामान्य सख्या जात असो की अज्ञात असो. जसें "वर्तुळाचा परीघ व्यासाच्या π ह्या संख्येइतक्या पटीवरोवर असतो". हा सिद्धांत बीज परिभाषेनें लिहिल्यास,

$$p = \pi d$$

ग्रहगणितसिद्धांत

ह्यातील तिन्ही सख्या सामान्य सख्या आहेत. ज्ञान असलेल्या सख्येस व्यवक्त सख्या म्हणतात, आणि जी सख्या किती आहे हे माहित नसतें तेव्हा तिच्या अव्यक्त सख्या म्हणतात. वरच्या तीन सामान्य सख्येपैकी प म्हणजे वर्तुळाच्या परीघाची लांबी इच्छित रेखा परिमाणाने मोजून आलेली सख्या आहे, आणि d म्हणजे त्याच वर्तुळाचा व्यास त्याच रेखा परिमाणाने मोजून आलेली सख्या आहे. आणि π ही सामान्य

संख्याच आहे पण ती व्यक्त आहे म्हणजे आपणाला माहित आहे. n ही संख्या हिला 'पाय' असे म्हणतात. वर्तुळाच्या परीघाचे व्यासाशी असलेले गुणोत्तर ह्या n (पाय) संख्येने दाखवितात आणि हे गुणोत्तर 3.141592 ह्या संख्येने जाणिले जाते.

घात, घातप्रकाशक आणि घातांक

३१. घात—विवक्षित संख्येने १ ह्या संख्येस गुणून आलेला जो गुणाकार, त्या गुणाकारास, त्याच विवक्षित संख्येने पुनः गुणून जो गुणाकार येईल, त्या गुणाकारास त्याच विवक्षित संख्येने पुनः गुणणे ; ह्याप्रमाणे कांहीं वेळां गुणून आलेला जो गुणाकार, त्यास त्या विवक्षित संख्येचा "घात" म्हणतात.

घातप्रकाशक—विवक्षित संख्येने, जितके वेळा गुणिले असेल, तितकी संख्या दाखविणाऱ्या अकाम घातप्रकाशक म्हणतात. जसे १ ह्या संख्येला ४ ह्या संख्येने ३ वेळा गुणिले तर जो एक गुणाकार येतो, त्यास ४ ह्या संख्येचा त्रिघात म्हणतात.

1×4 हा ४ चा एक घात ; $1 \times 4 \times 4$ हा ४ चा द्विघात ; $1 \times 4 \times 4 \times 4$ हा ४ चा त्रिघात होय.

कोणत्याही संख्येच्या द्विघातास वर्ग म्हणतात आणि त्रिघातास घन म्हणतात.

$1 \times 4 = 4$ ही संख्या ४ चा एकघात हा 4^1 असा लिहितात.

$1 \times 4 \times 4 = 16$ ही संख्या ४ चा द्विघात म्हणजे वर्ग हा 4^2 असा लिहितात.

$1 \times 4 \times 4 \times 4 = 64$ ही संख्या त्रिघात म्हणजे घन हा 4^3 असा लिहितात.

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100$ ही संख्या a चा चतुर्थघात हा a^4 असा लिहितात.

वरच्या तीन ओळीत ४ ह्या संख्येचे अनुक्रमे एक दोन तीन घात आहेत ते $4^1, 4^2, 4^3$ असे लिहिले आहेत. ह्यांत १, २, ३ ह्या संख्या ४ ह्या संख्येपेक्षा किंचित लहान वरच्या बाजूस किंचित उजवीकडे लिहिल्या आहेत, ह्या संख्यांना घातप्रकाशक म्हणतात. चवथ्या ओळीत a ह्या संख्येचा चतुर्थघात आहे व तो a^4 असा लिहिला आहे. ह्या घातांत ४ हा घातप्रकाशक आहे.

३२. एकाच संख्येच्या अनेक घातांचा गुणाकार हा, त्याच संख्येच्या पूर्वीच्या घातप्रकाशकांच्या बेरजेइतका घात केल्याने जी संख्या येते त्या संख्येबरोबर असतो.

$$\text{जसे } \kappa^1 \times \kappa^2 = \kappa^{1+2} = \kappa^3.$$

(क)

येथे $\kappa^3 = 1 \times \kappa \times \kappa \times \kappa$ आणि $\kappa^3 = 1 \times \kappa \times \kappa$ यांचा गुणाकार

$$\begin{aligned} \kappa^1 \times \kappa^3 &= 1 \times \kappa \times \kappa \times \kappa \times 1 \times \kappa \times \kappa \\ &= 1 \times \kappa \times \kappa \times \kappa \times \kappa \times \kappa \times \kappa \\ &= \kappa^{3+3} = \kappa^6. \end{aligned}$$

$$\text{तसेच } 3^4 \times 3^2 \times 3^1 = 3^{4+2+1} = 3^7.$$

$$\text{आणि } अ^1 \times अ \times अ^4 = अ^{1+1+4} = अ^6.$$

३३. एकाच सव्येच्या दोन घातांचा भागाकार हा भाज्याच्या घातप्रकाशकातून भाजकाचा घातप्रकाशक वजा करून आलेल्या बाकी इतका त्याच सव्येचा घात केल्याने जी संख्या येईल, तिच्याबरोबर असतो. (ख)

जसे $अ^4$ या सव्येला $अ^3$ या सव्येने भागावयाचे असेल तर

$$अ^4 \div अ^3 = \frac{अ^4}{अ^3} = अ^{4-3} = अ^1$$

$$\begin{aligned} \text{म्हणजे } &= \frac{1 \times अ \times अ \times अ \times अ \times अ \times अ}{1 \times अ \times अ} \\ &= 1 \times अ \times अ \times अ = अ^3 \end{aligned}$$

३४. वरच्या लेखातील सिद्धांतात ऋण घातप्रकाशक याचा अर्थ स्पष्ट होत आहे. तो असा की $अ^3$ ह्या सव्येला $अ^5$ ह्या सव्येने भागावयाचे तर

$$\begin{aligned} अ^3 &= अ^{5-2} = अ^{-2} \\ अ^5 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{म्हणजे } &= \frac{1 \times अ \times अ}{1 \times अ \times अ \times अ \times अ \times अ \times अ} \\ &= \frac{1}{1 \times अ \times अ \times अ} = अ^{-3} = \frac{1}{अ^3} \dots (ग) \end{aligned}$$

ह्यावरून ऋण घातप्रकाशक याचा अर्थ असा होतो की घातप्रकाशक घन असतां जी संख्येचा घात होतो तो १ ह्या सव्येला भाजक आहे असा होतो.

३५. घातप्रकाशकाच्या गुणाकारानें विवक्षित संख्येच्या घाताचा घात होतो.

क्ष चा न घात करून जी संख्या येईल तिचा म घात करावयाचा असेल तर क्ष चा न म इतका घात करावा लागेल.

क्ष^न ही संख्या क्ष चा न घात आढे हिचा म घात (क्ष^न)^म हा होईल. ह्याचा अर्थ

$$(क्ष^n)^m = 1 \times क्ष^n \times क्ष^n \times क्ष^n \dots \text{इत्यादि म वेळां}$$

$$\text{म्हणून} = क्ष^n + न + न + \dots \dots \dots$$

$$= क्ष^{न \times म}.$$

$$\text{उपसिद्धांत (१)} \quad (क्ष^म)^न = क्ष^म \times न = क्ष^{म \times न} \dots \dots (न)$$

$$\text{उपसिद्धांत (२)} \quad (क्ष^n)^म = (क्ष^म)^न \dots \dots (क्ष)$$

३६. कोणत्या तरी एका अज्ञात संख्येचा अमुक संख्याक घात करून जी संख्या आली आढे ती दिली आढे, व जो घात केला तो घातप्रकाशक दिला आढे, तर ती मूळ अज्ञात संख्या ठरविणे ह्या कृत्याला 'मूळ काढणे' असें म्हणतात व त्या अज्ञात संख्येलाही दिलेल्या संख्येचें मूळ म्हणतात.

एक अज्ञात संख्या आढे, तिचा द्विघात केला तर ४९ ही संख्या येते, तर ती मूळ संख्या किती ? येथे द्विघात म्हणजे वर्ग केला आढे, आणि ४९ ही संख्या ७ चा वर्ग आढे म्हणून ४९ चें वर्गमूळ ७ ही संख्या आढे.

एका अज्ञात संख्येचा चतुर्घात केला असता ८१ ही संख्या येतं तर हिचें चतुर्घात मूळ कोणती संख्या येतें ? चतुर्घात म्हणजे २ × २ इतका घात अर्थात चतुर्घात मूळ म्हणजे वर्गमूळाचें वर्गमूळ. ८१ चें वर्गमूळ ९ आढे, आणि ९ चें वर्गमूळ ३ आढे म्हणून ८१ चें चतुर्घात मूळ ३ हे आढे.

३७. कोणत्याही संख्येचें मूळ काढणे हे कार्य दाखविण्यासाठी आणि त्या संख्येचे अमुक संख्याक मूळ काढावयाचे तो अक दाखविण्यासाठी एका चिन्हाची योजना केली आढे त्याच मूळचिन्ह म्हणतात, आणि ते √ असें लिहितात. नसेच ज्या संख्येइतके मूळ काढावयाचे असेल तो अक त्या चिन्हांत लिहितात. जसे ८१ ह्या संख्येचें 'चतुर्घात मूळ' √८१ असें दाखवितात.

म्हणजे ज्या संख्येचे मूळ काढायचे ती संख्या ह्या चिन्हाच्या उजवीकडे लिहून डावीकडच्या कोनभागात मूळ दर्शक अन् लिहितात. पण द्विघात म्हणजे वर्ग-दर्शक अंक २ हा कोनभागात लिहित नाहीत. जसे २५ ह्या संख्येचे वर्गमूळ ५ हे—

$$\sqrt{२५} = ५$$

३८. कोणत्याही संख्येचा म संख्याक घात करून आलेल्या संख्येचे न संख्याक मूळ काढिले तर जी संख्या येईल ती, पूर्व संख्येचे प्रथम न संख्याक मूळ काढून आलेल्या संख्येचा म घात केला अन्ता येणारा संख्येसंग्रह असे (८)

हा सिद्धांत बीजगणितातून याची दानविधायक मागे दाखविता जातो. —

$$\text{जसें—} \quad \sqrt[n]{(क्ष^म)} = (\sqrt[n]{क्ष})^म$$

एखाद्या संख्येचे विवक्षित संख्यांक मूळ काढून त्या मूळाचा त्याच मूळ सापेक्षता घात केला तर ती पूर्व संख्या येते. तसेच एखाद्या संख्येचा विवक्षित संख्याक घात करून आलेल्या संख्येचे त्याच घात सापेक्षतेत मूळ काढिले तर ती पूर्व संख्या येते. जसें २७ ह्या संख्येचा घनमूळाचा (३ ह्या संख्येचा) घन केला तर २७ हीच संख्या येते किंवा २५६ चे वर्गमूळ काढून त्याचा (१६ चा संख्येचा) वर्ग केला तर २५६ हीच संख्या येते. हा प्रत्यक्ष प्रमाणाचा आतारे धरता मिळालेला सिद्ध करिता येतो. तो असा—

$$\sqrt[n]{(क्ष^म)} = अम \text{ आहे असें घेतलें.}$$

दोन्ही पेटघांचा न घात केला तर डावीकडचे पद क्ष होईल वरचे प्रत्यक्ष प्रमाण

$$\text{तेव्हां} \quad क्ष^म = (अ^म)^न = (अ^n)^म \quad [\text{लेख ७}]$$

$$क्ष = अ^n$$

दोन्ही पेटघांचे न संख्याक मूळ काढिले तर,

$$\sqrt[n]{क्ष} = अ$$

दोन्ही पेटघांचा म घात केला तर,

$$(\sqrt[n]{क्ष})^म = अ^म$$

(२) अपूर्ण घात प्रकाशक असेल तर त्या अपूर्ण घातच्या छेदांकडूनके मूल काढा-
वयाचे आहे असा अर्थ होतो.

$$\begin{aligned} \text{म्हणजे } \quad \text{क्ष}^{\frac{3}{2}} &= \sqrt[3]{\text{क्ष}^4} \\ \text{क्ष}^{\frac{3}{4}} &= \sqrt[4]{\text{क्ष}^3} \\ \text{क्ष}^{\frac{1}{m}} &= \sqrt[m]{\text{क्ष}} \end{aligned}$$

आणि $\text{क्ष}^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{\text{क्ष}^n}$

१३. वरच्या मिथनेचा विशेष गुणामा याच्या उदाहरणावरून होईल.

(१) $२७^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(२७)^2} = (\sqrt[3]{२७})^2 = ३^2 = २४३.$

(२) $५१२^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(५१२)^2} = ८^2 = ६४.$

(३) $\sqrt[3]{(७)^2} = \sqrt[3]{(७)^6} = ७^2 = ७.$

(४) $५^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{५^2} = \sqrt[3]{३१२५}.$

१४. घातप्रकाशक ऋण असल्यास त्याचे कार्य कसे असते याचा गुणामा वरून
६ गिह्या ३ ग ने मागे कदा आहे. तेथे पूर्णांक घातप्रकाशक योजून मिळता कदा आण.
तीच अपूर्णांक घात प्रकाशकास ही योजण्यास योग्य आहे.

उदाहरणार्थ— $\text{क्ष}^{-\frac{g}{m}}$ हा राशी घ्या. ह्यास आपण $\text{क्ष}^{(p+\frac{g}{m})}$ ह्या राशीने
गुणिले :—

तेव्हा $\text{क्ष}^{p+\frac{g}{m}} \times \text{क्ष}^{-\frac{g}{m}} = \text{क्ष}^{p+\frac{g}{m}-\frac{g}{m}} = \text{क्ष}^p ;$

ह्या समीकरणास $\text{क्ष}^{\frac{g}{m}}$ ह्याच राशीने मागिले तेव्हा

$$\frac{\text{क्ष}^{p+\frac{g}{m}} \times \text{क्ष}^{-\frac{g}{m}}}{\text{क्ष}^{\frac{g}{m}}} = \frac{\text{क्ष}^p}{\text{क्ष}^{\frac{g}{m}} \times \text{क्ष}^{\frac{g}{m}}} = \frac{१}{\text{क्ष}^{\frac{g}{m}}}$$

ह्यावरून दिसून येते की, ऋण घातप्रकाशक असेल तर, तोच घातप्रकाशक
घन असता जो राशी होईल, ती सख्या १ ह्या सख्याच्या छेद लिहावयाचा असा

अर्थ होतो, म्हणजे अंशस्थानी १ व छेदस्थानी ती सख्या लिहून जो अपूर्णाक होईल तो त्या कृष्ण घातप्रकाशकांनी होणाऱ्या घाताची सख्या असते.

$$\text{उदाहरण—} 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} ; 2^{-3} = \frac{1}{2^3} ;$$

$$\frac{-3}{25} = \frac{1}{25^{\frac{3}{1}}} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}.$$

१५. (१) योग्यवादी सम्येचा ० घात केला तर कोणती सख्या येईल हें लक्षणावरून स्पष्ट होतं. धा ० घात म्हणजे १ ह्या सगळे धा क्षने ० वेळा मुणिले म्हणजे मुणिलेच नाही म्हणून धा^० = १ आहे. तसेच विज्ञानात ख प्रमाणे ० घात-प्रकाशकाचा अर्थ कळतो. उदाहरणार्थ धा^१ या राशीत धा^० = धा^{१-१} या राशीत भागिले तर

$$\frac{\text{धा}^1}{\text{धा}^1 \times \text{धा}^0} = \frac{\text{धा}^1}{\text{धा}^1} \quad \text{धा}^{1-1} = \text{धा}^0 = 1$$

(२) कोणत्याही सम्येचा १ घात म्हणजे तोच संख्या, हेही लक्षणावरून उघड आहे. १ ह्या संख्येला धा ने एक वेळच मुणले तर

$$1 \times \text{धा} = \text{धा}.$$

$$\text{तसेच मिद्धांतप्रमाणे } \text{धा}^1 \div \text{धा}^0 = \frac{\text{धा}}{\frac{\text{धा}}{\frac{\text{धा}}{\frac{\text{धा}}{\frac{\text{धा}}{\text{धा}}}}} = \text{धा}.$$

द्विपद राशीचा घात विस्तार

१६. घात मिद्धात हा या विषयातील बरे जे मिद्धात मिद्ध केले ते अनेक आहेत ती, त्यामध्ये ज्या राशीचा घात करावयाचा ना राशी किंवा ना संख्या एक पदान्मक होतो. आता आपण त्या एक पदाच्या ठिकाणी दोन पदे घेऊन त्या द्विपद राशीला शिष्टीकल्या सत्येच्या घात करावयाचा असतो जो असा पदान्मक राशी तयार होईल त्याच स्वरूप असते याचा विचार करू. द्विपद राशीचा घात जो तयार होईल त्या मध्ये गुणल पदे तयार होतात, त्या पदांचा जो समुदाय त्याच त्या द्विपद राशीचा घातविस्तार म्हणतात. ह्या घात विस्तारामध्ये जी नियमबद्धता आहे त्या बद्धतेचें स्वरूप आपणास ठरवावयाचें आहे.

१७. द्विपद मिद्धात —एका राशीत दोन पदे आहेत, त्या राशीचा पूर्ण, अपूर्ण, घात किंवा कृष्ण असा योग्यवादी सम्येइतका घात केला असता ना घातविस्तार कसा असतो हे ह्या मिद्धाताने मिद्ध केले आहे. 'द्विपद मिद्धात' हा शब्द पारिभाषिक आहे. याचा योगिक अर्थ दोन पदांचा मिद्धात असा प्रकारचा होईल, पण आम्हाला

हा अर्थ पुरेसा नाही. द्विपद राशीचा इष्ट संघेदनका घात केला अगता तो कशा प्रकारचा होतो हे ठरविणारा मिथ्या असा अर्थ आम्ही योजिला आहे. हा मिथ्या सिद्ध वारण्याच्या पद्धती अनेक आहेत, ह्या मिथ्यातच अंमल भावेनी क प्रथम न्यूनतम द्विपद मिथ्या असे म्हणू शकतो. (Binomial theorem 'This theorem was discovered by Newton') ह्या प्रथम ह्या मिथ्यांची मिथ्या सर ऐजाक न्यूनतम पद्धतीने नंतरचा अर्थ रीतीने केला आहे. आणि तो भारतीय गणकाना म्हणून समजण्यासारखा आहे. द्विपद राशीचा घातविस्तार केला असता त्या विस्तारात किती पदे उत्पन्न होतात, प्रत्येक पदासच प्रथम पदाचा घातप्रकाशक काढता येतो व द्वितीयपदाचा घातप्रकाशक काढता येतो, आणि प्रत्येक पदाचा 'गुण' काढता येतो ह्या गोष्टी सिद्ध करावयाच्या आहेत.

१८. (क्ष + अ) हा द्विपद राशी आहे. ह्या राशीचा आपणच घातविस्तार करावयाचा आहे. म्हणजे इच्छितल्या घातप्रकाशकाच्या घात काला जी पदमाला घेईल ती प्रत्यक्ष लिहावयाची आहे. चार ह्या जड्याची व्याख्या लेखक ३ मध्ये दिली आहे. प्रथम आणि पूर्ण आणि अपूर्ण घन असा घातप्रकाशक घेऊन तत्परिमित घात करू. घात करावयाचा म्हणजे १ ह्या सगळ्या (क्ष + अ) ह्या द्विपद राशीने घातप्रकाशकाने दर्शित संघेदनाच्या घेऊन गुणावयाचे आहे. हे गुणाकार आपण बीजगणिताच्या पद्धतीने करू. आणि घातप्रकाशक क्रमाने १, २, ३, ४, ५ हे क्रमाने घेऊं. गुणाकाराने जी पदमाला तयार होईल ती क्ष च्या उतरत्या घातावलीने आणि अ च्या चढत्या घातावलीने लिहू. ह्याप्रमाणे लिहिण्यास कोणतीही अडचण येत नाही. प्रत्यक्ष गुणाकाराने येणारा घातविस्तार खाली लिहिला आहे:—

$$(क्ष + अ)^1 = क्ष + अ.$$

$$(क्ष + अ)^2 = क्ष^2 + २ अक्ष + अ^2$$

$$(क्ष + अ)^3 = क्ष^3 + ३ अक्ष^2 + ३ अ^2क्ष + अ^3$$

$$(क्ष + अ)^4 = क्ष^4 + ४ अक्ष^3 + ६ अ^2क्ष^2 + ४ अ^3क्ष + अ^4$$

$$(क्ष + अ)^5 = क्ष^5 + ५ अक्ष^4 + १० अ^2क्ष^3 + १० अ^3क्ष^2 + ५ अ^4क्ष + अ^5$$

ह्या द्विपद राशीमध्ये क्ष आणि अ अशा दोन सख्या आहेत. त्या दोन्हीही घन आहेत. त्यांपैकी क्ष ह्या सगळ्या प्रथम सख्या आणि अ ह्या सगळ्या द्वितीय सख्या म्हणू. प्रत्येक घात विस्तारात जी पदे आली आहेत त्या पदांना डावीकडून क्रमाने

पहिलें पद दुसरे पद असें म्हणू. वरच्या घात विस्तारात जे नियम प्रत्येक घात प्रकाशकाच्या विस्तारास लागू आहेत ते खाली दिले आहेत :—

(१) द्विपद राशीच्या घात विस्तारात जी पद संख्या उत्पन्न होते ती, द्विपद राशीला जी घातप्रकाशक असेल त्यापेक्षा १ ने अधिक असते. घातप्रकाशक ४ असल्यास पद संख्या ५ असते, आणि घातप्रकाशक ९ असल्यास पद संख्या १० येते.

(२) द्विपद राशीच्या घात विस्तारात पहिले पद प्रथम सस्येचें म्हणजे क्ष चे असून त्याचा घातप्रकाशक द्विपद राशीच्या घात प्रकाशकाइतकाच (नोच) असतो. त्यात द्वितीय सस्येचा अवयव नसतो. आणि शेवटचें पद द्वितीय सस्येचें असून त्याचा घातप्रकाशक द्विपद राशीच्या घातप्रकाशकाइतकाच असतो व त्यात प्रथम सस्येचा अवयव नसतो.

(३) द्विपद राशीच्या घात विस्तारात पहिले आणि शेवटचें पद रेखीव असून मधल्या प्रत्येक पदात प्रथम सस्येचा व द्वितीय सस्येचा ह्या दोन्हीही अवयव असतात, आणि त्याच्या घातप्रकाशकाची बेरीज द्विपद राशीच्या घातप्रकाशकाइतकी असते.

(४) द्विपद राशीच्या घात विस्तारात प्रथम सस्येचा घातप्रकाशक प्रत्येक पदात एक, एक ह्या सस्येने कमी होत जातो, आणि द्वितीय सस्येचा घातप्रकाशक एक, एक ह्या सस्येने वाढत जातो.

(५) द्विपद राशीच्या घात विस्तारात पहिल्या पदाचा गुण (गुणक) १ असतो. इतर कोणत्याही पदाचा गुणक हा त्या पदापूर्वी जें पद असेल त्याचा गुणक, आणि त्याच पदातील प्रथम सस्येचा (क्ष चा) घातप्रकाशक याच्या गुणाकारास त्याच पदाच्या क्रमसस्येने भागून आलेल्या भागाकारावरोंवर असतो. जसे चतुर्घाताच्या घात विस्तारात तिसऱ्या म्हणजे अ^३ क्ष^२ यास गुणक आला तो, दुसऱ्या पदाचा गुणक ४ व क्ष ह्या प्रथम सस्येचा घातप्रकाशक ३ याच्या गुणाकारास पदक्रम २ ने भागून

$$\text{भागाकार} \frac{४ \times ३}{२} = ६ \text{ येतो तत्परिमित आहे.}$$

१९. वरच्या लेखात जे पांच नियम दिले आहेत ते प्रत्यक्ष सिद्ध आहेत. तथापि वरच्या नियमाधारे (क्ष - अ) ह्याच पदाचा पडघात करू. आणि वरच्या लेखांत ह्याच द्विपद राशीचा पडघात केलेला आहे त्यास (क्ष + अ) ह्याच द्विपद राशीने गुणू आणि दोन्ही पडघाताची तुलना करू. प्रथम नियमाधारे पडघात करू.

(१) पहिल्या नियमाप्रमाणें पडद्यात घातविस्तारात सात पदें निर्माण होतील.

(२) ह्या सात पदांपैकी पहिलें पद x^6 हे असेल.

(३) ह्या नियमाप्रमाणे दुसरें पदात x^5 असेल व दुसऱ्या सरूयेचा $6-5=1$ घात असेल म्हणजे दुसरे पदात x^5 हे अवयव आढेल. तिसरें पदांत ह्याप्रमाणेच अक्ष हे अवयव असतील. ह्याप्रमाणें गुणकाविरहित सर्व पदे खाली लिहिल्याप्रमाणें होतील :—

($x + a$)⁶ $x^6 + 6x^5a + 15x^4a^2 + 20x^3a^3 + 15x^2a^4 + 6xa^5 + a^6$
ह्या पदश्रेणीत प्रत्येक पदाचा गुणक तयार करून लिहिला म्हणजे घातविस्तार पूर्ण होईल. ते गुणक पांचव्या नियमाप्रमाणें येतील.

(४) पहिल्या पदाचा गुणक १ आढे आणि कोणत्याही पदाचा १ हा गुणक असतो म्हणून तो लिहिण्याची आवश्यकता नाही. पहिल्या पदाचा गुणक १ व ह्या पदात प्रथम सरूयेचा घातप्रकाशक ६ याचा गुणाकार ६ ह्याच भागाचे पद कम संख्या १ म्हणून

$$\text{दुसऱ्या पदाचा गुणक} = \frac{1 \times 6}{1} = 6.$$

$$\text{ह्याप्रमाणेच तिसऱ्या पदाचा गुणक} = \frac{1 \times 6}{1} \times \frac{5}{2} = \frac{6 \times 5}{1 \times 2} = 15$$

$$\text{तसेंच चवथ्या पदाचा गुणक} = \frac{6 \times 5}{1 \times 2} \times \frac{4}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3} = 20$$

$$\text{पांचव्या पदाचा गुणक} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 15$$

$$\text{सहाव्या पदाचा गुणक} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 6$$

$$\text{सातव्या पदाचा गुणक} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} = 1$$

एकंदर घातविस्तार खाली लिहिल्याप्रमाणे ($x + a$)⁶ $= x^6 + 6x^5a + 15x^4a^2 + 20x^3a^3 + 15x^2a^4 + 6xa^5 + a^6$.

आणि ($x + a$)⁶ ह्या घातविस्तारास प्रत्यक्ष ($x + a$) गुणिले तर गुणाकार ($x + a$)⁶ ह्याच घातविस्ताराबरोबर येतो. म्हणून वरचे पांच नियम निरपवाद आहेत. द्विपद सिद्धांताची जी ही सिद्धता केली ती शुद्ध आहे याचें प्रत्यक्ष सूक्ष्माक्ष गणिताधारें दिसून येतें.

२०. वरच्या घातविस्तारांत घातप्रकाशक व्यक्त मध्येने दाखविला आहे. तो सामान्य मध्येच्या ह्याने दाखविल्याने विस्ताराचे स्वरूप वरच्या पाच नियमाधारेन ठरविता येते, ते सामान्य स्वरूप असे द्विपद राशीने सामान्य स्वरूप (क्ष-अ)ⁿ हें घेऊ

ह्या घातविस्तारात पहिलें पद = क्षⁿ हें आहे.

दुसरे पद = १.न.अ.क्ष^{n-१}, तिसरे पद = $\frac{n(n-१)}{१.२}$ अ^२क्ष^(n-२),

चवथें पद = $\frac{n(n-१)(n-२)}{१.२.३}$ अ^३क्ष^(n-३)

ह्यावरून—

(क्ष-अ)ⁿ = क्षⁿ + न.अ.क्ष^{n-१} + $\frac{n(n-१)}{१.२}$ अ^२क्ष^{n-२}

+ $\frac{n(n-१)(n-२)}{१.२.३}$ अ^३क्ष^{n-३}, घातप्रकाशक आणि घन अमता ह्या

द्विपद सिद्धांत सिद्ध आहे.

२१. द्विपद राशीपैकी पहिली राशी १ ही मर्यादा असलेक तर, त्या घातविस्ताराचे स्वरूप याची शिष्टाप्रमाणे होईल. व हें वरच्या पाच नियमाधारेच सिद्ध होते. प्रथम संख्या १ असल्यामुळे विविधित पदानां पत्रिकेला मध्येच्या घातप्रकाशक किती ह्या समजणार नाही, कारण १ ह्या संख्येचा कोणताही घात केला तरी तो १ ह्या संख्यात्मकच असतो परंतु विविधित पदी द्वितीय मध्येच्या घातप्रकाशक समजतो आणि नियम ३ प्रमाणें प्रथम संख्या क्ष हिचाहि कळतो.

वरच्या दिवातीक विस्तारात क्ष = १ मानिता तर त्याचे स्वरूप याची निहिल्या-प्रमाणें—

(१×अ)ⁿ = १ + न.अ + $\frac{n(n-१)}{१.२}$ अ^२ +

$\frac{n(n-१)(n-२)}{१.२.३}$ अ^३ +

२२. वरचा २१ व्या लेगातील समीकरणांत अजर ऋण असेल तर अच्चा त्रिपद घाताची (२ नीत भागल्या जाणाऱ्या) पदे ऋण व इतर म्हणजे सम घाताची पदे धन असतात. दोन्ही पदे ऋण असली तरी ह्याच नियमाप्रमाणे घनर्ग पदाचा गुणाकार ह्या नियमाप्रमाणे पदाना वित्ते धन किंवा ऋण अशी येतात. त्यांचा घातप्रकाशक व गुण गाढ्या चिन्हाची काही मर्यादनाही.

२३. द्विपद राशीचा घातविस्तार करवयाचा श्रमना, द्विपद राशीला जी घातप्रकाशक असतो तो पूर्ण मर्यादक आणि रत अनन्त घातविस्ताराचे स्वरूप कसे येते हे लेख १८ मधील पाच नियमांनी स्थापित केले. आता आपण असे सिद्ध करू की, द्विपद राशीचा घातप्रकाशक अपूर्ण मर्यादक असता किंवा ऋण असता ही घातविस्ताराचे स्वरूप त्याच पाच नियमांनी स्थापित होती. ही सिद्धता आपणाम घात सिद्धांत आणि प्रत्यक्ष कृति याच्या आधारे करिता येते. म्हणजे द्विपद राशीच्या अनेक घातांचा गुणाकार आगाकार यामुळे येणारा नवीन घातप्रकाशक ह्याने त्याच द्विपद राशीच्या वरच्या पाच नियमांनी घातविस्तार केला असता त्याच येणारी पदे ह्याशी, त्याच द्विपद राशीच्या प्रत्येक घातप्रकाशकाने जो घात विस्तार येईल त्याचा प्रत्यक्ष गुणाकार आगाकार केला असता जी पदे येतील, त्यांचे एकलत्व असेल तर तो सिद्धांत सिद्ध आहे असे स्थापित होते. ही सिद्धता खाली करून दाखविणे आहे

२४. एकाच द्विपद राशीचे $(क्ष+अ)^n$ आणि $(क्ष-अ)^n$ असे दोन घात आहेत. याचा आपण गुणाकार करू, आणि तो गुणाकार घात सिद्धांतप्रमाणे कसा होतो हे पहा—

$$(क्ष+अ)^n \times (क्ष+अ)^{\frac{1}{n}} = (क्ष+अ)^{n+\frac{1}{n}}$$

ह्या तीव्ही घाताचा घातविस्तार ह्याच्या पाच नियमांनी घातविस्तार करू.

$$(क्ष+अ)^n = क्ष^n + नअक्ष^{n-1} + \frac{n(n-1)}{१.२} अ^२क्ष^{n-२} + \dots (१)$$

$$(क्ष+अ)^{\frac{1}{n}} = क्ष^{\frac{1}{n}} + \frac{१}{n} अक्ष^{\frac{1}{n}-१} + \frac{\frac{1}{n}(\frac{1}{n}-१)}{१.२} अ^२क्ष^{\frac{1}{n}-२} + \dots (२).$$

समीकरण (१) व (२) यांचा गुणाकार केला, तेव्हा—

$$\begin{aligned}
 & (\text{क्ष} + \text{अ})^{\frac{n}{2} + \frac{1}{2}} = \text{क्ष}^{\frac{n}{2} + \frac{1}{2}} + (\text{क्ष} + \frac{1}{\text{क्ष}})^{\frac{n}{2} + \frac{1}{2}} \text{अक्ष}^{\frac{n}{2} + \frac{1}{2}} \\
 & + \frac{(\frac{n-1}{2})(\frac{n}{2} + \frac{1}{2})}{1 \cdot 2} \text{अक्ष}^{\frac{n}{2} + \frac{1}{2}} + \dots (३).
 \end{aligned}$$

हा गुणाकार येतो आणि $(\text{क्ष} + \text{अ})$ चा $\frac{1}{2}$ हा घातप्रकाशक येऊन पाच नियमाप्रमाणे घातविस्तार केला तर त्याच्या प्रत्येक पदाचे स्वरूप समीकरण (३) मधील प्रत्येक पदाच्या स्वरूपाशी एकरूप आहे. म्हणून समीकरण (२) मध्ये आ आपण $\frac{1}{2}$ हा अपूर्ण घातप्रकाशक घेऊन आणि त्याचा घातविस्तार केला तो बरोबर आहे.

२५. अपूर्ण घातप्रकाशक असता द्विपद सिद्धान्ताची मिद्धता केली तशीच ऋण घात प्रकाशकाची सिद्धता करूं.

एकाच राशीचे $(\text{क्ष} + \text{अ})^{\frac{n}{2}} \times (\text{क्ष} + \text{अ})^{\frac{-n}{2}}$ याचा गुणाकार $(\text{क्ष} + \text{अ})^0$ म्हणजे १ ही संख्या आहे. आता दोन्ही घातांचा घातविस्तार करून त्याचा गुणाकारही जर एक आला तर घातविस्ताराचे पाच नियमांही सिद्ध आणि ऋण घातप्रकाशक असला तरी द्विपद सिद्धांत मिद्ध असे स्थापित होईल. यास्तव तो गुणाकार करूं.

$$\begin{aligned}
 (\text{क्ष} + \text{अ})^{\frac{n}{2}} &= \text{क्ष}^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{1} \text{अक्ष}^{\frac{n}{2}-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \text{अक्ष}^{\frac{n}{2}-2} \\
 &+ \dots (१)
 \end{aligned}$$

$$(\text{क्ष} + \text{अ})^{\frac{-n}{2}} = \text{क्ष}^{\frac{-n}{2}} - \frac{n}{1} \text{अक्ष}^{\frac{-n}{2}-1} +$$

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \text{अक्ष}^{\frac{-n}{2}-2} + \dots (२).$$

$$(\text{क्ष} + \text{अ})^0 = \text{पहिले पद} + \text{दुसरे पद} + \text{तिमरे पद} + \dots (३).$$

समीकरण (३) मधील प्रत्येक पदाची किंमत काढू.

$$\text{पहिले पद} = \text{क्ष}^{\text{न}} \times \text{क्ष}^{-\text{न}} = \text{क्ष}^{\text{न}-\text{न}} = \text{क्ष}^0 = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{दुसरे पद} &= + \text{नअक्ष}^{\text{न}-1} \times \text{क्ष}^{-\text{न}} - \text{नअक्ष}^{\text{न}-1} \times \text{क्ष}^{\text{न}} \\ &= + \text{नअक्ष}^{-1} - \text{नअक्ष}^{-1} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{तिसरे पद} &= + \frac{\text{न}^2 - \text{न}}{1 \cdot 2} \text{अ}^2 \text{क्ष}^{\text{न}-2} \times \text{क्ष}^{-\text{न}} - \text{न}^2 \text{अ}^2 \text{क्ष}^{-2} \\ &\quad + \frac{+ \text{न}^2 + \text{न}}{1 \cdot 2} \text{अ}^2 \text{क्ष}^{-\text{न}-2} \times \text{क्ष}^{\text{न}} \\ &= + \frac{\text{न}^2 - \text{न}}{1 \cdot 2} \text{अ}^2 \text{क्ष}^{-2} - \text{न}^2 \text{अ}^2 \text{क्ष}^{-2} + \frac{\text{न}^2 + \text{न}}{1 \cdot 2} \text{अ}^2 \text{क्ष}^{-2} \\ &= \left(\frac{\text{न}^2 - \text{न}}{1 \cdot 2} - \text{न}^2 + \frac{\text{न}^2 + \text{न}}{1 \cdot 2} \right) \text{अ}^2 \text{क्ष}^{-2} = 0. \end{aligned}$$

ह्यावरून उघड सिद्ध होते की, घातप्रकाशक ऋण असला तरी द्विपद सिद्धांताचा घातविस्तार नियमपंचकाने बरोबर होतो.

२६. ऋण घातप्रकाशकाने द्विपद राशीचा घातविस्तार नियम पंचकाने बरोबर येतो त्याची आणखी एक सिद्धता खाली देतो—

$$\begin{aligned} (1 + \text{क्ष})^{\text{म}} &\div (1 + \text{क्ष})^{\text{म}+1} = (1 + \text{क्ष})^{\text{म}-\text{म}-1} = (1 + \text{क्ष})^{-1} \\ (1 + \text{क्ष})^{\text{म}} &= 1 + \text{मक्ष} + \frac{\text{म}(\text{म}-1)}{1 \cdot 2} \text{क्ष}^2 + \frac{\text{म}(\text{म}-1)(\text{म}-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \text{क्ष}^3 \dots (1) \\ (1 + \text{क्ष})^{\text{म}+1} &= 1 + (\text{म}+1) \text{क्ष} + \frac{(\text{म}+1)(\text{म})}{1 \cdot 2} \text{क्ष}^2 \\ &\quad + \frac{(\text{म}+1)(\text{म})(\text{म}-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \text{क्ष}^3 \dots (2) \end{aligned}$$

(१) ह्या समीकरणाम (२) ह्या समीकरणानें भागिलें. ह्या भागाकार दाखविण्याकरिता भागाकारातील पद व बाकी ह्याप्रमाणे प्रत्येक पद लिहूं आणि संतरे भागाकार लिहूं.

$$(\text{पहिलें पद})^2 (\text{भागाकार})^1 = १$$

$$\text{बाकी} = -\text{क्ष} - \text{मक्ष}^2 - (३\text{म}^2 - ३\text{म})\text{क्ष}^2$$

$$\text{भागाकार दुसरें पद} = -\text{क्ष}$$

$$\text{बाकी} = +\text{क्ष}^2 + \text{मक्ष}^2.$$

$$\text{भागाकार तिसरें पद} = +\text{क्ष}^2$$

$$\text{बाकी} = -\text{क्ष}^3$$

$$\text{भागाकार चवथें पद} = -\text{क्ष}^3$$

$$\text{भागाकार} = १ - \text{क्ष} + \text{क्ष}^2 - \text{क्ष}^3 + \text{इत्यादि}.$$

$$\text{आता } (१ + \text{क्ष})^2 = (१ + \text{क्ष})^2 = १ - \text{क्ष} + \text{क्ष}^2 - \text{क्ष}^3 + \text{इत्यादि}.$$

ह्यावरून घातप्रकाशक ऋण असताहि द्विपद सिद्धात सिद्ध आहे.

घातांक

२७. विवक्षित संख्येचा कोणत्या संख्येइतका घात करावा म्हणजे घात करून आलेली संख्या दिलेल्या संख्येबरोबर होईल, त्या घात दाखविणाऱ्या संख्येचा त्या दिलेल्या संख्येचा घातांक म्हणतात आणि त्या विवक्षित संख्येचा त्या घातांकाचा पाया म्हणतात.

जसे ३ ह्या संख्येचा कोणता घात करावा म्हणजे घात करून आलेली संख्या ८१ होईल ? यादिकाणी ३ ह्या संख्येचा ४ घात करावा लागतो, म्हणून ४ ह्या संख्येचा ८१ ह्या संख्येचा घातांक म्हणतात आणि ह्या घातांकाचा पाया ३ ही संख्या होते. ह्यावरून सामान्यत्वे १ ह्या विवक्षित संख्येचा घ घात केला असता स ही संख्या येते. येथे स ह्या संख्येचा १ ह्या पायावरील घ हा घातांक आहे. याच समीकरण खाली लिहिल्याप्रमाणें दाखविता येते :—

$$१^घ = स$$

२८. वरच्या समीकरणांतील १ आणि घ ह्या दोन संख्या दिल्या असता स ही संख्या कशी करिता येईल याचा विचार घात कार्यात येतो. त्याबद्दल विचार ह्याच प्रकरणांत केला, जसे $१ = (१ + फ)$ मानिला तर

$$स = (१ + फ)^घ = १ + घफ + \frac{घ(घ-१)}{१ \cdot २} फ^२$$

ह्याप्रमाणें स ची किमत कळून येते. ह्याप्रमाणेंच स आणि घ ह्या दोन संख्या दिल्या तर प ची किमत बशी ठरविता येईल हाच विचार त्या घान कार्यातच येतो. तो असा—

$$प घ = स$$

घ संख्यांक मूळ काढिलें तर

$$प = \sqrt[घ]{स} = स^{\frac{1}{घ}}$$

परंतु स आणि प ह्या संख्या दिल्या असता घ ही संख्या कमी प्राप्त होईल हा विचार येथे करावयाचा आहे.

२९. वर दिलेल्या

$$प घ = स$$

ह्या समीकरणान प चा घ घान केन्हा तर स हा संख्या येते. ह्या निराशी आपले अव्यक्त पद घ आठे आणि प स ह्या व्यक्त संख्या आहेत. तेव्हा ह्या अव्यक्त पदांचे समीकरण खालच्या पद्धतीने लिहितात :—

$$घ = घातांक प पायावरील स संख्येने.$$

उच्चत्या वाजुकरिलेलेच सक्षे घात ग म्हणजे घा प स ह्या निम्ही आक्षेपानी दाखवावयाचे असा संकेत आहे, याच संक्षेप असण (पाया दाखविणारे) प हे चालत्या आक्षेप न लिहिता किंविन सक्षे लिहितात त्याप्रमाणे घाताकाचे स्थान याही लिहिल्याप्रमाणे असते :—

$$घ = घा_प स किंवा घा_प स = घ.$$

आणि हेच समीकरण ग्वाली दाखविल्याप्रमाणे घान प्रकाशक स्वरूपाचेही लिहितात, जसे—

$$स = प^{(घा_प स)}$$

३०. (१) कोणत्याही पायावरील १ ह्या संख्येचा घातांक ० असतो. कारण
 $\text{घा}_\text{प} = \text{घ ह्यांस घात स्वरूपात मांडले तर}$

$$\text{प}^\text{घ} = \text{स}$$

$$\text{ह्यांत स} = १ \text{ तर घ} = ०.$$

(२) कोणत्याही संख्येचा त्याच पायावरील (म्हणजे तीच संख्या पाया असतो) घातांक एक ही संख्या म्हणजे १ असतो.

$$\text{कारण घा}_\text{प} = १ \text{ कारण प}^१ = \text{प}$$

$$\text{किंवा प}^\text{घ} = \text{प तर घ} = १.$$

३१. एकाच संख्येच्या भिन्न पायावरील घातांकाचा अर्थान्वय सवध.

क्ष = $\text{घा}_\text{अ}$ म आणि य = $\text{घा}_\text{ब}$ म ह्या दोन्ही समीकरणांमध्ये म ह्या एकाच संख्येचे अ आणि य ह्या भिन्न पायावरील घातांक अनुक्रमे अ आणि य हे आहेत. याचा एकमेकांशी कसा संबंध आहे ते पाहू.

दरची समीकरणे घात प्रकाशक पद्धतीने लिहिली तेव्हा

$$\text{अ}^\text{क्ष} = \text{म आणि ब}^\text{य} = \text{म}$$

$$\text{ह्यावरून अ}^\text{क्ष} = \text{ब}^\text{य} \dots\dots\dots (१)$$

(१) म या समीकरणाचे प्रथम य संख्याक मूळ काढिले आणि नंतर क्ष संख्याक मूळ काढिले तर

$$\frac{\text{क्ष}}{\text{य}} = \text{ब; आणि ब}^\frac{\text{य}}{\text{क्ष}} = \text{अ}$$

$$\text{म्हणजे अ ह्या पायावरील अ संख्येचा घातांक घा}_\text{अ}^\text{ब} = \frac{\text{क्ष}}{\text{य}} \dots\dots\dots (२).$$

$$\text{आणि ब ह्या पायावरील अ संख्येचा घातांक घा}_\text{ब}^\text{अ} = \frac{\text{य}}{\text{क्ष}} \dots\dots\dots (३).$$

$$\text{म्हणून क्ष} = \text{य (घा}_\text{अ}^\text{ब}) = \frac{\text{य}}{\text{घा}_\text{ब}^\text{अ}} \dots\dots\dots (४)$$

$$\text{किंवा य} = \text{क्ष (घा}_\text{ब}^\text{अ}) = \frac{\text{क्ष}}{\text{घा}_\text{अ}^\text{ब}} \dots\dots\dots (५)$$

(२) व (३) यांचा गुणाकार केला तर

$$\frac{\text{घा}_\text{अ} \text{ब} \times \text{घा}_\text{ब} \text{अ}}{\text{क्ष} \times \text{य}} = १.....(६)$$

३२. वरच्या लेखातील सिद्धांताच्या गटाच्याने कोणत्याही सहाय्याचा गका पायावरील घातांक समजला तर त्याच्या गुणा किंवा भाजक सरकार करून तो दुसऱ्या इच्छित पायावरील करिता येतो.

जसे म ह्या सहाय्याचे अ ह्या पायावरील घातांक क्ष हा समजला. परंतु आपणाव व ह्या पायावरील य हा घातांक पाहिले तर क्ष ह्या घातांकाला एका गुणकाने गुणावे लागते तो गुणक असा की "नव्या पायावरील जुन्या पायाचा घातांक" हा होय. किंवा भाजकाने भागावे लागते. तो भाजक असा की, "जुन्या पायावरील नव्या पायाचा घातांक".

३३. (१) एकाच पायावरील दोन सहाय्यांच्या घातांकांची बेरीज त्याच सहाय्याच्या गुणाकाराच्या घातांकाबरोबर असते. (२) एकाच पायावरील भाज्याच्या घातांकानून भाजकाचा घातांक वजा केला असता जी बाकी राहिल ती भाज्याकाराच्या घातांकाबरोबर असते.

(१) म आणि न ह्या दोन सहाय्या आहेत, त्यांचे अ ह्या पायावरील घातांक अनुक्रमे क्ष आणि य हे आहेत तर म न ह्या गुणाकाराचा अ याच पायावरील घातांक क्ष + य हा असतो.

$$\text{जसे } \text{घा}_\text{अ} \text{म} = \text{क्ष आणि घा}_\text{अ} \text{न} = \text{य}$$

$$\text{तर } \text{घा}_\text{अ} (\text{म} \times \text{न}) = \text{क्ष} + \text{य}.$$

$$= \text{घा}_\text{अ} \text{म} + \text{घा}_\text{अ} \text{न} \quad (१)$$

लेखन घातप्रकाशक पद्धतीने लिहिले तर

$$\text{अ}^\text{क्ष} = \text{म आणि अ}^\text{य} = \text{न}$$

$$\text{तेव्हां म न} = \text{अ}^\text{क्ष} \times \text{अ}^\text{य} = \text{अ}^{\text{क्ष} + \text{य}}$$

$$\text{म्हणून } \text{घा}_\text{अ} (\text{म} \times \text{न}) = \text{क्ष} + \text{य} = \text{घा}_\text{अ} \text{म} + \text{घा}_\text{अ} \text{न}.$$

$$(२) \text{ आणि } \frac{म}{न} = अ^क्ष \div अ^य = अ^{क्ष-य}$$

$$\text{म्हणून घा}_अ \left(\frac{म}{न} \right) = क्ष - य = घा_म - घा_अन. \quad (२)$$

३४. विवक्षित पायावरील, एखाद्या संख्येचा इष्ट संख्यांक घात करून आलेल्या संख्येचा घातांक हा, जो घात केला असेल तो घातप्रकाशक आणि त्या मूळ संख्येचा त्याच पायावरील घातांक ह्याच्या गुणाकारावरील असतो.

$$\text{जसें } घा_अ (म^n) = य \text{ आणि } घा_अ म = क्ष$$

$$\text{तर } य = न क्ष$$

लेखन घातप्रकाशक पद्धतीने लिहिलें तर

$$अ^य = म^n \text{ आणि } अ^क्ष = म$$

$$अ^{क्ष} = म \text{ ह्या समीकरणाच्या दोन्ही पेट्याचा न घात केला}$$

$$\text{तेव्हां } \left(\frac{क्ष}{अ} \right)^न = म^n = अ^n क्ष$$

$$\text{म्हणून } घा_अ (म^n) = नक्ष = न \times घा_अ म$$

ह्या सिद्धान्ताने न च्या जागी $\frac{१}{न}$ घेतला तर वरच्या सिद्धान्ताचें स्वरूप खाली दिल्याप्रमाणें होईल :—

विवक्षित पायावरील एखाद्या संख्येचे इष्ट संख्यांक मूळ वाढून आलेल्या संख्येचा घातांक हा, जे मूळ वाढिले असेल त्या मूळदर्याक अकाने, त्या पूर्वे संख्येच्या त्याच पायावरील घातांकम भागून आलेल्या भागाकारावरील असतो.

$$\text{म्हणजे } (अ^क्ष)^{\frac{१}{न}} = \frac{१}{म^n} = अ^{\frac{१}{न} क्ष}$$

$$\text{म्हणून } घा_अ \left(\frac{१}{म^n} \right) = \frac{१}{न} क्ष = \frac{१}{न} घा_अ म.$$

३५. माथ्याचे घातांक तयार करण्यास वरच्या सिद्धान्ताची आवश्यकता आहे, यास्तव त्या सिद्धान्ताचे विवरण व सिद्धान्त खाली देत आहे. हे सिद्धान्त नुसते घातांकाच्या उपयोगी आहेत असे नाही. ग्रहगति सिद्धान्तातील सिद्धान्त सिद्ध करण्यास

त्याची आवश्यकता आहे. त्यापैकीच घातप्रकाशक सिद्धांत हा एक आहे त्याची सिद्धता खाली देत आहे पण ती सिद्धता देण्यापूर्वी एक सहाय्यभूत असा सोपा सिद्धांत येथे देतो. तो असा—

गुणकसाम्यपदमाला—एकाच अव्यक्त पदाच्या दोन पदमाला आहेत. अव्यक्त पदाची किंमत कोणतीही असली तरी ह्या पदमाला समान असतील तर त्या अव्यक्ताच्या कोणत्याही एकाच घाताने दर्शित दोन्ही पदमालातील पदांचे गुणक समान असतात. जसें

$$y = a + kx + cx^2 + dx^3 + tx^4 + \dots \dots \dots (१)$$

$$\text{आणि } y = \text{७} + \text{१२}x + \text{३}x^2 + \text{७}x^3 + \text{१६}x^4 + \dots \dots \dots (२)$$

अशा दोन पदमाला आहेत. यातील x ची कोणतीही किंमत असली तरी वरच्या सर्व पदांची किंमत जी y मर्यादा ती खालच्या सर्व पदांच्या किंमतीबरोबर असेल तर x च्या ० घाताचे गुणक समान असतील म्हणजे $a = ७$, x चे गुणक समान म्हणजे $k = १२$ इत्यादि.

समीकरण (१) मधून समीकरण (२) वजा केले तेव्हा

$$0 = (a - ७) + (k - १२)x + (c - ३)x^2 + (d - ७)x^3 + \dots \dots (३)$$

ह्यामध्ये $x = ०$ असेल तर

$$a - ७ = ० \text{ म्हणून } a = ७.$$

आता समीकरण (३) चे स्वरूप.

$$0 = (k - १२)x + (c - ३)x^2 + (d - ७)x^3 + \dots \dots \dots (४)$$

होहि समीकरणे x च्या कोणत्याही किंमतीविषयी खरे आहे म्हणून समीकरण (४) हे x ने भागितले तर

$$0 = (k - १२) + (c - ३)x + (d - ७)x^2$$

ह्यामध्ये $x = ०$ असला तर

$$k - १२ = ० \text{ म्हणून } k = १२$$

ह्याप्रमाणे प्रत्येक पदाचे गुणक समान असतात.

घातप्रकाशक सिद्धांत

३६. अ ही कोणती तरी संख्या आहे. तिचा क्ष ह्या कोणत्या तरी संख्ये-
इतका घात करावयाचा आहे. तो अ^{क्ष} असा आपण म्हणू. येथे आम्हास
अ^{क्ष} ह्याची किंमत अ संख्या आणि क्ष संख्या यांच्याच पदावलीने समजावी अशी
इच्छा आहे. याकरिता असे करूं की अ ही एक पदात्मक संख्या आहे, ती
 $\left\{ 1 + (अ - 1) \right\}$ ह्या स्वरूपाची द्विपदात्मक घेऊ आणि द्विपद सिद्धांतप्रमाणे
घातविस्तार करू. तेव्हा

$$अ^क्ष = \left\{ 1 + (अ - 1) \right\}^क्ष$$

ह्यात लेखन सौकर्याकरिता $(अ - 1) = ब$ घेऊं

$$\text{तेव्हां } अ^क्ष = (1 + ब)^क्ष$$

$$\begin{aligned} (1 + ब)^क्ष &= 1 + क्षब + \frac{क्ष(क्ष-1)}{1 \cdot 2} ब^2 + \frac{क्ष(क्ष-1)(क्ष-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} ब^3 \\ &+ \frac{क्ष(क्ष-1)(क्ष-2)(क्ष-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} ब^4 \\ &+ \frac{क्ष(क्ष-1)(क्ष-2)(क्ष-3)(क्ष-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} ब^5. \end{aligned}$$

हा घातविस्तार ब ह्या संख्येच्या चढत्या घातावलीचा आहे, तो आम्हास
क्ष च्या चढत्या घातावलीचा पाहिजे आहे यास्तव ब च्या पदांना क्ष च्या अवयव
रूपाने गुणक आहेत ते पद रूपाने केले—

$$\begin{aligned} (1 + ब)^क्ष &= 1 + क्षब + \frac{क्ष^2 - क्ष}{1 \cdot 2} ब^2 + \frac{क्ष^3 - 3क्ष^2 + 2क्ष}{1 \cdot 2 \cdot 3} ब^3 \\ &+ \frac{क्ष^4 - 6क्ष^3 + 11क्ष^2 - 6क्ष}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} ब^4 + \text{इत्यादि.} \end{aligned}$$

तेव्हां

$$\begin{aligned} अ^क्ष &= 1 + क्ष(ब - \frac{1}{2}ब^2 + \frac{1}{3}ब^3 - \frac{1}{4}ब^4 + \frac{1}{5}ब^5 - \dots) \\ &+ क्ष^2(\frac{1}{2}ब^2 - \frac{1}{3}ब^3 + \frac{1}{4}ब^4 - \frac{1}{5}ब^5 + \dots) \\ &+ क्ष^3(\frac{1}{6}ब^3 - \frac{1}{4}ब^4 + \frac{1}{12}ब^5 - \dots) \end{aligned}$$

ह्या सारणीत क्ष ची किंमत कोणतीही असली तरी क्ष च्या १, २, ३ इत्यादि घातांचे गुणक वरचेच येतील. ह्या गुणकाची किंमत व वर अवलंबून राहील. हे गुणक आपण k_1, k_2, k_3 ह्या अक्षरांनी दाखवू तेव्हा सारणीचे स्वरूप.

$$अक्ष = १ + k_1 क्ष + k_2 क्ष^२ + k_3 क्ष^३ + k_4 क्ष^४ + \dots$$

k_1, k_2, k_3 ह्या गुणकांचा एकमेकांशी संबंध आहे.

$$k_1 = v \left(१ - \frac{१}{२} v + \frac{१}{३} v^२ - \frac{१}{४} v^३ + \frac{१}{५} v^४ - \dots \right)$$

ह्या वरोवरीचा वर्ग करून २ नी भागिले तर

$$\begin{aligned} \frac{k_1^२}{२} &= v^२ \left(१ - v + \frac{१}{३} v^२ - \frac{१}{४} v^३ + \dots \right) \times \frac{१}{२} \\ &= \left(\frac{१}{२} v^२ - \frac{१}{२} v^३ + \frac{१}{४} v^४ - \frac{१}{३} v^५ + \dots \right) \end{aligned}$$

पण हा गुणाकार करून आलेली श्रेणी k_2 म्हणजे क्ष^२ ला जो गुणक आहे त्यावरोबर आहे म्हणजे

$$\frac{k_1^२}{२} = k_2.$$

ह्याप्रमाणे $k_1 \times k_2$ याचा गुणाकार करून ३ नी भागिले तर k_3 ची किंमत येते, $k_1 \times k_3$ ह्यास ४ नी भागिले तर k_4 ची किंमत येते.

$$\text{म्हणजे } \frac{१}{२} k_1 \times k_1 = k_2 = \frac{१}{२} k_1^२$$

$$\frac{१}{३} k_1 \times k_2 = k_3 = \frac{१}{३} k_1 \times \frac{१}{२} k_1^२ = \frac{१}{२ \cdot ३} k_1^३$$

$$\frac{१}{४} k_1 \times k_3 = k_4 = \frac{१}{४} k_1 \times \frac{१}{२ \cdot ३} k_1^३ = \frac{१}{२ \cdot ३ \cdot ४} k_1^४$$

क्रमिक संख्याचा गुणाकार दाखविण्याची एक साकेतिक रीति आहे. ती अशी की, क्रमिक संख्यांपैकी शेवटच्या संख्येपूर्वी \perp असे चिन्ह करून त्या चिन्हात तो शेवटचा अंक लिहितात, जसे

$$१ \cdot २ \quad = \perp ३ ; \quad १ \cdot २ \cdot ३ \quad = \perp ४ ;$$

$$१ \cdot २ \cdot ३ \cdot ४ \quad = \perp ५ ; \quad १ \cdot २ \cdot ३ \cdot ४ \cdot ५ \quad = \perp ६ \text{ इत्यादि.}$$

ह्याप्रमाणे

$$अ^{\text{क्ष}} = 1 + क, \text{क्ष} + \frac{क,^2}{1^2} \text{क्ष}^2 + \frac{क,^3}{1^3} \text{क्ष}^3 + \frac{क,^4}{1^4} \text{क्ष}^4 + \dots$$

हे समीकरण क्ष व्या कोणत्याही किमतीविरयी खरे आहे. ह्या समीकरणास घातप्रकाशक मिळाले म्हणतात.

ह्या समीकरणात क्ष ची किंमत $\frac{1}{क_1}$ ही घेतली तर

$$\frac{1}{अक_1} = 1 + 1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^3} + \frac{1}{1^4} + \dots$$

ही सारणी आपण e ह्या अक्षराने दाखवू म्हणजे

$$\frac{1}{अक} = e = 1 + 1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^3} + \frac{1}{1^4} + \dots$$

३७. जर जी e सराची श्रेणी मिळवेली ती अन्य प्रयोगांमधील मिळू करिता येते. तो प्रकार असा ; $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n \text{ क्ष}}$ ह्याचा द्विपद शिद्धांताप्रमाणे घात विस्तार केला.

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n \text{ क्ष}} &= 1 + n \text{ क्ष} \frac{1}{n} + \frac{n \text{ क्ष} (n \text{ क्ष} - 1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{n^2} \\ &+ \frac{n \text{ क्ष} (n \text{ क्ष} - 1) (n \text{ क्ष} - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{1}{n^3} + \dots \\ &= 1 + \text{क्ष} + \frac{1}{2} \text{क्ष}^2 \left(1 - \frac{1}{n \text{ क्ष}}\right) \\ &+ \frac{1}{6} \text{क्ष}^3 \left(1 - \frac{1}{n \text{ क्ष}}\right) \left(1 - \frac{2}{n \text{ क्ष}}\right) \\ &+ \dots \end{aligned}$$

ह्या घात विस्तारातील n ही संख्या अभ्यास मंडी मानिली

तेव्हा $\frac{1}{n} = 0$ म्हणून

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n \text{ क्ष}} = 1 + \text{क्ष} + \frac{\text{क्ष}^2}{2} + \frac{\text{क्ष}^3}{6} + \dots$$

हचा धेणीतील क्ष ही संख्या १ मानिली तर.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^3} + \dots$$

३८. वर सिद्ध केलेली जी ही e संख्या स्थीर आहे तिची किंमत ९ दशांश स्थलापर्यंत २.७१८२८१८२८ ही आहे. हचा मध्येमध्ये असा धर्म आहे की हिचा जो घात करावयाचा असेल तो घातविस्तार घातप्रकाशनाच्या श्रेणीत तयार होतो असे

$$e^{\text{क्ष}} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}^{\text{क्ष}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n \text{ क्ष}}$$

$$= 1 + \text{क्ष} + \frac{\text{क्ष}^2}{1^2} + \frac{\text{क्ष}^3}{1^3} + \dots$$

संख्याचे घातांक तयार करून जी कोष्टके बनलेली आहेत ती तयार करण्याचे साधन ही e संख्या आहे. घातांक तयार करण्याकरिता जी समीकरण सिद्ध केली आहेत ती खालच्या लेखांत दाखविली आहेत.

३९. लेख ३, ६ मध्ये दाखविलेले आहे की

$$a^{k_1} = e \quad \text{यावरून}$$

$$a = e^{k_1}$$

$$\text{म्हणून } \text{घा} e^a = k_1$$

$$a^{\text{क्ष}} = e^{k_1 \text{ क्ष}} = 1 + k_1 \text{ क्ष} + \frac{k_1^2}{1^2} \text{ क्ष}^2 + \frac{k_1^3}{1^3} \text{ क्ष}^3 +$$

$$a^{\text{क्ष}} = 1 + (\text{घा} e^a) \text{ क्ष} + \frac{1}{1^2} (\text{घा} e^a)^2 \text{ क्ष}^2 +$$

$$\frac{1}{1^3} (\text{घा} e^a)^3 \text{ क्ष}^3 + \dots$$

$$\text{तसेच } k_1 = b - \frac{1}{3}b^3 + \frac{1}{5}b^5 - \frac{1}{7}b^7 + \dots$$

$$\text{आणि } a = 1 + b$$

$$\text{म्हणून } \text{घा} e^a = \text{घा} e(1+b) = k_1$$

$$\text{तेव्हा } \text{घा} e(1+b) = b - \frac{1}{3}b^3 + \frac{1}{5}b^5 - \frac{1}{7}b^7 + \dots$$

इत्यादि.

ब च्या ठिकाणी — ब लिहिला तर

$$\text{घा} e(1-b) = -b - \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{5}b^5 - \frac{1}{7}b^7 - \dots$$

इत्यादि.

४०. वरच्या लेखात घातांकाची जी दोन समीकरणे सिद्ध केली त्यांच्याच सहाय्याने घातांकाची उत्पत्ति होऊन ते व्यवहारात आले आहे. आणि वरच्या विवरणांत कळून आले आहे की, ह्या घातांकाच्या समीकरणास आधार घातप्रकाशक मिद्धाताचा आहे. वरची घातांकांची दोन समीकरणे येथे पुनः लिहून त्यांच्या सहाय्याने दुसरी अनेक समीकरणे सिद्ध होतात ती दाखवित आहे. ह्या समीकरणाचा उपयोग कृति मुलभ व्हावी ह्याकडे होतो. ही सर्व समीकरणे खाली दिल्याप्रमाणे :—

$$४१. \varphi_e(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 - \dots (1)$$

$$\varphi_e(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{120}x^5 - \dots (2)$$

$$\varphi_e\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \varphi_e(1+x) - \varphi_e(1-x) \text{ लेख समीकरण (२)}$$

समी. (१) मधून समी. (२) वजा केलें तर

$$\varphi_e\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \varphi_e(1-x) = 2\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + \dots\right) \dots (३)$$

ह्या समीकरणात $x = \frac{m-n}{m+n}$ ही किंमत घेऊन समीकरणात दिव्हाली,

$$\begin{aligned} \frac{1+x}{1-x} &= \left(1 + \frac{m-n}{m+n}\right) \therefore \left(1 - \frac{m-n}{m+n}\right) \\ &= \frac{2m}{m+n} \times \frac{m+n}{2n} = \frac{m}{n} \end{aligned}$$

$$\varphi_e\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \varphi_e\left(\frac{m}{n}\right) = \varphi_e(1-x) - \varphi_e\left(\frac{m}{n}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{म्हणून } \varphi_e\left(\frac{m}{n}\right) &= 2\left\{\frac{m-n}{m+n} - \frac{1}{6}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5 - \dots\right\} \dots (४) \end{aligned}$$

$n = १$ मानिला तर

$$\varphi_e m = 2\left\{\frac{m-1}{m+1} + \frac{1}{6}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^5 + \dots\right\} \dots (५)$$

समीकरण (४) मध्ये $m = n + १$ मानिला तर $\frac{m-n}{m+n} = \frac{१}{२n+१}$

$$\begin{aligned} \varphi_e\left(\frac{n+१}{n}\right) &= \varphi_e(n+१) - \varphi_e n \\ &= 2\left\{\frac{१}{२n+१} + \frac{1}{6}\left(\frac{१}{२n+१}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(\frac{१}{२n+१}\right)^5 + \dots\right\} \dots (६) \end{aligned}$$

घातांक कोष्टक रचना

४२. घातांकसंबंधी मिथ्य झालेले सिद्धान्त वरच्या लेखान दिले आहेत. ह्या सिद्धान्ताच्या महायथाने घातांक कोष्टक कसे तयार केले याची माहिती देणे आवश्यक आहे. ती सर्व माहिती येथे देण्याचे प्रयोजन नाही कारण तो स्वतंत्र विषय असून त्यावर सर्विस्तर विवरणाचा ग्रंथ पाहिजे. त्या ग्रंथाची रूपरेषा कशी असावी हेच येथे दाखवित आहे.

४३. लेख ४१ मधील समीकरण ६ च्या महायथाने १, २, ३ इत्यादि क्रमिक संख्यांचे e ह्या पायावरील घातांक शोधिता येतात.

जसे $n = १$ मानिला तर

$$\begin{aligned} \text{घा}_e २ - \text{घा}_e १ &= २ \left\{ \frac{१}{३} + \frac{१}{३(३)^१} + \frac{१}{५(३)^५} + \dots \right\} \\ &= .६९३१४७१७९. \end{aligned}$$

आणि $\text{घा}_e १ = ०$.

म्हणून $\text{घा}_e २ = .६९३१४७१७९$.

समीकरण (६) मध्ये $n = २$ मानिले तर

$$\begin{aligned} \text{घा}_e ३ - \text{घा}_e २ &= २ \left\{ \frac{१}{५} + \frac{१}{३(५)^१} + \frac{१}{५(५)^५} + \dots \right\} \\ &= .४०५४६५११९. \end{aligned}$$

$+ \text{घा}_e २ = .६९३१४७१७९$.

$\text{घा}_e ३ = १.०९८६१२२९८$.

$२ \text{ घा}_e ३ = \text{घा}_e ९ = २.१९७२२४५९६$.

समीकरण (६) मध्ये $n = ९$ मानिले तर

$$\begin{aligned} \text{घा}_e १० - \text{घा}_e ९ &= २ \left\{ \frac{१}{१९} + \frac{१}{३} \left(\frac{१}{१९} \right)^१ + \frac{१}{५} \left(\frac{१}{१९} \right)^५ + \dots \right\} \\ &= .१०५३६०५१५. \end{aligned}$$

$+ \text{घा}_e ९ = २.१९७२२४५९६$.

$\text{घा}_e १० = २.३०२५८५१११$.

४४. व्यवहारात आपण ज्या संख्या वापरितो त्या दशगुणोत्तर पद्धतीच्या आहेत. याकरिता आपणास व्यवहारांत ज्या घाताकाचा उपयोग करावयाचा ते घाताक १० ह्या पायावरीलच पाहिजे आहेत. ह्याकरिता वर जे घाताक तयार केले त्याप्रमाणे प्रत्येक आवश्यक संख्येचा घाताक e ह्या पायावरच तयार करून ते १० ह्या पायावरचे घनवाक्ये लागतात. ते घनविण्याची कृति लेख ३१'३२ वरून ठरली आहे. ३ ह्या संख्येचा e ह्या पायावरील घाताक तयार केला पण आपणास पाहिजे १० ह्या पायावरील याकरिता त्यास e ह्या पायावरील १० ह्या संख्येचा घाताक तयार करून त्याने भागिले पाहिजे. हा भाजक खाली दिल्याप्रमाणे आहे. हा भाजक म्हणजे e ह्या पायावरील १० चा घाताक २.३०२५८५१११ हा होय. मिया

$$\frac{1}{2.302585111} = .434294481.$$

ह्यावरून स्पष्ट आहे की e ह्या पायावरील इष्ट संख्येचा घातांक काढून त्यास $.434294481$ ने गुणावे म्हणजे तो घाताक १० ह्या पायावरील होतो. ह्याप्रमाणे संख्यांचे घाताक तयार करून त्यांचे कोष्टक तयार केले असते.

प्रकरण चवथें

गणितशास्त्रांतील मुख्य सिद्धांत

सरलरेखा त्रिकोणमिति

४५. त्रिकोणमिति हा शुद्धगणिताचा एक भाग आहे. त्रिकोणमितीचा विषय हा अत्यंत महत्त्वाचा आहे. गणितशास्त्र महासागरातील ही नौका आहे आणि ज्योतिर्गणिताचा हा प्राण आहे. त्रिकोणमितीत त्रिकोणाच्या बाजू आणि कोन ह्यांच्यामध्ये असलेल्या संबंधाचा, तसेच सामान्यतः सरलरेखा कोनाचे मापनाचा विचार केलेला असतो. त्रिकोणमितीचे तीन भाग होताना, पहिल्या भागात सरल रेखात्रिकोणाचा विचार केलेला असतो. दुसऱ्या भागात गोलाच्या पृष्ठावरील त्रिकोणाचा विचार केलेला असतो आणि तिसऱ्या भागात ज्या आणि चाप यांच्या अन्योन्य संबंधाचा विचार असतो. ह्यांपैकी तिसऱ्या भागातील विषयाचा समावेश मुख्यत्वे पहिल्याच भागात केला जातो.

४६. कोन आणि त्याच्या बाजू यांचा एकत्रित विचार करण्यास त्रिकोण हीच आकृति योग्य आहे. त्यातून काटकोन त्रिकोणच उपयोगी आहे कारण काटकोन त्रिकोणाच्या बाजूचा एकमेकीशी असलेला संबंध भूमितीमध्ये मिद्ध झाला आहे. काटकोन त्रिकोणाचा एक कोन काटकोन असल्यामुळे इतर दोन कोनांची वेरीज एक काटकोन असते. काटकोना समोरील बाजू एक रेखापार्श्वमाण म्हटले तर इतर दोन बाजूंच्या लांब्या त्याच रेखा परिमाणाने ठरतात, त्या ज्या मळ्या येतात त्या दोंरींमधो एकीला भुजज्या व दुसरीला कोभुजज्या असे म्हणतात

४७. त्रिकोणमिति हा विषय महत्त्वाचा असून फार मोठा आहे. यासाठी ह्या ग्रंथात तो विषय नितका विस्तृत असा आणता येत नाही. त्यातील मिद्धात सक्षेपेकरून येथे दाखविले आहेत. व्यवहारात कोन हा अश कला विवला यानी दाखविला मापिला जातो. परंतु शास्त्रीय विचारान तो सरळ आणि बक्ष रेपेनेहि मापण्याची पद्धति आहे. कित्येक प्रसंगी एकादा कोन मोजावयाचा असतो तो कोन एखाद्या त्रिकोणाचा होईल असा त्रिकोण घेऊन त्या कोनाचें मापन, त्या त्रिकोणाच्या बाजू मोजून ठरवाचें लागते. तसेच एखादा कोन वर्तुळ मध्याशी होईल असे वर्तुळ काढून त्या वर्तुळाची त्रिज्या आणि त्या कोना समोरील वर्तुळाचा कम याच्या लांबशा विभक्षित रेखा परिमाणानें मोजून त्याचें जें गुणोत्तर होईल त्यानें तो कोन मापितात.

४८. एकाच वर्तुळातील मध्यकोण ज्या कंसावर असतात त्या कंसाच्या लांबीशी ते प्रमाणान असतात, असा भूमितीचा सिद्धान आहे. ह्या सिद्धान्ताच्या आधारेने

वर्तुळ परीधाच्या भागानें कोन मापिता येतो. सर्व परीध ह्याच्यावर म्हणजे मध्यबिंदूशी ४ काटकोनांचा किंवा ३६० अंशाचा कोन असतो. $\frac{1}{2}$ परीधावर १८० अंशांचा आणि $\frac{1}{3}$ परिधावर ९० अंशाचा कोन असतो. यावरून कंसाने कोन मापिता येतो. कंसाने कोन मापण्यासबंधी एक नवीन माप स्वीकारले आहे त्याला 'वृत्तपरिमाण' हें नांव ठेविले आहे. उगा कंसाची लांबी त्रिज्येइतकी आहे त्या कंसावरचा मध्यकोन १ माप आहे असें म्हणतात. वर्तुळाचा परीध त्रिज्येच्या २π इतक्या पटीबरोबर असतो म्हणून तो कोन वृत्तपरिमाणाने २π इतकी मापें असतो. वर्तुळाचा परीध व्यासाच्या π इतक्या पटीबरोबर म्हणजे ३.१४१५९२६५ ह्या संज्येइतक्या पटीबरोबर असतो आणि त्रिज्येच्या $२ \times \pi = ६.२८३१८५३०$ म्हणजे ३६० अंशांचा कोन ६.२८३१८५३०

इतकी मापें असतो. तेव्हां वृत्तपरिमाण हें माप $\frac{३६०}{६.२८३१८५३०}$

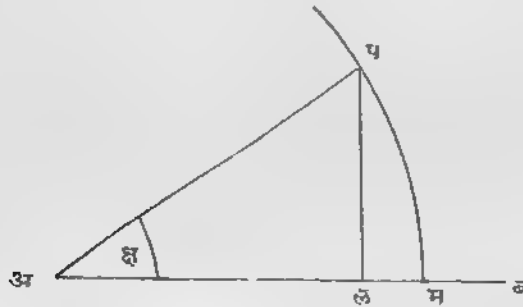
$= ५७.२९५७७९५$ अंशांचे आहे,

तसेच १ वृत्तपरिमाण $= ३४३७.७४६७७०८$ कलांचे आहे,

$= २०६२६४.८०६२४७१$ विकलांचे आहे.

कोनाची भुज्यादि गुणोत्तरे

४९. कोन केवढाही असो त्याचें मापन प्रत्यक्ष असें बहुधा करिता येत नाही. यंत्रामध्ये कोणमापक असतात, पण सर्वत्र कोनाचे मापन रेपेनेच करावे लागते, यास्तव तो कोन काटकोन त्रिकोणात घेऊन त्याचा भुज, किंवा कोटि मोजून त्या कोनाचे मापन करतात. भुज आणि कोटि तसेच कर्ण यांची लक्षणे सर्वश्रुत आहेत. तीच खाली दिलेल्या आकृतीत घेतली आहेत.



ह्या आकृतीत व अ प हा एक कोन आहे आणि तो क्ष अक्षराने दाखविला आहे. क्ष कोनाच्या अ प बाजूतील प बिंदू पासून अ व वर प ल लव केला आहे. म्हणून अ ल प हा काटकोन त्रिकोण झाला आहे. ह्या काटकोन त्रिकोणाचा अ प हा कर्ण आहे, प ल हा भुज आहे, आणि अ ल हा कोटि आहे. अ प, प ल आणि अ ल ह्या तिन्ही रेषा एकाच रेषा परिमाणाने मोजल्या आहेत. तेव्हा व अ प कोनाची गुणोत्तरे खाली लिहिल्याप्रमाणे होतील :—

व अ प हा कोन ३० अंशाचा आहे आणि अ प ल कोन ६० अंशाचा आहे. अर्थात् अ प ल त्रिकोण समभुज त्रिकोणाचे अर्थ आहे आणि त्यामुळे प ल बाजू ही अ प च्या $\frac{१}{२}$ आहे, आणि अ ल बाजू ही अ प च्या $\sqrt{\frac{३}{४}}$ किंवा $\frac{\sqrt{३}}{२}$ आहे. कारण (अ प)^२ = (प ल)^२ + (अ ल)^२ ह्यावरून ३० अंशाच्या क्ष कोनाची गुणोत्तरे कशी होतात पहा.

$\frac{\text{प ल}}{\text{अ प}} = \frac{\text{भुज}}{\text{कर्ण}}$ ह्याला क्ष कोनाची भुजज्या म्हणतात. ती $\frac{१}{२}$ आहे.

$\frac{\text{अ ल}}{\text{अ प}} = \frac{\text{कोटि}}{\text{कर्ण}}$ ह्याला क्ष कोनाची कोभुजज्या म्हणतात. ती $\frac{\sqrt{३}}{२}$ आहे.

$\frac{\text{प ल}}{\text{अ ल}} = \frac{\text{भुज}}{\text{कोटि}}$ ह्याला क्ष कोनाची स्पर्शरेषा म्हणतात. ती $\frac{१}{\sqrt{३}}$ आहे.

$\frac{\text{अ ल}}{\text{प ल}} = \frac{\text{कोटि}}{\text{भुज}}$ ह्याला क्ष कोनाची कोस्पर्शरेषा म्हणतात. ती $\sqrt{३}$ आहे.

$\frac{\text{अ प}}{\text{अ ल}} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{कोटि}}$ ह्याला क्ष कोनाची छेदनरेषा म्हणतात. ती $\frac{२}{\sqrt{३}}$ आहे.

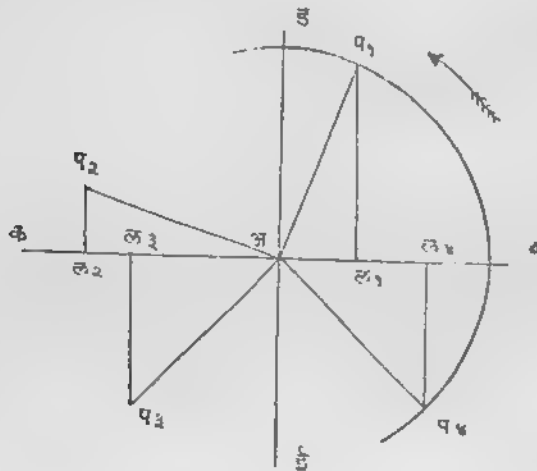
$\frac{\text{अ प}}{\text{प ल}} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{भुज}}$ ह्याला क्ष कोनाची कोछेदनरेषा म्हणतात. ती २ आहे.

आणि कोभुजज्या (कोणत्याहि कोनाची) १ ह्या संस्थेनून वजा केली तर राहणाऱ्या बाकीला त्या कोनाचा शर म्हणतात. भुजज्यादि नावे लेखन सीकर्याकरिता नेहमी संक्षिप्त रीतीने लिहावी लागतात. ती संक्षिप्त पद्धति खाली दाखविली आहे :—

क्ष कोनाची भुजज्या भुक्ष ;	क्ष कोनाची कोभुजज्या कोभुक्ष ;
” ” स्पर्शरेषा स्पर्क्ष ;	” ” कोस्पर्शरेषा कोस्पर्क्ष ;
” ” छेदनरेषा छेक्ष ;	” ” कोछेदनरेषा कोछेक्ष.

५०. वरच्या लेखांत दाखविलेला क्ष कोन काटकोन त्रिकोणाचा, काटकोना-
खेरीज असलेला, अर्थात् ९० अंशापेक्षां कमी असा आहे. हा कोन घेऊन भुजग्यादि
गुणोत्तरांच्या व्याख्या दाखविल्या आहेत. त्यावरून ९० अंशापेक्षा जास्त अंशाच्या
कोनाच्या भुजग्यादि व्याख्या लक्षात येत नाहीत. याकारिता त्या लक्षणांमध्ये
काही भेद ठेविला आहे त्याचें स्पष्टीकरण केले पाहिजे. तसेच कोन निरनिराळे
असून भुजग्यादि गुणोत्तरें सारखी दिसतात. ह्याचेंहि स्पष्टीकरण दिले पाहिजे.
ह्या गोष्टीचा खुलासा खालच्या लेखात केला आहे.

५१. कव ही एक अमर्याद स्थीर रेखा आहे आणि निच्यामध्ये अ हा एक स्थीर
बिंदु आहे. दुमरी रेखा चल आहे तिचें एक टोक अ बिंदुशी स्थीर आहे ह्या चल
रेषेचें दुमरे टोक, प बिंदु आहे. जेव्हा अप चल रेखा अवधी मिळून जात म्हणजे
दोहीची दिशा अव ही एकच होते तेव्हा अव, अप यांच्या मध्ये कोन ० अंशाचा होतो.
अप रेखा अव च्या वरच्या अगम फिरेल तर होमारा कोन धन (+) समजावा,
आणि खालच्या अगला फिरेल तर होमारा कोन ऋण (-) समजावा असा संकेत
आहे. तसेच अव रेखा किंवा अमर्याद सर्व व क रेखा हिच्यावर प बिंदुपासून टाकलेला
पल लंब कव च्या वरच्या अगम असेल तर तो लंब किंवा भुज धन समजावा, आणि
पल लंब किंवा भुज कव च्या खालच्या अगम असला तर तो ऋण समजावा असा
संकेत आहे. तसेच अल कोटि अ पासून व कडे (उजव्या हाताकडे) असेल तर
तो धन आणि अ पासून क कडे (डाव्या हाताकडे) असेल तर तो ऋण समजावा
असाही संकेत आहे.



५२. भुज कोटि हा पाद कोन विकोणाच्या बाजूला लावण्याची पद्धति आहे. परंतु त्यांची अर्थमर्यादा वाढवून त्यांची लिहिल्याप्रमाणे त्या घटकाचे अर्थ मानिते आहेत. भ्रमण करणाऱ्या अप रेयेच्या पटोकापासून कब वर टाकलेल्या पल लबास भुज, आणि तो लंब कब ला ज्या बिंदुन मिळेल त्या बिंदुने अपासून जे अल अंतर त्याला कोटि म्हणतात. ह्या मुलाभावस्त लक्षांत घेईल की, लेख ४९ मध्ये दिलेल्या व्याख्या वाणत्याहि कोनास लागू आहेत. ३६० अंशाचे म्हणजे एका भ्रमणाचे चार समान भाग म्हणून त्या प्रत्येक भागाम 'पाद' ही मज्जा दिश्टी आहे. विवक्षित कोन असल्या पादी आहे असे म्हणण्याची पद्धति आहे. व अप, कोन ९० अंशापर्यंत असेल तर तो कोन पहिले पादी आहे असे म्हणतात. कोन ९० अंशापेक्षा जास्त आणि १८० अंशापर्यंत असेल तर तो कोन दुसरे पादी आहे असे म्हणतात. ह्या प्रमाणेच १८० अंशापासून २७० अंशापर्यंत असलेल्या कोनास तृतीय पादी आणि २७० ते ३६० अंशापर्यंत असलेल्या कोनास चतुर्थ पादी असलेला कोन असे म्हणतात. प्रथम पादी कोन असता भुज प, ल, घन आहे आणि कोटि अल, हाही घनच आहे म्हणून ह्या पादातील भुज्यादि महाही गुणोत्तरे घन आहेत. विवेक लक्षांत देण्याची गोष्ट अशी ही, अप ही चळ रेपा कोणत्याहि पादान असो ती घनच सम-जावी. दुसऱ्या पादान व अप, हा कोन आहे ह्या कोनाचा भुज प, ल, हा आहे. हा भुज घनच आहे परंतु अल, हा कोटि ऋण आहे. यामुळे दुसऱ्या पादी कोन असता भुज्या आणि कोटिदत्तरेपा ही दोन गुणोत्तरे घन असतात आणि राहिलेली चार गुणोत्तरे ऋण असतात. तिसरे पादी असलेल्या व चवथ्या पादी असलेल्या कोनास वटिर्वक्तोत म्हटले आहे. तिसऱ्या पादी व अप, हा कोन आहे. ह्या कोनाचा भुज प, ल, हा ऋण आहे आणि अल, हा कोटिही ऋणच आहे म्हणून ह्या तिसरें पादी अनशाच्या कोनाची स्पर्शरेषा आणि कोरपदरेषा ही दोन गुणोत्तरे घन असतात आणि बाकीची ऋण असतात. चवथे पादी व अप, हा कोन आहे ह्याचा भुज प, ल, हा ऋण आहे, परंतु कोटि अल, हा घन आहे म्हणून चौथ्यापादी आणि टिदनरेषा ही दोन गुणोत्तरे घन असून बाकी ऋण असतात.

५३. कोन घन असता त्याची भुज्यादि गुणोत्तरे प्रत्येक पादान कशी घनर्ण असतात ह्याचें स्पष्टीकरण वरच्या लेखात केले आहे. तसेच कोन कोणत्याही पादी असता त्या कोनाचे भुज कोटि कोणते, आणि ते कोणत्या पादी घन आणि कोणत्या पादी ऋण असतात याचेही स्पष्टीकरण केले. आता कोन ऋण असला तर त्याची गुणोत्तरे कशी असतात याचा खुलासा करावयाचा आहे. हा खुलासा, तो ऋण कोन प्रत्येक पादान असता त्याचे भुज कोटि घनर्ण जसे असतील त्याप्रमाणे भुज्यादि घनर्ण होतील. ह्या पद्धतीने ऋण कोनांची गुणोत्तरे कशी घनर्ण असतात हे सहज समजून येईल. असे ऋण ६० अंशाचा कोन हा चवथ्या पादी

असणार त्याचा भुज ऋण कोटि घन असतो त्याप्रमाणे गुणोत्तर घनर्ग असणार. अ ही कोनाची अंश सध्या आहे, आणि ती ० अशापासून ३६० अंशापर्यंत कोणती तरी आहे. पण ही ऋण सध्या आहे. तेव्हा अधिक वन अ अंशाच्या गुणोत्तराने ऋण अ कोनाची गुणोत्तरे खाली दाखविली आहेत :—

$$\text{भु} \quad (—\text{अ}) = — \text{भुअ}, \quad \text{कोस्प} \quad (—\text{अ}) = — \text{कोस्पअ},$$

$$\text{कोभु} \quad (—\text{अ}) = + \text{कोभुअ}, \quad \text{छे} \quad (—\text{अ}) = + \text{छेअ},$$

$$\text{स्प} \quad (—\text{अ}) = — \text{स्पअ}, \quad \text{कोछे} \quad (—\text{अ}) = — \text{कोछेअ}.$$

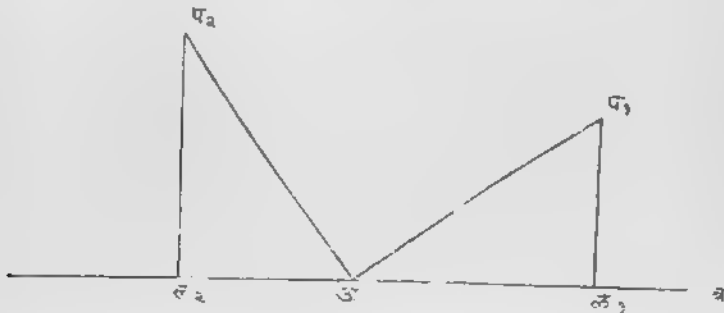
५४. ज्या दोन कोनांची बेरीज ९० अंश असते त्या दोन कोनांम एकमेकांचे कोटिकोन म्हणतात. त्याच्या भुजज्यादि गुणोत्तराचा संबंध खाली लिहिल्याप्रमाणे असतो. जसे अ कोन आणि (९०—अ) कोन हे एकमेकांचे कोटिकोन आहेत, तेव्हा—

$$\text{भुअ} = \text{कोभु} (९०—\text{अ}); \quad \text{कोभुअ} = \text{भु} (९०—\text{अ});$$

$$\text{स्पअ} = \text{कोस्प} (९०—\text{अ}); \quad \text{कोस्पअ} = \text{स्प} (९०—\text{अ});$$

$$\text{छेअ} = \text{कोछे} (९०—\text{अ}); \quad \text{कोछेअ} = \text{छे} (९०—\text{अ}).$$

५५. विवक्षित कोन आणि त्रिभाधिक तीव्र कोन यांच्या भुजज्यादि गुणोत्तराचा अन्योन्य संबंध. विवक्षित कोन अ अशाचा आहे, आणि त्रिभाधिक अ कोन म्हणजे (९० अंश + अ) याच्या भुजज्यादिकांच्या अन्योन्य संबंध ठरवावयाचा.



अप ही भ्रमण करणारी रेखा आहे. हिने वअप, कोन केला आहे. अप रेपेने आणखी ९० अथ भ्रमण केल्याने अप रेखा अप, ह्या स्थितीत आली आहे. प,ल, प,ल, हे लंब कोटिले. अप,ल, हा काटकोनत्रिकोण अप,ल, काटकोनत्रिकोणाशी एकरूप आहे. आणि

$$\text{वअप, हा कोन} = \text{वअप, कोन} + ९० = अ + ९०^{\circ}$$

$$\text{मु}(९०^{\circ} + अ) = \frac{\text{प,ल,}}{\text{अप,}} = \frac{\text{अल,}}{\text{अप,}} = \text{कोभुअ,}$$

$$\text{— कोभु } ९०^{\circ} + अ) = \frac{-\text{अल,}}{\text{अप,}} = \frac{\text{प,ल,}}{\text{अप,}} = \text{सुअ,}$$

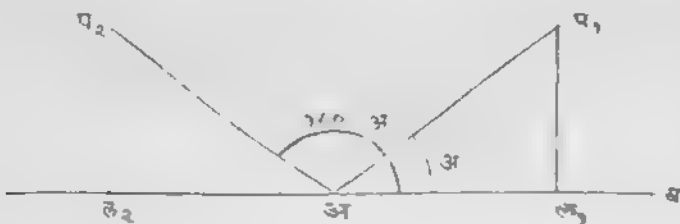
$$\text{— स्प } (९०^{\circ} + अ) = \frac{\text{प,ल,}}{-\text{अल,}} = \frac{-\text{अल,}}{\text{प,ल,}} = \text{कोस्पअ,}$$

$$\text{— कोस्प}(९०^{\circ} + अ) = \frac{-\text{अल,}}{\text{प,ल,}} = \frac{\text{प,ल,}}{-\text{अल,}} = \text{स्पअ,}$$

$$\text{— छे } (९०^{\circ} + अ) = \frac{\text{अप,}}{-\text{अल,}} = \frac{-\text{अप,}}{\text{प,ल,}} = \text{कोछेअ,}$$

$$\text{कोछे } (९०^{\circ} + अ) = \frac{\text{अप,}}{\text{प,ल,}} = \frac{\text{अप,}}{\text{प,ल,}} = \text{छेअ.}$$

५६. विवक्षित कोन आणि त्याचा पूरक कोन यांच्या भुज्यादि गुणोत्तराचा अन्योन्य संबंध. विवक्षित कोन $(१८० - अ)$ अंगाचा आहे आणि त्याचा पूरक कोन अ अंगाचा आहे, तर ह्या कोनांच्या भुज्यादि गुणोत्तराचा अन्योन्य संबंध ठरवावयाचा.



अप_१ हा विवक्षित कोन आहे. आणि प_१अल_१ हा त्याचा पूरक कोन आहे. पण हा अब रेणूला आरंभ करून मापिलेला नाही. यास्तव अल_१ बरोबर अल_२ रेखा केली, ल_१ पासून अब वर लंब केला, आणि तो ल_२प_१ बरोबर करून अप_१ माथले तेव्हा प_१अल_१ हा त्रिकोण प_१अल_१ याची एकरूप झाला. म्हणून प_१अल_१ हा कोन अ कोनाबरोबर आहे. ह्यावरून—

$$\text{भु (१८०° — अ)} = \frac{\text{प_१ल_१}}{\text{अप_१}} = \frac{\text{प_१ल_१}}{\text{अप_१}} = \text{भुअ,}$$

$$\text{—कोभु (१८०° — अ) = } \frac{\text{—अल_१}}{\text{अप_१}} = \frac{\text{अल_१}}{\text{अप_१}} = \text{कोभुअ,}$$

$$\text{—स्प (१८०° — अ) = } \frac{\text{प_१ल_१}}{\text{—अल_१}} = \frac{\text{प_१ल_१}}{\text{अल_१}} = \text{स्पअ,}$$

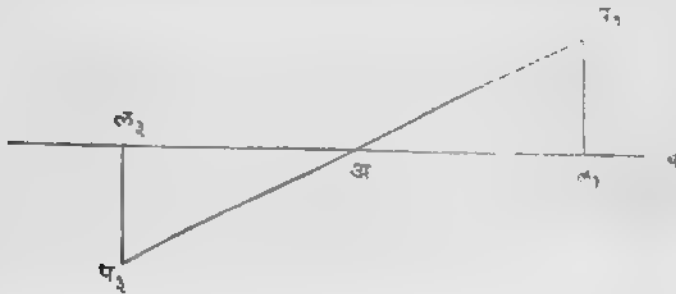
$$\text{—कोस्प (१८०° — अ) = } \frac{\text{—अल_१}}{\text{प_१ल_१}} = \frac{\text{अल_१}}{\text{प_१ल_१}} = \text{कोस्पअ,}$$

$$\text{—छे (१८०° — अ) = } \frac{\text{अप_१}}{\text{—अल_१}} = \frac{\text{अप_१}}{\text{अल_१}} = \text{छेअ,}$$

$$\text{कोछे (१८०° — अ) = } \frac{\text{अप_१}}{\text{प_१ल_१}} = \frac{\text{अप_१}}{\text{प_१ल_१}} = \text{कोछेअ.}$$

यावरून पाहता त्रिकोणादि कोन आणि त्याचा पूरककोन यांच्या भुज्यादि गुणांतराच्या केवळ सख्या समान असतात, आणि भुज्या आणि कोछेइतरेषा यांची चिन्हे ही एकच असतात, परंतु इतर गुणोत्तरांची चिन्हे भिन्न असतात.

५७. विवक्षित कोन आणि पडभाधिक तोंच कोन यांच्या भुज्यादि गुणोत्तराचा अन्योन्य संबंध. विवक्षित कोन अ अशाचा आहे, आणि पडभाधिक तोंच कोन (१८०° — अ) इतक्या अशाचा आहे याच्या भुज्यादिवाचा अन्योन्य संबंध.



अप_१ हा विवक्षित म्हणजे अक्षरेखा अ अक्षाचा कोन आहे, आता अप_१ ती भ्रमण वारणारी रेखा अप_१ पासून १८०° भ्रमण करून अप_२ ह्या स्थितीत आहे तर व अप_२ हा पडभाषिक अ अक्षाचा कोन आहे. तेव्हां

$$— भु (१८०° अ) = \frac{प_१ ल_१}{अप_१} = \frac{प_१ ल_१}{अप_१} = भुअ$$

$$— कोभु (१८०° अ) = \frac{—अल_१}{अप_१} = \frac{अल_१}{अप_१} = कोभुअ$$

$$स्प (१८०° — अ) = \frac{—प_१ ल_१}{—अल_१} = \frac{प_१ ल_१}{अल_१} = स्पअ$$

$$.. कोस्प (१८०° — अ) = \frac{—अल_१}{—प_१ ल_१} = \frac{अल_१}{प_१ ल_१} = कोस्पअ$$

$$— छे (१८०° अ) = \frac{अप_१}{—अल_१} = \frac{अप_१}{अल_१} = छेअ$$

$$— कोछे (१८०° — अ) = \frac{अप_१}{प_१ ल_१} = \frac{अप_१}{प_१ ल_१} = कोछेअ.$$

१८. भुज्यादि गुणधर्मना लक्षणावरून काढा सिद्धांत सिद्ध होतात ते खाली दिल्याप्रमाणे :—

$$अमु \times कोछेअ = १ \quad (१), \quad स्पअ \times कोस्पअ = १ \quad (२),$$

$$कोभुअ \times छेअ = १ \quad (३), \quad भुअ \times कोभुअ = स्पअ \quad (४),$$

$$कोछेअ \div छेअ = कोस्पअ \quad (५).$$

तसेच अप_१ ल_१ हा काटकोन त्रिकोण आहे म्हणून

$$भुज^२ + कोटि^२ = कर्ण^२$$

ह्या सिद्धांतावरून खालचे सिद्धांत सिद्ध होतात :—

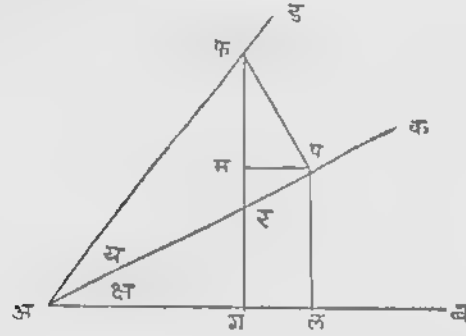
$$भुअ + कामुअ = १ \quad (६),$$

$$१ + कोस्पअ = कोछेअ \quad (७),$$

$$स्पअ + १ = छेअ \quad (८).$$

दोन कोनांच्या बरोबर व बजावाची यांची भुज्यादि गुणोत्तरे

५९. क्ष आणि य ह्या दोन कोनांची प्रत्येक कोनाची भुज्या आणि कोभुज्या दिली आहे तर (क्ष + य) ह्या कोनाची भुज्या आणि कोभुज्या ठरवावयाची.



व अ क हा क्ष असाचा कोन आहे आणि क अ ड हा य असाचा कोन आहे तर व अ ड ह्या कोनाची भुज्या आणि कोभुज्या ठरवावयाची. अ ड रेषेत फ बिंदू पेशा, फ पागून अ व वर फग आणि अ क वर फग लव वाढिते आणि अ क रेषेवरील प बिंदूपासून अ व वर पल आणि फग वर प म लंब काढिते.

ह्या आकृतीत फगप आणि अरग हे दोन्ही वाडकाल त्रिकोण असून फगप व अरग हे कोन समान आसत म्हणून पफम कोन र अग कोनावरोबर म्हणजे क्ष कोनाबरोबर आहे.

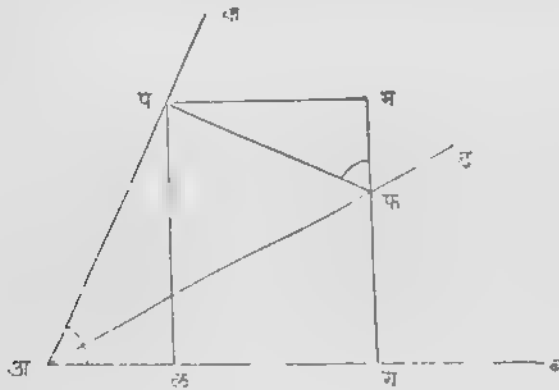
$$\text{व अ ड कोन} = (\text{क्ष} + \text{य}) \text{ कोन.}$$

तेव्हा लक्षणाप्रमाणे

$$\begin{aligned} \text{भ (क्ष + य)} &= \frac{\text{फग}}{\text{अक}} = \frac{\text{मग} + \text{फम}}{\text{अक}} = \frac{\text{मग}}{\text{अक}} + \frac{\text{फम}}{\text{अक}}, \\ &= \frac{\text{मग}}{\text{अक}} \times \frac{\text{अप}}{\text{अप}} + \frac{\text{फम}}{\text{अक}} \times \frac{\text{पक}}{\text{पक}}, \\ &= \frac{\text{पल}}{\text{अप}} \times \frac{\text{अप}}{\text{अक}} + \frac{\text{फम}}{\text{पक}} \times \frac{\text{पक}}{\text{अक}}, \quad [\text{मग} = \text{पल}] \\ \text{भक्ष} \cdot \text{कोभुज} &= \text{कोभुज} \cdot \text{भय} \dots \dots \dots (१) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{कोभु (क्ष + य)} &= \frac{\text{अग}}{\text{अफ}} = \frac{\text{अल} - \text{गल}}{\text{अफ}} = \frac{\text{अल}}{\text{अफ}} - \frac{\text{गल}}{\text{अफ}}, \\
&= \frac{\text{अल}}{\text{अफ}} \times \frac{\text{अप}}{\text{अप}} - \frac{\text{गल}}{\text{अफ}} \times \frac{\text{पफ}}{\text{पफ}}, \\
&= \frac{\text{अल}}{\text{अप}} \times \frac{\text{अप}}{\text{अफ}} - \frac{\text{गप}}{\text{पफ}} \times \frac{\text{पफ}}{\text{अफ}}, \quad [\text{गल} = \text{गप}] \\
&= \text{कोभुक्ष} \cdot \text{कोभुय} - \text{भुक्ष} \cdot \text{भुय} \dots\dots\dots (२)
\end{aligned}$$

६०. क्ष आणि य ह्या दोन कोनांपैकीं प्रत्येक कोनाची भुज्य्या आणि कोभुज्य्या दिली तर (क्ष—य) ह्या कोनाची भुज्य्या आणि कोभुज्य्या ठरवावयाची.



अ अ क हा क्ष असाचा कोन आहे, आणि क अ ड हा य असाचा कोन आहे, तेव्हा व अ ड हा (क्ष—य) असाचा कोन आहे. ह्या (क्ष—य) कोनाची भुज्य्या आणि कोभुज्य्या ठरवावयाची. अ ड रेपेन फ बिंदू घेतला, फ पासून अ व वर प ल अर्धा आणि अ व वर फ प ल अर्ध केले. तेव्हा अ ल रेपेसमील प बिंदूपासून म फ वाडवून निजवर प म लंब केला आणि प बिंदूपासून अ व वर प ल लंब केला.

अ प म ह्या कोनासून म प ल, अ प फ हे काटकोन काढून दाखिले तर म प फ कोन अ प ल कोनाबरोबर राहतो. अथवा ह्या कोनाचे कोटिकोन प फ म व प अ ल हे समान आहेत. म्हणजे प फ म कोन क्ष कोनाबरोबर आहे. तेव्हा लक्षणाप्रमाणे

$$\begin{aligned}
\text{भु (क्ष - य)} &= \frac{\text{फग}}{\text{अफ}} = \frac{\text{मग} - \text{मफ}}{\text{अफ}} = \frac{\text{मग}}{\text{अफ}} - \frac{\text{मफ}}{\text{अफ}}, \\
&= \frac{\text{मग}}{\text{अप}} \times \frac{\text{अप}}{\text{अफ}} - \frac{\text{मफ}}{\text{अफ}} \times \frac{\text{पफ}}{\text{पफ}}, \\
&= \frac{\text{मग}}{\text{अप}} \times \frac{\text{अप}}{\text{अफ}} - \frac{\text{मफ}}{\text{पफ}} \times \frac{\text{पफ}}{\text{अफ}}, \quad [\text{मग} = \text{पल}] \\
&= \text{भुक्ष} \cdot \text{कोभुय} - \text{कोभुक्ष} \cdot \text{भुय} \dots\dots\dots (३)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{कोभु (क्ष - य)} &= \frac{\text{अग}}{\text{अफ}} = \frac{\text{अल} + \text{लग}}{\text{अफ}} = \frac{\text{अल}}{\text{अफ}} + \frac{\text{लग}}{\text{अफ}}, \\
&= \frac{\text{अल}}{\text{अफ}} \times \frac{\text{अप}}{\text{अप}} + \frac{\text{लग}}{\text{अफ}} \times \frac{\text{पफ}}{\text{पफ}}, \\
&= \frac{\text{अल}}{\text{अफ}} \times \frac{\text{अप}}{\text{अफ}} + \frac{\text{लग}}{\text{पफ}} \times \frac{\text{पफ}}{\text{अफ}}, \quad [\text{लग} = \text{पम}] \\
&= \text{कोभुक्ष} \cdot \text{कोभुय} + \text{भुक्ष} \cdot \text{भुय} \dots\dots\dots (४)
\end{aligned}$$

६१. वरन्त्या लेखानील समीकरण (३) व (४) ही दिव ५९ मधील समीकरण (१) व (२) यांमध्ये येत्या घन कोनाच्या जागी—य हा चट्टण कोन लिहिल्यानेही सिद्ध होतात.

वरन्ती चार समीकरणे, क्ष आणि य हे कोन हाय वाहि पाडत असोत, घन अर्मान किवा गुण अर्मान त्यांनी मिळता जाऊन हागा किवा धोत्रागिन योजनेने मदेरगति केल्या येते ह्या चार समीकरणाच्या मयोग योजनेने व अवान्तर योजनेने पुनः नवे मिळान मिद्ध होनात. ते मिळान मरणजव समीकरणे खालच्या लेखान सिद्ध करून दाखविता आता ते वरन्ती चार समीकरणे यादी एकत्र लिहून दाखविली आहेत :—

$$\text{भु (क्ष + य)} = \text{भुक्ष कोभुय} + \text{कोभुक्ष भुय} \dots (१).$$

$$\text{कोभु (क्ष + य)} = \text{कोभुक्ष कोभुय} - \text{भुक्ष भुय} \dots (२).$$

$$\text{भु (क्ष - य)} = \text{भुक्ष कोभुय} - \text{कोभुक्ष भुय} \dots (३).$$

$$\text{कोभु (क्ष - य)} = \text{कोभुक्ष कोभुय} + \text{भुक्ष भुय} \dots (४).$$

६२. समीकरण (१) व (३) यांची बेरीज आणि वजाबाकी केली, तसेच समीकरण (२) व (४) यांची बेरीज आणि वजाबाकी के गी तर खाली दिलेली चार समीकरणे तयार होतात :—

$$\text{मु}(\text{क्ष} + \text{य}) + \text{मु}(\text{क्ष} - \text{य}) = २ \text{ मुक्ष कोमुय} \dots (५).$$

$$\text{मु}(\text{क्ष} + \text{य}) - \text{मु}(\text{क्ष} - \text{य}) = २ \text{ कोमुक्ष मुय} \dots (६).$$

$$\text{कोमु}(\text{क्ष} + \text{य}) + \text{कोमु}(\text{क्ष} - \text{य}) = २ \text{ कोमुक्ष कोमुय} \dots (७).$$

$$\text{कोमु}(\text{क्ष} + \text{य}) - \text{कोमु}(\text{क्ष} - \text{य}) = - २ \text{ मुक्ष मुय} \dots (८).$$

समीकरणे (५) ते (८) मध्ये (क्ष : य) च्या ठिकाणी अ आणि (क्ष - य) च्या ठिकाणी ब लिहिला तर—

$$\text{मुअ} + \text{मुब} = २ \text{ मु} \frac{\text{अ} + \text{ब}}{२} \times \text{कोमु} \frac{\text{अ} - \text{ब}}{२} \dots (९).$$

$$\text{मुअ} - \text{मुब} = २ \text{ कोमु} \frac{\text{अ} + \text{ब}}{२} \times \text{मु} \frac{\text{अ} - \text{ब}}{२} \dots (१०).$$

$$\text{कोमुअ} + \text{कोमुब} = २ \text{ कोमु} \frac{\text{अ} + \text{ब}}{२} \times \text{कोमु} \frac{\text{अ} - \text{ब}}{२} \dots (११).$$

$$\text{कोमुअ} - \text{कोमुब} = - २ \text{ मु} \frac{\text{अ} + \text{ब}}{२} \times \text{मु} \frac{\text{अ} - \text{ब}}{२} \dots (१२).$$

समीकरण (१) व (२) ह्यामध्ये क्ष = य मानिला तर—

$$\text{मु} २ \text{ क्ष} = २ \text{ मुक्ष कोमुक्ष} \dots (१३).$$

$$\text{कोमु} २ \text{ क्ष} = \text{कोमु}^२ \text{ क्ष} - \text{मु}^२ \text{ क्ष} \dots (१४).$$

समीकरण (१४) मध्ये क्ष च्या ठिकाणी $\frac{\text{क्ष}}{२}$ लिहिला तर—

$$१ + \text{कोमुक्ष} = \text{मु}^२ \frac{\text{क्ष}}{२} + \text{कोमु}^२ \frac{\text{क्ष}}{२} + \text{कोमु}^३ \frac{\text{क्ष}}{२} - \text{मु}^३ \frac{\text{क्ष}}{२}$$

$$१ + \text{कोमुक्ष} = २ \text{ कोमु}^२ \frac{\text{क्ष}}{२} \dots (१५).$$

$$१ - \text{कोमुक्ष} = २ \text{ मु}^२ \frac{\text{क्ष}}{२} \dots (१६).$$

६२. दोन कोनांच्या त्रैज्येची भुज ज्या आणि कोभुज ज्या प्रत्येक कोनाच्या भुज ज्या आणि कोभुज ज्या यांच्या किमतीने दाखविण्या, अता स्पर्शरेषा आणि कोस्पर्शरेषा दाखव.

$$\text{स्प (अ + व)} = \frac{\text{भु (अ + व)}}{\text{कोभु (अ + व)}} = \frac{\text{भु अ को भु अ + को भु व भु व}}{\text{को भु अ को भु व} - \text{भु अ भु व}}$$

अंशाला आणि छेदाला कोभुअ कोभुव ने मागिले तर

$$\text{स्प (अ + व)} = \frac{\frac{\text{भु अ}}{\text{कोभु अ}} + \frac{\text{भु व}}{\text{कोभु व}}}{\frac{\text{भु अ}}{\text{कोभु अ}} - \frac{\text{भु व}}{\text{कोभु व}}} \quad \text{स्प अ} \quad \text{स्प व} \quad \text{१ - स्प अ स्प व} \quad (१७)$$

$$\text{तसेच स्प (अ - व)} = \frac{\text{स्प अ} - \text{स्प व}}{१ + \text{स्प अ स्प व}} \quad \dots (१८)$$

समीकरण (१७) मध्ये अ = व मानिला तर

$$\text{स्प २अ} = \frac{२ \text{स्प अ}}{१ + \text{स्प अ}} \quad \dots (१९)$$

समीकरण (१७) व (१८) मध्ये व = ४५° मानिले तर — ४५° ची स्पर्श रेखा १ असते. आणि कोस्पर्श रेखाहि १ च असते.

$$\text{स्प (अ + ४५°)} = \frac{१ + \text{स्प अ}}{१ - \text{स्प अ}} \quad \dots (२०)$$

$$\text{स्प (अ - ४५°)} = \frac{\text{स्प अ} - १}{\text{स्प अ} + १} \quad \dots (२१)$$

त्याचप्रमाणे

$$\text{कोस्प (अ + व)} = \frac{\text{कोस्प अ कोस्प व} - १}{\text{कोस्प अ} + \text{कोस्प व}} \quad \dots (२२)$$

$$\text{आणि कोस्प (अ - व)} = \frac{\text{कोस्प अ कोस्प व} + १}{\text{कोस्प अ} - \text{कोस्प व}} \quad \dots (२३)$$

$$\text{कोस्प २अ} = \frac{\text{कोस्प अ} - १}{२ \text{ कोस्प अ}} \quad \dots (२४)$$

$$\begin{aligned} \text{स्वअ} + \text{स्वव} &= \frac{\text{भुअ}}{\text{कोभुअ}} + \frac{\text{भुव}}{\text{कोभुव}} = \frac{\text{भुअ कोभुव} + \text{कोभुअ भुव}}{\text{कोभुअ कोभुव}} \\ &= \frac{\text{भु(अ + व)}}{\text{कोभुअ कोभुव}} \quad \dots (२६). \end{aligned}$$

$$\text{दरच्याच प्रमाणे स्वअ} - \text{स्वव} = \frac{\text{भु (अ - व)}}{\text{कोभुअ कोभुव}} \quad \dots (२७).$$

समीकरण (१६) ला (१५) ने भागिले तर (त्यान क्ष ने नागी २ क्ष घ्या).

$$\text{स्वक्ष} = \frac{१ - \text{कोभु २क्ष}}{१ + \text{कोभु २क्ष}} \quad \dots (२८).$$

समीकरण (१३) ला १ - भु^३ क्ष + कोभु^३ क्ष ने भागिले तर

$$\text{भु २क्ष} = \frac{२ \text{भु कोभुक्ष}}{\text{भु^३ क्ष - कोभु^३ क्ष}} = \frac{२ \text{स्वअ}}{१ - \text{स्व^३ अ}} \quad \dots (२९).$$

ह्याप्रमाणे (१४) ला भागिले तर

$$\text{कोभु २क्ष} = \frac{\text{कोभु^३ क्ष} - \text{भु^३ क्ष}}{\text{कोभु^३ क्ष} - \text{भु^३ क्ष}} = \frac{१ - \text{स्व^३ क्ष}}{१ - \text{स्व^३ क्ष}} \quad \dots (३०)$$

भुज्यादि गुणोत्तरांच्या किमती

६८. कोनाची अज मर्यादा आणि त्याच कोनाची भुज्यादि गुणोत्तरे याचा गुणमिकासी जो संबंध आहे तो सरळ तमूत फारच गुंतागुंतीचा आहे. हा संबंध पुढे दाखविण्यात येईल. येथे काही कोनाच्या भुज्यादि गुणोत्तरांचे संपादन करून दाखविले आहे.

३० अज कोनाची भुज्यादि गुणोत्तरे लेख ४९ मध्ये दिली आहेत. पण लेख ५० वरून (९०° - ३०°) - ६० अशाच्या कोनाची गुणोत्तरे समजतात. जसे

$$\text{भु } ६०^\circ = \text{कोभु } (९०^\circ - ६०^\circ) = \text{कोभु } ३०^\circ = \frac{\sqrt{3}}{२}$$

$$\text{कोभु } ६०^\circ = \text{भु } (९०^\circ - ६०^\circ) = \text{भु } ३०^\circ = \frac{१}{२}$$

$$\text{स्व } ६०^\circ = \text{कोस्व } (९०^\circ - ६०^\circ) = \text{कोस्व } ३०^\circ = \frac{१}{\sqrt{३}}$$

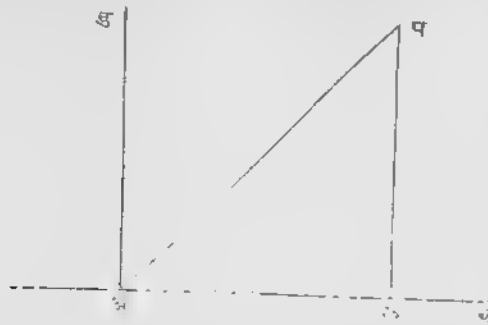
$$\text{कोस्व } ६०^\circ = \text{स्व } (९०^\circ - ६०^\circ) = \text{स्व } ३०^\circ = \frac{\sqrt{३}}{२}$$

$$\text{छे } ६०^\circ = \text{कोछे } (९०^\circ - ६०^\circ) = \text{कोछे } ३०^\circ = २$$

$$\text{कोछे } ६०^\circ = \text{छे } (९०^\circ - ६०^\circ) = \text{छे } ३०^\circ = \frac{२}{\sqrt{३}}$$

६५. कोन ४५ अंशाचा आहे. त्याची भुजज्यादि गुणोत्तरे ठरवावयाची.

अप रेखावर अड लंब काढिला. व अ ड कोनास दुभागणारी अप रेखा काढिली.



प बिंदुपासून अ व वर प ल लंब काढिला.

प अ ल कोन ४५ अंशाचा आहे, त्याच अप ल लाई ४५ अंशाचा अंतिम म्हणून प ल = अ ल आहे. आणि

$$\begin{aligned} \text{अप}^2 &= \text{पल}^2 + \text{अल}^2 \\ &= 2 \text{पल}^2 = 2 \text{अल}^2 \end{aligned}$$

तेव्हां

$$\begin{aligned} \text{भु } 45^\circ &= \frac{\text{पल}}{\text{अप}} = \sqrt{\frac{\text{पल}^2}{\text{अप}^2}} = \sqrt{\frac{\text{पल}^2}{2 \text{पल}^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}} = \text{कोभु } 45^\circ \end{aligned}$$

$$\text{स्प } 45^\circ = \frac{\text{पल}}{\text{अल}} = 1 = \text{कोस्प } 45^\circ$$

२०. भ्रमण करणारी अप रेखा अड ला मिळाली म्हणजे व अप वान ९० अंशाचा आला तर प ल रेखा प अ वरावर होईल, आणि अ ल कोटि ० होईल. यावरून ९० अंशाची भुजज्या १ होते आणि ताभुजज्या ० होते. स्पष्ट रेखा = १ = १ म्हणजे अनंत. अ व बिंदू अनंत दगडाचे दर्शक आहे. कोस्पष्ट रेखा = $\frac{1}{1} = 1$ छेदन रेखा = १ म्हणजे अनंत. आणि कोछेदन रेखा = $\frac{1}{1} = 1$.

कोन ० अथ कित्या १८० अथ असना पल मुज ० असतो आणि अ ल कोटि अ प
वरावर असतो. तव्हा ० आणि १८० अशाचा कोन असना त्याची भुज्यादि
गुणोत्तरे वाचकांच्या सहज लक्षात येतील.

वरच्या रेखिताने तयार केलेले गुणान्तरे आणि त्याचून मुळस रीतीने म्णजे
मात्र माध्य भुज्यादि गुणोत्तरां स्वातंत्र्याच्या काट्यात दिली आहेत.

	०	३०	४५	६०	९०	१००	१२५	१५०	१८०
भुज्या	०	१	१	१	१	१	१	१	०
मिमांसा	१	१	१	१	०	१	१	१	१
सारां रेखा	०	१	१	१	०	१	१	१	०
कलास रेखा	०	१	१	१	०	१	१	१	०
छेदन रेखा	१	१	१	१	०	१	१	१	१
तो छेदन रेखा	०	१	१	१	०	१	१	१	०

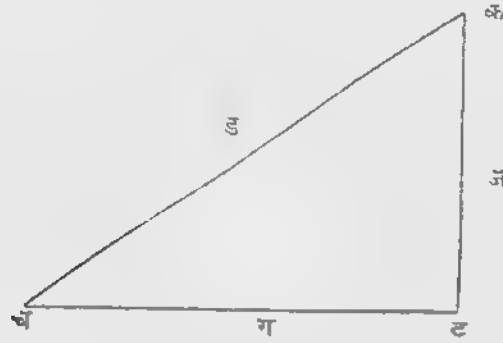
६३. त्रिकोणमितीचे गुणवर्तने जे मिळालेले मिळ केले त्याचून हे स्पष्ट वळने की,
(१) द्यावापासून ४५ अंशापर्यंतच्या सर्व कोनांची गुणान्तरे समजली (तयार केली)
म्णजे तसा प्रकृतने ह्या त्या कोनांची गुणोत्तरे तयार होतात, आणि (२) तयार्यादि
कोनांच्या भुज्यादि मत्र गुणान्तरेपैकी एक समान तर आलीची पान तयार
वर्गित्या येतात. ह्या दाखी मुद्याचा आस्मानूनी विचार केल्या तर त्यास त्यातील
विषय सहज लक्षात येण्यासारखा आहे.

त्रिकोणाच्या बाजू व तर बाजूसमोरच्या कोनांची भुज्यादि गुणान्तरे तांचा अन्योन्य
संबंध.

६८. काट्यात त्रिकोणाच्या बाजू जाईल तर बाजूसमोरचा कोनाच्या भुज्यादि
गुणोत्तरांचा अन्योन्य संबंध.

का च ट हा काट्यात त्रिकोण आहे आणि त्या भाट कोन काट्यात आहे.

(त्रिकोणाचे निम्ही कोन क च ट अक्षरांनी व तिन्ही बाजू ग ज ड अक्षरांनी दाखविण्याचें सकेल केला आहे. त्यात क कोनासमोर ग बाजू, अ कोनासमोर ज बाजू, आणि ट कोनासमोर ड बाजू असा सकल केला आहे. तथापि कांही प्रसंगी तो सवेन सोडूनहि लिखाण होईल.)



वरील लेखाप्रमाणे—

$$\frac{\text{कट}}{\text{कच}} = \frac{\text{ज}}{\text{ड}} = \text{भुज किंवा कोभुज.}$$

म्हणून ज = ड भुज किंवा ज = ड कोभुज.

तसेच

$$\frac{\text{चट}}{\text{कच}} = \frac{\text{ग}}{\text{ड}} = \text{भुज किंवा कोभुज.}$$

म्हणून ग = ड भुज किंवा ग = ड कोभुज.

$$\text{ह्याचप्रमाणे } \frac{\text{ज}}{\text{ग}} = \text{कोस्पक किंवा स्पच.}$$

म्हणून ज = ग कोस्पक किंवा ज = ग स्पच.

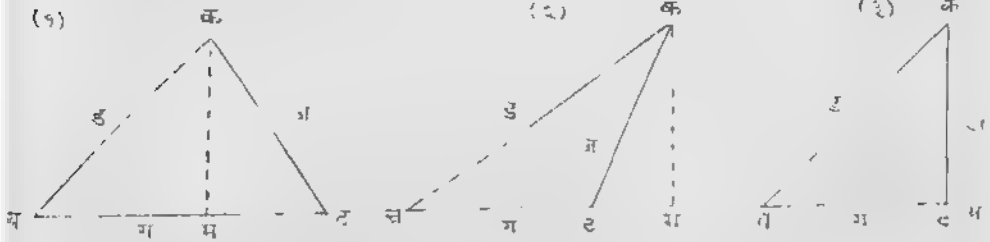
$$\text{आणि } \frac{\text{ग}}{\text{ज}} = \text{कोस्पच किंवा स्पक.}$$

म्हणून ग = ज स्पक किंवा ग = ज कोस्पच.

६९. कोणत्याही त्रिकोणाच्या बाजू, त्यांच्या समोरच्या कोनांच्या भुजज्येशी प्रमाणांत असतात. म्हणजे

$$\frac{\text{भुज}}{\text{ग}} = \frac{\text{भुज}}{\text{ज}} = \frac{\text{भुट}}{\text{ड}}$$

असे सिद्ध करावयाचे.



क च ड हा त्रिकोण आहे, ह्या त्रिकोणाच्या क कोनविद्वामून ग बाजूवर (किंवा ती ग बाजू वाढवून तिजवर) क मलव केला. तेव्हा (१) (२)क म - ड \times भुज आणि क म = ज \times भुट म्हणून ड \times भुज = ज \times भुट किंवा

$$\frac{\text{भुज}}{\text{ज}} = \frac{\text{भुट}}{\text{ड}}$$

त्याप्रमाणेच च विद्वामून ड बाजूवर लव टाविला तर

$$\text{ग} \times \text{भुट} = \text{ड} \times \text{भुज किंवा}$$

$$\frac{\text{भुट}}{\text{ड}} = \frac{\text{भुज}}{\text{ग}}$$

$$\text{ह्यावरून } \frac{\text{भुज}}{\text{ज}} = \frac{\text{भुट}}{\text{ड}} = \frac{\text{भुज}}{\text{ग}}$$

(३) जर ड कोन काट कोन असेल तर भुट = १ आणि

$$\text{भुज} = \frac{\text{ग}}{\text{ड}} ; \text{आणि भुज} = \frac{\text{ज}}{\text{ड}}$$

$$\text{म्हणून } \frac{\text{भुज}}{\text{ग}} = \frac{\text{भुज}}{\text{ड}} = \frac{१}{\text{ड}} = \frac{\text{भुट}}{\text{ड}}$$

७०. कोणत्याही त्रिकोणाच्या निन्ही बाजूंचा त्याच्या कोनाच्या कोभुजज्याशी संबंध.

कचट त्रिकोणाच्या ट कोनाच्या कोभुज्याशी संबंध, वरच्या लेखातील आकृति १ पहा.

$$\begin{aligned} \text{ड}^2 &= \text{चम}^2 + \text{कम}^2 = (\text{ग} - \text{मट})^2 + \text{कम}^2 \\ &= \text{ग}^2 - २ \text{मट} \times \text{ग} + (\text{मट}^2 + \text{कम}^2). \\ &= \text{ग}^2 - २ \text{मट} \times \text{ग} + \text{ज}^2 \end{aligned}$$

परंतु मट = ज कोभुट म्हणून

$$\text{ड}^2 = \text{ग}^2 + \text{ज}^2 - २ \text{गज कोभुट} \quad \dots (१)$$

$$\text{कोभुट} = \frac{\text{ग}^2 + \text{ज}^2 - \text{ड}^2}{२ \text{गज}} \quad \dots (२)$$

आकृति (२) मध्ये कम = (ग - मट)². पण कोभुट म्हण म्हणून

$$\text{कोभुट} = \frac{\text{ग}^2 + \text{ज}^2 - \text{ड}^2}{२ \text{गज}}$$

ह्याप्रमाणे, कोणत्याही कोनाची कोभुज्या ठरविता येते.

७०-अ. त्रिकोणाच्या दोन बाजू व त्यामधील कोन ही दिली असता त्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ तयार करावयाचे.

लेख ६९ मधील आकृति (१), (२), (३) पहा.

कचट त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ ट चट पाया आणि कम उंची यांच्या गुणाकाराच्या अर्थावरोबर असते, म्हणजे—

$$\text{त्रिकोणाचे क्षेत्र} = \frac{१}{२} \text{चट} \times \text{कम}.$$

पण कम = ड भुज, चट = ग. यावरून

$$\text{त्रि क्षेत्र} = \frac{१}{२} \text{ग ड भुज}.$$

७१. त्रिकोणाचा कोणतीही बाजू ही, त्या बाजुच्या प्रत्येक टोकाशी असलेल्या कोनाच्या कोभुज्येस, त्याच टोकाचा असेल त्या बाजूने गुणून जे दोन गुणाकार येतात त्यांच्या बेरजेवर असते.

लेख ६९ आकृति (१) पहा

$$\begin{aligned} \text{ग} &= \text{चम} + \text{मट} \\ &= \text{डकोभुज} + \text{जकोभुट} \end{aligned}$$

आवृत्ति (२) मध्ये

म - चम - मट पण

- मड - - कोभ, (१८० - ट) - ज

ग - डकोभूच - ज अतोभुट

ह्या वप्रमाणे

ज उदाभूट गकोभूट

आणि

ड जकोभूक - गकोभूच

३२. त्रिकोणमिति हा मोठा महत्त्वाचा विषय असून तो फार विस्तीर्ण आहे त्यातील मुख्य मुख्य सिद्धांत वर निद्व केले आहेत हे सिद्धान्त मूलरूप असल्यामुळे याच्या आधारेने त्रिकोणाचे अवयव संपादन वगैरे कार्ये करिता येतात. वर दिलेल्या त्रिकोणमितीच्या कोन आणि कोन म्हणजे ज्या आणि चाप वगैरे विषय गुंथमान गणिताचे सिद्धान्त मित्र केल्यावर द्याययाचा आहे.

प्रकरण पांचवें

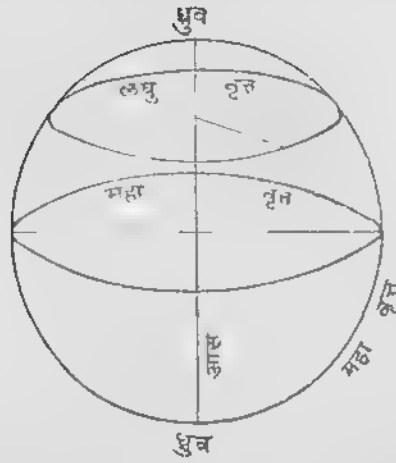
गणितशास्त्रांतील मुख्य सिद्धांत

गोलीय त्रिकोणमिती

व्याख्या

७३. (१) ज्या घनाकृतीची मर्यादा एकाच वक्र पातळीने दाखविली जाते, आणि तिच्यामध्ये असा एक बिंदु असतो की, त्यापासून त्या वक्र पातळीतील अनेक बिंदुपर्यंत कितीही मर्याद रेखा काढल्या तरी त्या सर्व समान असतात. त्या घनाकृतीला 'गोल' असे म्हणतात आणि ज्या एका बिंदुपासून अनेक मर्याद रेखा काढिल्या त्या बिंदूला गोलाचा 'मध्य' म्हणतात आणि त्या काढिलेल्या प्रत्येक मर्याद रेखा त्या गोलाची 'त्रिज्या' म्हणतात. त्रिज्या मध्याबिंदूकडे बाह्यस्थी आणि ती वक्रपृष्ठाला मिळाली असता जी दोन रेषांनी एक रेषा होते तिच्या त्या गोलाचा 'व्यास' म्हणतात.

(२) गोल मर्याद पातळीने छेदिला असता त्याचे जे छिन्न होते ते वर्तुळ असते ती छेदक पातळी गोलाच्या मध्यातून गेली तर जे वर्तुळ होते त्यास 'महावृत्त' म्हणतात आणि मध्येवर बिंदूतून गेली तर जे वर्तुळ होते त्यास 'लघुवृत्त' म्हणतात. ज्या पातळीच्या छेदनाते ही वर्तुळे होतात त्या पातळीला त्या महावृत्ताची किंवा लघुवृत्ताची 'पातळी' म्हणतात. महावृत्ताच्या पातळीवर त्याच्या मध्य बिंदुपासून काढिलेला लंब किंवा लघुवृत्ताच्या पातळीवर त्याच्या मध्य बिंदुपासून काढिलेला लंब, गोलाच्या पृष्ठास दोन्हीकडे मिळाला असता गोलाचा व्यास होता त्यास त्या महावृत्ताचा किंवा लघुवृत्ताचा 'आस' म्हणतात. महावृत्त व लघुवृत्त यांच्या पातळ्या एकमेकांशी समानांतर असतील तर दोन्हीचा आस एकच होतो. प्रत्येकाच्या आसाच्या दोराम त्या वृत्ताचा 'ध्रुव' म्हणतात.



ह्या आकृतीत महावृत्त, लघुवृत्त, आम, व्यास ध्रुव हे दाखविले आहेत.

७४. लघुवृत्ताच्या परीघातील प्रत्येक बिंदूपासून कोणता तरी एक ध्रुव समान अंतरावर असतो. आणि महावृत्ताच्या परीघातील प्रत्येक बिंदूपासून दोन्ही ध्रुव प्रत्येकी ९०, ९० अंशावर असतात. ज्यापासून महावृत्त त्या परीघापर्यंत हाडलेला कोन परीघावर लंब असतो. गोलाने दोन महावृत्ते काढिले तर तो एकमेकांस दामून टिकाणी छेदिताने व त्यापुढे प्रत्येक वृत्ताचे दोन समान भाग होतात. दोन महावृत्ते एकमेकांस छेदिताने तेल्या व्यासा छेदने बिंदूची जा बन (वक्र रेखा मध्ये) होते ती, त्या वृत्ताच्या पातळ त्रामातील कोनाएवढी असतो म्हणून ती दोन छेदने बिंदूतून दोन्ही वृत्तास (वर्तुळाने) दोन स्पष्ट रेषा काढिल्या तर त्यामधील कोनाएवढी असतो.

७५. एका महावृत्ताने गोल कापिल्या असता त्याचे दोन समान भाग होतात. तो गोल (दोन्ही भाग एकत्र असो) दुसऱ्या महावृत्ताने कापिल्या तर गोलाने चार भाग होतात. त्यांपैकी एक भाग पाहिला तर त्याला एक वक्र पृष्ठ असून दोन सरळ पृष्ठे असतात. सरळ पृष्ठे ही दोन अर्धवर्तुळे असतात. ह्या दोन अर्धवर्तुळाच्या मर्यादा दाखविणारी सरळ रेषा गोलाना व्यास असते. ह्या व्यासाने छेदणारी व गोल मध्यातून जाणारी अशा सरळ पातळीने सरळ गोल किंवा वक्रच्या चार भागांपैकी कोणता तरी एक भाग कापिल्या तर सरळचा गोलाने आठ भाग किंवा एका भागाचे दोन भाग होतात. हा एक भाग म्हणजे गोलचा आठवा भाग ह्याला चार पृष्ठे असतात. तीन सरळ पृष्ठे आणि एक वक्र पृष्ठ. ह्यांपैकी वक्र पृष्ठाची

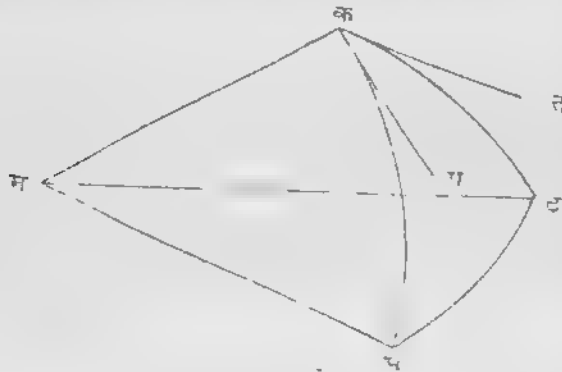
जी श्रावृत्ती को गोलीय त्रिकोण हो। गोलाच्या एकाच व्यासातून निर्माही सरळ पातळीवरील एक वाकिला तऱ्हे त्रिकोण न होता त्या भागाच्या दोन सरळ पृष्ठे अर्धवर्तुळात्मक असून एक वक्र पृष्ठ असते पण त्याला कोन व्यासाप्रमाणे असं दोन अंगात. त कोन समान असताना. हे वक्र पृष्ठ कामदाच्या सरळ पातळीवर सरळ वक्राने दर्शविलेतर ते "निमि" च्या जाग्याचे असते. जसे, ह्या निमीचे दोन्ही



कोन समान असताना कारण ते कोन दोन्ही छेदक पातळ्यांमधील कोनावरोबर असताना. ह्या निमीच्या दोन्ही बाजू गोलाच्या परीसाच्या म्हणजे महावृत्ताच्या अर्धावरोबर असताना. अर्थात निमीच्या बाजूचे दोन भाग केले तर जे दोन कोन होतात ते एकमेकांचे पूरक कोन असतात. निमीच्या कोनाविद्युत्पेरीस निम्हा छेद-पारा महावृत्ताचा असं दाखिला तर निमीचे दोन गोलीय त्रिकोण होतात.

गोलीय त्रिकोण

७६. गोलाचा मध्यतून नील पातळीला गेल्याने गोलाचा अर्धा एक भाग तयार होता येई, त्या भागास एका वक्र पृष्ठ असून त्याला तीन समद्विभुज त्रिकोणाच्या तीन सरळ पातळ्यांच्या मर्यादा असून तिहीचा निरोबिंदू एकच असतो मात्र समद्विभुज त्रिकोणांचे पांथे वक्र रेखात्मक महावृत्ताचे असं हे असताना. ह्या निन्दो कर्णांनी मर्यादितेला असल्याच्या गोलीय त्रिकोण म्हणतात.



ह्या आकृतीमध्ये एक घन त्रिकोण शकूची आकृति दाखविली आहे. म हा गोलाचा मध्य आहे. व त्रिकोण शकूचे अग्र आहे. मक मट, मच ह्या गोलाच्या त्रिज्या आहेत. ह्या घनाकृतीची मर्यादा चार पृष्ठाकृतींनी दाखविली आहे. त्या चार पृष्ठांपैकी वमच, वमट, टमक हे तीन त्रिकोण आहेत. चवथे पृष्ठ कचट हा गोलाच्या त्रिकोण होय. गोलाच्या त्रिकोणाचा कोन हा, कोन करणाऱ्या वक्र रेखाशी कोनान्विन्दुस्थळी स्पर्शरेषा काढल्या असता त्या स्पर्शरेषांनी हांगाच्या कोनाएवढा असतो. जसे, आकृतीतील क कोन हा तल कप ह्याच्यामधील त कप कोना एवढा असतो.

वरच्या व्याख्यावरून उघड आहे की, गोलाच्या त्रिकोणाची प्रत्येक बाजू वर्तुळाच्या परीघापेक्षा कमी असते. गोलाच्या त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजूंची बेरीज तिसरीपेक्षा जास्त असते. गोलाच्या त्रिकोणाच्या दोन बाजू समान असल्या तर त्या बाजूसमोरील कोन समान असतात आणि गोलाच्या त्रिकोणाचे दोन कोन समान असेल तर, त्या कोनासमोरील बाजू समान असतात. गोलाच्या त्रिकोणाच्या मोठ्या बाजूसमोरील कोन, लहान बाजूसमोरील कोनापेक्षा मोठा असतो आणि गोलाच्या त्रिकोणाच्या मोठ्या कोनासमोरील बाजू लहान कोनासमोरील बाजूपेक्षा मोठी असते.

गोलाच्या त्रिकोणाच्या प्रत्येक बाजूचा, त्या बाजूस जसा वक्रापेक्षा जास्त त्या आंगाचा ध्रुव त्याप्रमाणे निरुद्धी बाजूचे ध्रुव येऊन त्यामधून जाणारी महावृत्त काढल्याने ती त्रिकोण होतो त्यास त्या मूळ त्रिकोणाचा 'ध्रुवक त्रिकोण' म्हणतात.

एक गोलाच्या त्रिकोण दुसऱ्या गोलाच्या त्रिकोणाचा ध्रुवक त्रिकोण आहे, तर तो दुसरा त्रिकोण पहिल्या त्रिकोणाचा ध्रुवक त्रिकोण असतो.

जसे कचट त्रिकोणाचा कछट ध्रुवक त्रिकोण आहे. ह्या घनाकृतीची मर्यादा चार पृष्ठाकृतींनी दाखविली आहे. त्या चार पृष्ठाकृतींपैकी वमच, वमट, टमक हे तीन त्रिकोण आहेत. चवथे पृष्ठ कचट हा गोलाच्या त्रिकोण होय. गोलाच्या त्रिकोणाचा कोन हा, कोन करणाऱ्या वक्र रेखाशी कोनान्विन्दुस्थळी स्पर्शरेषा काढल्या असता त्या स्पर्शरेषांनी हांगाच्या कोनाएवढा असतो. जसे आकृतीतील क कोन हा तल कप ह्याच्यामधील त कप कोनाएवढा असतो.

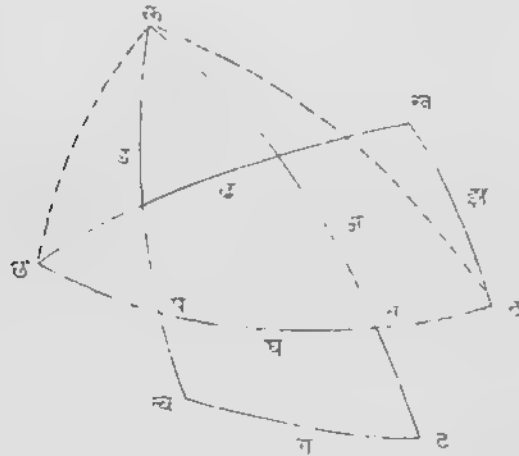
७७. वरच्या व्याख्यावरून उघड आहे की, गोलाच्या त्रिकोणाची प्रत्येक बाजू वर्तुळाच्या परीघापेक्षा कमी असते. गोलाच्या त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजूंची बेरीज तिसरीपेक्षा जास्त असते. गोलाच्या त्रिकोणाच्या दोन बाजू समान असल्या तर त्या बाजूसमोरील कोन समान असतात. आणि गोलाच्या त्रिकोणाचे दोन कोन

समान असेल तर त्या कोनासमोरील बाजू समान असतात. गोळीय त्रिकोणाच्या मोठ्या बाजूसमोरील कोन, लहान बाजूसमोरील कोनापेक्षा मोठा असतो आणि गोळीय त्रिकोणाच्या मांड्या कोनासमोरील बाजू लहान कोनासमोरील बाजूपेक्षा मोठी असते.

७८. गोळीय त्रिकोणाच्या प्रत्येक बाजूचा, त्या बाजूच्या ज्या अग्रास त्रिकोण आहे त्या अग्राचा ध्रुव ह्याप्रमाणे निव्ही बाजूचे ध्रुव घेऊन त्यामधून जाणारी महावृत्त काढिल्याने जो त्रिकोण होतो त्यास त्या मूळ त्रिकोणाचा 'ध्रुवक त्रिकोण' म्हणतात.

एक गोळीय त्रिकोण दुसऱ्या गोळीय त्रिकोणाचा ध्रुवक त्रिकोण आहे, तर तो दुसऱ्या त्रिकोण पहिल्या त्रिकोणाचा ध्रुवक त्रिकोण असतो.

जसे कचट त्रिकोणाचा खळट ध्रुवक त्रिकोण आहे, तर कचट त्रिकोण खळट त्रिकोणाचा ध्रुवक त्रिकोण होईल.



क छ आणि क ठ हे महावृत्ताचे कर्ष काढिले. आता छ हा क ठ ह्या कर्षाचा ध्रुव आहे. क छ = ९० अंश लेख ७४ प्रमाणे, तसेच ठ हा कच कर्षाचा ध्रुव आहे म्हणून क ठ = ९० अंश लेख ७४ प्रमाणे, यास्तव क हा छ ठ कर्षाचा ध्रुव आहे व तो ठ छ च्या ज्या बाजूस त्रिकोण आहे त्याच बाजूस आहे. ह्याप्रमाणेच

च हा खड चा ध्रुव आहे आणि ट हा खड चा ध्रुव आहे म्हणून क-कट विकोण खडट विकोणाचा ध्रुवक विकोण आहे म्हणून पत - क कोन, कट चा छ ध्रुव आहे म्हणून छन - ९० अंश (ध्रुवापासून त्याच्या वृत्तावरील प्रत्येक बिंदू ९० अंशावर असतो. आणि वृत्तावरील दान बिंदूवरील अंतर हे त्या बिंदूतून मेळेल दोन रम ध्रुवान मिळाले असता त्या शिवाणी जा कोन हाईल त्या कोनावर अंतर) त्याचप्रमाणे पठ = ९० अंश आहे.

आतां छत + पठ = छड + पत = १८० परंतु पत = क म्हणून छड + क = १८०

म्हणून क कोन छड चा पूरक कोन आहे.

त्याप्रमाणेच छ कोन कट चा पूरक कोन आहे ह्यावरून ध्रुवक विभागाच्या बाजू आणि कोन २ गट विकोणाने अनुक्रमे तीन आणि बाजू प्रत्येकाने पूरक कोन असतात.

सामान्यतः कोणत्या विकोणाची कोणती बाजू कोणत्या विकोणाच्या कोणत्या कोनाची पूरक असते हे खालीं दाखविल्याप्रमाणे :—

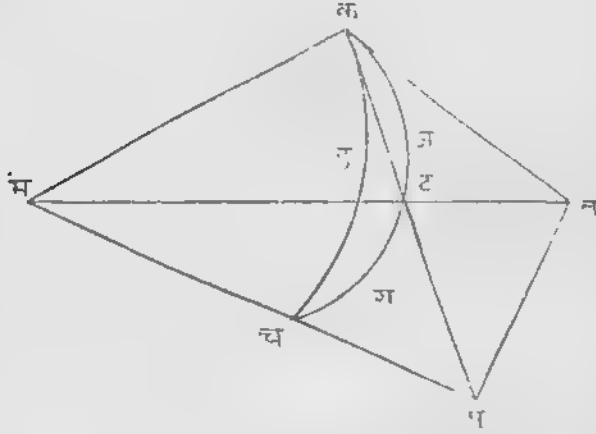
कचट हा मूळ विकोण त्याचे कचट हे कोन आणि गखड ह्या त्याच्या बाजू आहेत, तसेच खडट हा ध्रुवक विकोण त्याचे खडट हे कोन आणि घनड ह्या त्याच्या बाजू आहेत. (आकृति पहा) तेव्हा त्याच मंत्रच त्याच्याप्रमाणे आहेत :—

१८० अंशाच्या जागी न म्हणजे सर्व्हे पंगीचा अर्थ त्याचे वृत्त परिमाण याग 'पाय' म्हणतात ते योजिले आहे.

ख	=	π	—	ग	घ	=	π	—	क
छ	=	π	—	ज	झ	=	π	—	च
ठ	=	π	—	ड	ढ	=	π	—	ट

गोलीय त्रिकोणाच्या बाजू आणि कोन यांचा परस्पर संबंध

७९. गोलीय त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजू आणि कोनयाही एका कोनाची कोभुज्या यांचा परस्पर संबंध.



क च ट हा एक गोलीय त्रिकोण आहे. त्याच्या क कोनाच्या कोभुज्येचा तिन्ही बाजूशी म्हणजे ग ज ड बाजूशी संबंध कसा आहे तो सिद्ध करावयाचा आहे.

म हा गोलाचा मध्य आहे त्यापासून क च ट बिंदूंपर्यंत म, च, म, ट म रेषा काढल्या आहेत. ह्या गोलाच्या त्रिज्या आहेत. क बिंदूतून ड वगाला कप स्पर्शरेषा काढिली, आणि ज कसाला क बिंदूतून क त स्पर्शरेषा काढिली. ड ज हे कम वर्तुळ पादापेक्षां कमी आहेत (९० अंजापेक्षा कमी आहेत) असे माना. यामुळे क प, म च रेषा एकमेकींस मिळतील आणि क त म ट रेषा ह्याही एकमेकींस मिळतील. त्या अनुक्रमे प त बिंदूत मिळतात असे घेऊं.

पकत कोन चकट म्हणजे क कोनावरोबर आहे.

$$\text{पत}^2 = \text{कप}^2 + \text{कत}^2 - २ \text{कप.कत कोभुज [लि. ७० (१)].}$$

$$\text{पत}^2 = \text{मप}^2 + \text{मत}^2 - २ \text{मप.मत कोभुज पमत वरच्याप्रमाणे.}$$

परंतु पमत कोन = ग कोन.

मालाच्या समीकरणातून वरचे समीकरण वजा केले तेव्हा

$$० = मप^३ - कप^३ + मत^३ - कत^३.$$

$$— २ मप.मत कोमुग + २ कप.कत कोमुक (अ).$$

कप कत ह्या वर्तुळाच्या स्पर्शरेषा क बिंदून वर्तुळाच्या स्पर्श करितान. आणि वर्तुळाची स्पर्शरेषा स्पर्शबिंदूतून काढिलेल्या विज्येवर लव असते. ह्यावरून मक विज्येवर कप कत ह्या रेषा लव आहेत. म्हणून मकप आणि मकत हे कोन काढकोन आहेत. तेव्हां—

$$मप^३ - कप^३ = मक^३ ; तसेच मत^३ - कत^३ = मक^३.$$

ह रा किमती (अ) समीकरणात ठेवून २ नी समीकरण भागिले

$$० = मक^३ - मप.मत कोमुग + कप.कत कोमुक$$

$$कोमुग = \frac{मक}{मप} \times \frac{मक}{मत} + \frac{कप}{मप} \times \frac{कत}{मत} \times कोमुक$$

$$ह्यामध्ये \frac{मक}{मप} = कोमुपमक = कोमुड$$

$$\frac{मक}{मत} = कोमुतमक = कोमुज$$

$$\frac{कप}{मप} = मुपमक = मुड$$

$$\frac{कत}{मत} = मुतमक = मुज$$

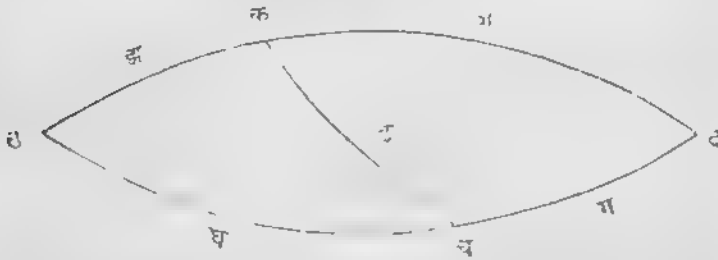
ह्या किमती ज्याच्या त्या स्थानी लिहिल्या म्हणजे,

$$कोमुग = कोमुड.कोमुज + मुड.मुज कोमुक \dots\dots (१)$$

८०. वरच्या लेखान जो सिद्धान्त सिद्ध केला त्यात क कोन करणाऱ्या बाजू वर्तुळ पादापेक्षा कमी आहेत असे मानिले आहे. आता त्या बाजूंपैकी एक किंवा

दोन्ही वर्तुळ पादापेक्षां जास्त किंवा बरोबर असल्या तरी त्या सिद्धान्ताने वाच येत नाही हे येथे दाखवित आहे.

(१) क कोन करणाऱ्या दोन बाजपैकी एक बाजू १८° अंशापेक्षा जास्त आहे असे घेऊं. समजा क ट म्हणजे ज बाजू वर्तुळ पादापेक्षां जास्त आहे. क च ट त्रिकोण लेखून मॉक्याकरिता आम्ही कामदाच्या पातळीवर पसरून दाखविला आहे. त्याची क च म्हणजे ड बाजू वर्तुळ पादापेक्षा कमी असून क ट वर्तुळ पादापेक्षां जास्त आहे. ट क आणि ट च ह्या दोन्ही बाजूविरुद्ध त्या ठ बिंदून एकमेकींम मिळाल्या. तेव्हा लेख ७५ प्रमाणे ही निमी आहे. हिचे दांत गोलीय त्रिकोण झाले आहेत.



पैकी क च ट हा दिलेल्या त्रिकोण विचाराने न घेता क ट च हा त्रिकोण विचाराने घेऊ. ह्या त्रिकोणाचा ठ क च कोन क ठ, क च ह्या बाजू (वर्तुळ पादापेक्षा कमी असलेल्या) ह्यास बरच्या लेखातील सिद्धता लागू आहे म्हणून

कोमुघ — कोमुझ कोमुड ; मुझ मुड कोमुठकच. पण लेख ७५ प्रमाणे

$$\text{कोमुघ} = \text{कोमु} (१८०^\circ - ग) = - \text{कोमुग}$$

$$\text{कोमुझ} = \text{कोमु} (१८०^\circ - ज) = - \text{कोमुज}$$

$$\text{कोमु ठकच} = \text{कोमु} (१८०^\circ - क) = - \text{कोमुक}$$

$$\text{मुझ} = \text{मु} (१८०^\circ - ज) = \text{मुज}$$

ह्या किमती बरच्या समीकरणांत ठेविल्या तर,

$$- \text{कोमुग} - (- \text{कोमुज}) \text{ कामुड, मुज मुड } \backslash (- \text{कोमुक})$$

$$\text{कोमुग} = \text{कोमुज.कोमुड} + \text{मुज.मुड कोमुक.}$$

ह्याच सिद्धतेप्रमाणे सिद्ध करिता येते की त्रिकोणाच्या बाजू लहान मोठ्या असल्या तरी हा सिद्धान्त सिद्ध आहे.

वरचा सिद्धांत क कोनासंबंधी सिद्ध केला. तो प्रत्येक कोनासंबंधी वरच्याच पद्धतीने सिद्ध होतो.

८१. लेख ७८ मध्ये ध्रुवक त्रिकोणाची व्याख्या व धर्म सांगितले आहेत. कोणत्याही गोलीय त्रिकोणाला ध्रुवक त्रिकोण असतोच आणि ध्रुवक त्रिकोणाच्या बाजू आणि कोन मूळ त्रिकोणाचे अनुक्रमे कोन व बाजू एकमेकांच पुरक असतात. म्हणजे गोलीय त्रिकोणाची बाजू आणि त्या बाजूचा ध्रुव दिग्दृश्यांला असलेला ध्रुवक त्रिकोणाचा कोन याची वेरीज १८० अंश असते. वरच्या लेखांत गोलीय त्रिकोणाच्या एका कोनाच्या कोमुजग्येचे सिद्धांत सिद्ध केले तेच सिद्धांत ध्रुवक त्रिकोणाच्या धर्माच्या महात्त्याने एका बाजूच्या कोमुजग्येच्या रूपाचे सिद्ध होतात. त्यावरून—

$$\text{कोभुग} = \text{कोमु} (\pi - \text{ख}) = - \text{कोमुख}$$

$$\text{कोमुज} = \text{कोमु} (\pi - \text{छ}) = - \text{कोमुछ}$$

$$\text{कोमुड} = \text{कोमु} (\pi - \text{ठ}) = - \text{कोमुठ}$$

$$\text{कोमुक} = \text{कोमु} (\pi - \text{घ}) = - \text{कोमुघ}$$

$$\text{मुज} = \text{मु} (\pi - \text{छ}) = + \text{मुछ}$$

$$\text{मुड} = \text{मु} (\pi - \text{ठ}) = + \text{मुठ}$$

लेख ७८ मध्ये ख छ ठ हा ध्रुवक त्रिकोण आहेत तो आपण मूळ त्रिकोण समजून वरच्या लेखातील कोनाच्या कोमुजग्येच्या समीकरणाचे स्वरूप लिहू ते असे,

$$\text{कोमुघ} = \text{कोमुठ.कोमुस} + \text{मुछ.मुस कोमुख}$$

ह्या समीकरणात वर लिहिलेली वरोवरीची पदे लिहू

$$- \text{कोमुक} = \text{कोमुठ.कोमुच} + \text{मुठ.मुच} (- \text{कोभुग})$$

चिन्ह बदलून

$$\text{कोमुक} = - \text{कोमुठ.कोमुच} + \text{मुठ. मुच कोभुग}$$

ह्याप्रमाणेच इतर सिद्धांत सिद्ध करता येतात.

८२. वरच्या दोनहीत लेखांत जे सिद्धांत सिद्ध केले ते खाली पुनः लिहिले आहेत आणि ते कोणत्याही गोलीय त्रिकोणास लागू आहेत : -

$$\text{कोभुग} = \text{कोमुज कोमुड} + \text{मुज मुड कोमुक} \quad \dots (१)$$

$$\text{कोमुज} = \text{कोभुग कोमुड} + \text{मुग मुड कोमुच} \quad \dots (२)$$

$$\text{कोमुड} = \text{कोभुज कोभुग} + \text{मुज मुग कोमुठ} \quad \dots (३)$$

$$\text{कोमुक} = \text{— कोमुच कोमुट + मुच मुट कोमुग} \quad \dots (४)$$

$$\text{कोमुच} = \text{— कोमुक कोमुट + मुक मुट कोमुज} \quad \dots (५)$$

$$\text{कोमुट} = \text{— कोमुच कोमुक + मुच मुक कोमुड} \quad \dots (६)$$

८३ गोलीय त्रिकोणाच्या कोनाच्या भुज्या त्या कोनासमोरील बाजूच्या भुज्येशी प्रमाणांत असतात.

वरच्या लेखातील समीकरण (१) वरून

$$\text{कोमुक} = \frac{\text{कोमुग} - \text{कोमुज कोमुड}}{\text{मुज. मुड}}$$

$$\text{मुक} = १ - \frac{(\text{कोमुग} - \text{कोमुज कोमुड})^२}{\text{मुज मुड}}$$

$$= \frac{\text{मुज मुड} - (\text{कोमुग} - \text{कोमुज कोमुड})^२}{\text{मुज मुड}}$$

$$\text{मुक} = \frac{(१ - \text{कोमुज}) (१ - \text{कोमुड}) - (\text{कोमुग} - \text{कोमुज कोमुड})^२}{\text{मुज मुड}}$$

$$\text{मुक कोमुज कोमुड} = \begin{cases} १ - \text{कोमुज} - \text{कोमुड} + \text{कोमुज कोमुड} \\ - \text{कोमुग} & २ \text{ कोमुग कोमुज कोमुड} - \text{कोमुज कोमुड} \\ १ - \text{कोमुग} - \text{कोमुज} - \text{कोमुड} & २ \text{ कोमुग कोमुज कोमुड} \end{cases}$$

$$\frac{\text{मुक}}{\text{मुग}} = \frac{१ - \text{कोमुज} - \text{कोमुड} + \text{कोमुज कोमुड}}{\text{मुग मुज मुड}} \quad २ \text{ कोमुग कोमुज कोमुड}$$

ह्याचप्रमाणे $\frac{\text{मुच}}{\text{मुज}}$ किंवा $\frac{\text{मुट}}{\text{मुड}}$ ची किंमत काढिली तर उजवीकडचा

अपूर्णांक निव्वळ सारखा येतो म्हणून,

$$\frac{\text{मुक}}{\text{मुग}} = \frac{\text{मुज}}{\text{मुज}} = \frac{\text{मुट}}{\text{मुड}}$$

वर्गमूळ काढिले तर,

$$\frac{\text{मुक}}{\text{मुग}} = \frac{\text{मुच}}{\text{मुज}} = \frac{\text{मुट}}{\text{मुड}} \quad (७)$$

म्हणून गोलीय त्रिकोणाच्या कोनाच्या भुज्या त्या कोनासमोरील बाजूच्या भुज्येशी प्रमाणांत असतात.

८४. गोलीय त्रिकोणाच्या बाजू आणि कोन यांचा एकमेकांशी असलेला संबंध दाखविणारे कोस्पशरेषात्मक सिद्धांत.

लेख ८२ मधील (१) हा सिद्धांत पहा.

$$\text{कोमुग} = \text{कोमुड कोमुज} + \text{मुड. मुज कोमुक.}$$

ह्या समीकरणास भुग.मुज ने भागिले,

$$\frac{\text{कोमुग}}{\text{भुग. मुज}} = \frac{\text{कोमुड कोमुज}}{\text{भुग. मुज}} + \frac{\text{मुड}}{\text{भुग}} \times \text{कोमुक} \quad (\text{अ})$$

$$\frac{\text{मुक}}{\text{भुग}} = \frac{\text{मुट}}{\text{मुड}}$$

तेव्हा $\text{मुक} \times \text{मुड} = \text{भुग} \times \text{मुट}$

ह्या वरोवरीला मुक \times भुग ने भागिले तेव्हा,

$$\frac{\text{मुड}}{\text{भुग}} = \frac{\text{मुट}}{\text{मुक}}$$

ह्यास कोमुक ने गुणिले तर,

$$\frac{\text{मुड}}{\text{भुग}} \times \text{कोमुक} = \frac{\text{मुट}}{\text{मुक}} \times \text{कोमुक} = \text{मुट कोस्पक.} \quad (\text{ब})$$

लेख ८२, समीकरण (३) ह्यास $\frac{\text{कोमुज}}{\text{भुग. मुज}}$ ह्या पदाने गुणिले.

$$\text{कोमुड} = \text{कोमुज कोमुग} + \text{मुज भुग कोमुट}$$

$$\frac{\text{कोमुड कोमुज}}{\text{भुज. मुग}} = \text{कोमुज} \frac{\text{कोमुग}}{\text{भुग. मुज}} + \text{कोमुज कोमुट} \quad (\text{क})$$

(अ) समीकरणानील उजवीकडचे पेट्यानीक पदाच्या किमती (ब) आणि (क) ह्या समीकरणात आहेत त्या (अ) समीकरणान ठेवू.

$$\frac{\text{कोमुग}}{\text{भुग. मुज}} = \text{कोमुज} \frac{\text{कोमुग}}{\text{भुग. मुज}} + \text{कोमुट कोमुज} + \text{मुट कोस्पक}$$

$$\frac{\text{कोस्पक}}{\text{भुज}} = \text{कोमुज} \frac{\text{कोस्पक}}{\text{भुज}} + \text{कोमुट कोमुज} + \text{मुट कोस्पक.}$$

$$\frac{\text{कोस्पक}}{\text{भुज}} (1 - \text{कोमुज}) = \text{कोमुट कोमुज} + \text{मुट कोस्पक}$$

$$\text{कोस्पक भुज} = \text{कोमुट कोमुज} + \text{मुट कोस्पक.}$$

हा जो मिद्धांत सिद्ध केला ह्याप्रमाणेच आणखी दोन सिद्धांत सिद्ध होतात. आणि ध्रुवक त्रिकोणाच्या घर्माने आणखी तीन सिद्धांत सिद्ध होतात.

८५. वरच्या दांत लेखात सिद्ध केलेले महा मिद्धांत खाली दिले आहेत —

$$\text{कोस्पग भुज} = \text{कोभुट कोभुज} + \text{भुट कोस्पक} \quad \dots (८)$$

$$\text{कोस्पज भुग} = \text{कोभुट कोभुग} + \text{भुट कोस्पच} \quad \dots (९)$$

$$\text{कोभुज भुड} = \text{कोभुक कोभुड} + \text{भुक कोस्पच} \quad \dots (१०)$$

$$\text{कोस्पड भुज} = \text{कोभुक कोभुज} + \text{भुक कोस्पट} \quad \dots (११)$$

$$\text{कोस्पड भुग} = \text{कोभुच कोभुग} + \text{भुच कोस्पट} \quad \dots (१२)$$

$$\text{कोस्पग भुड} = \text{कोभुच कोभुड} + \text{भुच कोस्पक} \quad \dots (१३)$$

८६. गोलीय त्रिकोणमितांचे आणखी काही सिद्धांत सिद्ध होतात ते खाली सिद्ध केले आहेत :—

लेख ८३ मधील सिद्धांत पहा.

$$\frac{\text{भुक}}{\text{भुग}} = \frac{\text{भुच}}{\text{भुज}}$$

$$\text{म्हणजे} \quad \text{भुक} : \text{भुग} :: \text{भुच} : \text{भुज}$$

$$\text{मध्य विनिमयाने} \quad \text{भुक} : \text{भुच} :: \text{भुग} : \text{भुज}$$

$$\text{उपाग्र संयोगाने} \quad \text{भुक} + \text{भुच} : \text{भुच} :: \text{भुग} + \text{भुज} : \text{भुज}$$

$$\text{भुक} + \text{भुच} = \frac{\text{भुच}}{\text{भुज}} (\text{भुग} + \text{भुज}) \quad (\text{अ})$$

ह्याचप्रमाणे उपाग्रविभागाने.

$$\text{भुक} - \text{भुच} = \frac{\text{भुच}}{\text{भुज}} (\text{भुग} - \text{भुज}) \quad (\text{ब})$$

लेख ८२ मधील समीकरण (४) व (५) वरून

$$\begin{aligned} \text{कोभुक} + \text{कोभुच} &= - \text{कोभुच कोभुट} - \text{कोभुक कोभुट} \\ &+ \text{भुचभुट कोभुग} + \text{भुकभुट कोभुग} \\ &= - (\text{कोभुच} + \text{कोभुक}) \text{ कोभुट} \\ &+ (\text{भुच कोभुग} + \text{भुक कोभुज}) \text{ भुट} \end{aligned}$$

$$(१ + \text{कोभुट}) (\text{कोभुक} + \text{कोभुच}) = \text{भुट} (\text{भुक कोभुग} + \text{भुज कोभुज})$$

$$(\text{कोभुक}, \text{कोभुव}) = १, \frac{\text{भट}}{\text{कोभुट}} (\text{भुवकोभग}, \text{भुकवोभुज}) \quad (क)$$

लेख ६२, समीकरण (९) व (१०) ह्यास (११) ने भागिले तर

$$\frac{\text{भुअ} + \text{भुब}}{\text{कोभुअ} + \text{कोभुव}} = \text{स्प} \frac{\text{अ} + \text{ब}}{२}$$

$$\text{आणि} \quad \frac{\text{भुअ} - \text{भुब}}{\text{कोभुअ} + \text{कोभुव}} = \text{स्प} \frac{\text{अ} - \text{ब}}{२}$$

$$\text{म्हणून} \quad \frac{\text{भुक} + \text{भुच}}{\text{कोभुक} + \text{कोभुच}} = \text{स्प} \frac{१}{२} (क + च) \text{ आणि } \frac{\text{भुक} - \text{भुच}}{\text{कोभुक} + \text{कोभुच}} = \text{स्प} \frac{१}{२} (क - च)$$

समीकरण (अ) आणि (ब) ह्यास (१) ने प्रत्येकी भागिले असतां द्यावाकडे जे पेटे येतात त्याच्या निम्मी नगार केल्या आहेत, पण उजवाक डब्या पेट्याचे स्पष्टीकरण करावयाचें आहे.

$$\begin{aligned} \text{स्प} \frac{१}{२} (क + च) &= \frac{\text{भुव}}{\text{भुज}} \frac{\text{भुग} + \text{भुज}}{\text{भुवकोभुग} + \text{भुककोभुज}} \times \frac{१ + \text{कोभुट}}{\text{भुट}} \\ &= \frac{\text{भुग} + \text{भुज}}{\text{भुजकोभुग} + \text{भुज} \frac{\text{भुक}}{\text{भुव}} \text{कोभुज}} \times \frac{१ + \text{कोभुट}}{\text{भुट}} \end{aligned}$$

$$\text{पण } \text{भुज} \frac{\text{भुक}}{\text{भुव}} \text{कोभुज} = \text{भुगकोभुज}$$

$$\text{आणि } \text{भुगकोभुज} + \text{भुजकोभुग} = \text{भु}(ग + ज)$$

$$\text{तसेंच } \frac{१ + \text{कोभुट}}{\text{भुट}} = \frac{२ \text{कोभुट}}{२ \text{भुट} \text{कोभुट}} = \frac{\text{कोभुट}}{\text{भुट}} = \text{कोस्पट}$$

$$\text{स्प} \frac{१}{२} (क + च) = \frac{\text{भुग} + \text{भुज}}{\text{भु}(ग + ज)} \text{कोस्पट}$$

$$\text{तथापि } \frac{\text{भुग} + \text{भुज}}{\text{भु}(ग + ज)} = \frac{२ \text{भु} \frac{१}{२} (ग + ज)}{२ \text{भु} \frac{१}{२} (ग + ज)} \times \text{कोभु} \frac{१}{२} (ग + ज)$$

$$\text{म्हणून स्प} \frac{१}{२} (क + च) = \frac{\text{कोभु} \frac{१}{२} (ग + ज)}{\text{कोभु} \frac{१}{२} (ग + ज)} \text{कोस्पट} \dots \dots (१४)$$

$$\text{आणि } \frac{\text{भुग} - \text{भज}}{\text{भु} (\text{ग} + \text{ज})} = \frac{२ \text{भु} \frac{१}{३} (\text{ग} - \text{ज})}{२ \text{भु} \frac{१}{३} (\text{ग} + \text{ज})} \frac{\text{कोभु} \frac{१}{३} (\text{ग} - \text{ज})}{\text{कोभु} \frac{१}{३} (\text{ग} + \text{ज})}$$

$$\text{म्हणून स्प} \frac{१}{३} (\text{ग} - \text{ज}) = \frac{\text{भु} \frac{१}{३} (\text{ग} - \text{ज})}{\text{भु} \frac{१}{३} (\text{ग} + \text{ज})} \text{कोस्प} \frac{१}{३} (\text{ग} + \text{ज}) \dots \dots (१५)$$

ह्याप्रमाणेच सिद्ध करतां येतें की,

$$\text{स्प} \frac{१}{३} (\text{ग} - \text{ज}) = \frac{\text{कोभु} \frac{१}{३} (\text{ग} - \text{ज})}{\text{कोभु} \frac{१}{३} (\text{ग} + \text{ज})} \text{स्प} \frac{१}{३} (\text{ग} + \text{ज}) \dots \dots \dots (१६)$$

$$\text{आणि स्प} \frac{१}{३} (\text{ग} - \text{ज}) = \frac{\text{भु} \frac{१}{३} (\text{ग} - \text{ज})}{\text{भु} \frac{१}{३} (\text{ग} + \text{ज})} \text{स्प} \frac{१}{३} (\text{ग} + \text{ज}) \dots \dots \dots (१७)$$

८७. गोलंज त्रिकोणमितीचे पंचपर्यंत जे सिद्धान्त सिद्ध केले ते त्रिकोणाच्याही त्रिकोणासंबंधी गत्य जाणून घ्या प्रत्येक सिद्ध केले जाणेत. तेव्हा काटकोन त्रिकोणासाठी त्यात समावेश होत आहे. म्हणून वरच्या प्रत्येक सिद्धान्तात ट कोन काटकोन जाई असे मानल्याने काटकोन त्रिकोणाच्या बाजू व कोन यांमध्ये असणाऱ्या संबंधांचे सिद्धान्त कळून येतात ज्या सिद्धान्तात ट कोन येईल तेथे त्याची भुजच्या १ घ्यावी, आणि कोभुजच्या ० घ्यावी, म्हणजे तो सिद्धान्त काटकोन त्रिकोणामा लागू होईल. ते सिद्धान्त खाली दाखविले आहेत. वरच्या १७ सिद्धान्तांपैकी ज्या सिद्धान्तावरून काटकोन त्रिकोणाचा सिद्धान्त तयार होतो त्याचा क्रमांक पूर्वी देऊन त्यापुढे तो सिद्धान्त लिहिला आहे.

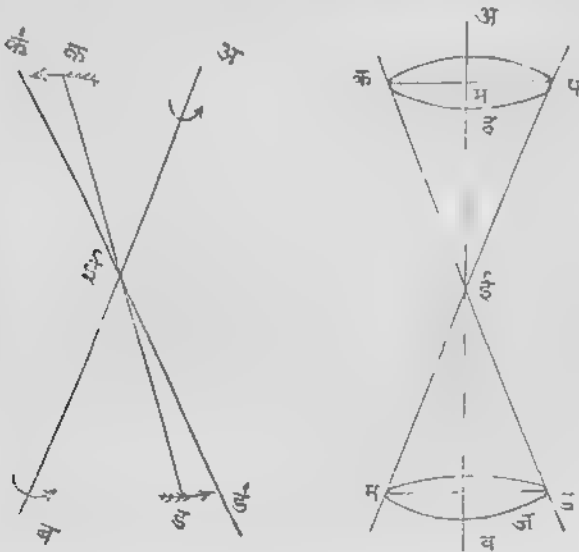
(३)	कोभुड	=	कोभुज.कोभुग	(१)
(४)	कोभुक	=	भुच.कोभुग	(२)
(५)	कोमुच	=	भुक.कोभुज	(३)
(६)	कोभुड	=	कोस्पच.कोस्पक	(४)
(७)	भुग	=	भुक.भुड	(५)
(७)	भुज	=	भुच.भुड	(६)
(८)	स्पग	=	भुज.स्पक	(७)
(९)	स्पज	=	भुग.स्पच	(८)
(११)	स्पज	=	कोभुक.स्पड	(९)
(१२)	स्पग	=	कोभुच.स्पड	(१०)

प्रकरण सहावे

गणित शास्त्रांतील प्रमुख सिद्धांत

वर्तुळ शंकुच्छिन्न

८८. एक अमर्याद सरळ रेषा आहे. ही रेषा दिशान्तरन करिता स्वागमभोवती भ्रमण करित आहे. ह्या रेषेतील एका बिंदूमधून दुसरी एका सरळ रेषा मेली आहे. ही रेषा पूर्वं रेषेला बद्ध अशी आहे. यामुळे पूर्वं रेषेच्या भ्रमणाने ती तिच्या मर्यादवती फिरते. ही रेषा पूर्वं रेषेवर लय नाही लघुकोन करणारी आहे. ह्या रेषा फिरण्याने जी घनकृति उत्पन्न होते तिच्या 'शंकु' म्हणतात. हा उमरुत्ता आकाराचा दोन शंकु एकत्रित असा होतो. यातील आकृतीत नव ही रेषा मर्यादवती फिरणारी रेषा तिच्या वर्तुळ रेषा रेषे मधून जाण म्हणतात. वर्तुळ ही बद्ध रेषा तिच्या फिरण्याने शंकु उत्पन्न जाणे शक्य. वर्तुळ मधील बिंदूमधून जाणारी आणि अन्य रेषेवर भ्रमणने जाणारी लय अशा पातळीने शंकु कापिता असता कट्टी आकृति उत्पन्न होते. ह्या आकृतीचा शंकुच्छिन्न म्हणतात. ह्या चिन्नाने आलेली कट्टी आकृति ही वर्तुळ आहे.



कारण म मध्य करून कम त्रिज्येने हें वर्तुळ निघालें आहे. कव्ह वर्तुळास किंवा गजड वर्तुळास शकुचा पाया म्हणतात. ई बिंदु दोन्ही शकुचा शिरोबिंदु आहे.

८९. (१) कईड ह्या बड रेवेंशी, तिच्या कोणत्याहि स्थितीत, तिच्याशी समानर अशा सरळ पातळीनें शकुला छेदिलें असतां जी आकृति उत्पन्न होणे त्या आकृतीला 'परवलय' असें म्हणतात.

(२) सरळ पातळी, दोहोंपैकीं एकाच शकुला छेदिने ती अशी की, आसाशी काटकोन न करितां व समानर नमना निर्यकोण करिते आणि कईड ह्या बड रेवेंच्या सर्व स्थितींना छेदिने (सर्व पृष्ठ वेवाना छेदिने) अशा छेदनां वा आकृति उत्पन्न होणे त्या 'दीर्घवलय' (किंवा दीर्घवर्तुळ) म्हणतात.

(३) आसाशी समानर अशा सरळ पातळीनें दोन्ही शकु कापिले तेव्हा, ई ला ई त्या शिरोबिंदूच्या दोहीकडे जी दोन चिह्नें होणत (त्याची दोही मिळून एकच आकृति) त्यांना 'उद्वलय' म्हणतात.

९०. वरच्या लेखात ज्या शकुच्छिन्नाकृति लिहिल्या आहेत त्यांना विचार ज्योतिःशास्त्रात फार महत्त्वाचा आहे. गतिशास्त्राचा सामान्यत्वे विचार करिताना परवलय, दीर्घवलय आणि उद्वलय तिहिचा विचार करावा लागतो, पण ग्रहाच्या गतीचा विचार करिताना दीर्घ वक्राकृती चिंतनीय असते. ह्या तिन्ही अकृतींची जी वर लक्षणे दिली आहेत त्या लक्षणावरून त्यांच्याविषयीचे सिद्धांत सिद्ध करिता येत नाहींत, परंतु ह्या अकृतीपैकी प्रत्येक आकृति एका विशेष प्रकारच्या बिंदूनें निधान आहे असें ठरते. वरच्या तीन आकृतिशिषाय चवथी एक आकृति वर दाखविली आहे ती वर्तुळ हे होय. आसाशी काटकोन करणाऱ्या सरळ पातळीनें शकु कापिला तर वर्तुळ ही चिह्नाकृति होते. तेहें एक बिंदुनिधानच आहे. 'दिलेल्या एका बिंदूपासून दिलेल्या रेवेइतक्या अंतरावर असणाऱ्या बिंदूचे जे निधान तें वर्तुळ होय' वर्तुळाला ह्याप्रमाणे बिंदुनिधानाचे स्वरूप देऊन त्या विषयीचे सिद्धांत भूमितीमध्ये सिद्ध केलें त्याप्रमाणेंच परवलय, दीर्घवलय व उद्वलय याची बिंदुनिधानाची स्वरूपे घेऊन त्याचे सिद्धांत सिद्ध करावे लागतात. यासाठीं प्रथम त्याची बिंदुनिधान स्वरूपे काय आहेत तीं ठरविलीं पाहिजेत.

९१. परवलय—याचे लक्षण लेख मधील (१) ह्या अकी दिलें आहे. त्या लक्षणाप्रमाणें शकुचा छेद करून परवलयाची आकृति खालच्या आकृतिमध्ये दाखविली आहे. (आकृति पहा.)

पातळीतील शनह ही एक रेषा आहे. ही शनह रेषा कागदाची पातळी व छेदक पातळी ह्या दोन्ही पातळ्यांची छेदक रेषा आहे. ही रेषा ईद म्हणजे शकूचा पृष्ठ वेध ह्याशी समांतर आहे. शमभ ह् चिह्नाकृति परबलयाची आहे.

(३) ईशन हा कोन दुभंगला आणि दुभंगणागे रेषा ईम रेषेला मिळपर्यंत वाडविली ती थ बिदुने ईम आसाला मिळाली. थ बिदुनून जन वर धक रथ काडिला थ ईदला मिळपर्यंत वाडविलं, तो फ बिदुन ईदला मिळाली थ मध्य करून धक त्रिउपेने फमक वर्तळ वाडिले, हे वर्तळ ईद, ईड आणि शन ह्या तिन्ही रेषास स्पर्श करीत आहे. हे वर्तळ ईम आगाराभोवती फिरव्याने गोल बनला आहे व तो शकूच्या वक्रपृष्ठाला आतून स्पर्श करीत आहे. त्या स्पर्श करणाऱ्या बिदुने फलग वर्तळ बनत ह्या वर्तळाची पातळी, दपड ह्या पायाच्या वर्तळाच्या पातळीशी समांतर आहे.

(४) शन रेषा दड रेषेला न बिदुन मिळते न बिदुन वागदाच्या पातळीत आणि छेदक पातळीतही आहे. छेदक पातळीने पायाच्या दपड वर्तळाला न बिदुन छेडिले आहे. पन बिदु साधते. पन ही रेषा लव पातळीत अगल्यापडे दड रेषेवर लव आहे. फम आणि नश ह्या वाडविल्या त्या थ बिदुत एम-मेकीस मिळता. थ बिदुनातून फला रेषेवर लव लव वाडिला. अर्थात शम रेषा नपम ह्या म्हणजे छेदक पातळीतच असली पाहिजे.

(५) क्षमची पम समांतर वाडिली तेव्हा क्षनपम ह् समांतर भुज चौकोन झाला. म्हणून

पम = नश = दफ. [कारण दफक्षम समांतर भु. चौ.]

ईदक शकु हा ईद ह्या वक्र रेषेच्या भ्रमणाने उत्पन्न झाला आहे. द बिदु प बिदुपर्यंत भ्रमण करीत आला तर फ बिदु ल स्थानी येईल, आणि द बिदु उ स्थानी आला तर फ बिदु ग स्थानी येईल यावरून

दफ = पल = डग

प बिदुनातून थ गोलाचा पक प-र ह्या दोन मार्ग रेषा काडिल्या आहेत त्या परस्पर समान आहेत. म्हणून

पम = पक.

पनश हा कोन काटकोन आहे म्हणून पनक्षम हा काटकोन चौकोन आहे, म्हणून पम ही रेषा क्षम वर लव आहे.

(६) प बिदु दपड ह्या पायाच्या वर्तळाच्या परीषावरच्या बिदु असून शमभ ह्या परबलयाच्या वक्र रेषेवर आहे. दाड पाया ई बिदुकडे नेला तर प बिदुही

क हे केंद्र आणि क्षम ही नायिका दिली आहे. तर परवल्य काढा. यमग हा गुण्या आहे. मग इनक्या लावीचा रेणमी दोरा व ठिकाणी पक्का बांधा आहे व त्याचे दुसरे टोक क ठिकाणी पक्के बांधिले आहे. प ही पेन्मिळ दोन्याला दावून गुण्याला चिटकून घरली आहे. गुण्याची दुसरी मग वाजू नायिकेला चिकटून वर सारली म्हणजे श भ प ही परवलयाची आकृति तयार होते

ह्या आकृतीत कप — पम; कभ : भन; आहे म्हणजे प विदूचे नायिकेचे अंतर (रेषा आणि विदु यामधील अंतर म्हणजे त्या विदुपासून त्या रेपेवरचा लव) पम आणि केंद्रांतर पक समान आहे. याप्रमाणे भ म, भ, या विदूचे केंद्रांतर व नायिकांतर समान आहे. यावरून शम-भ, ही रेषा नायिका व केंद्र यापासून समान अंतर असणाऱ्या विदूचे निधान आहे.

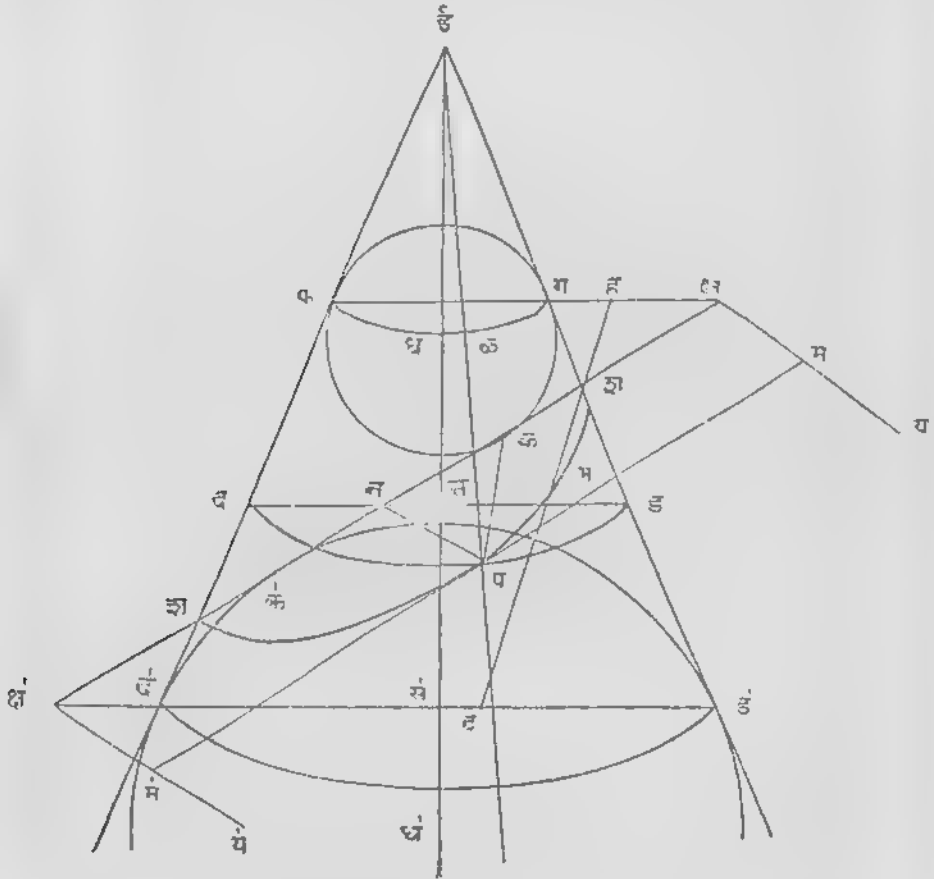
९३. परवलयाचे अनेक सिद्धांत आहेत ते पुढे सिद्ध करावयाचे आहेत. ह्या शंकुच्छिन्नाचे आद्यभूत लक्षण वर सिद्ध केले आहे, तसेच दीर्घवलय आणि उद्वय याची लक्षणे सिद्ध करावयाची आहेत. ती शंकुच्छिन्नेही विदूची निधानेच आहेत. ह्याचें स्पष्टीकरण खाली करित आहे.

९४. दीर्घवलय—याचें लक्षण लेख ८९ मध्ये (२) ह्या अंकी दिले आहे त्या लक्षणाप्रमाणे शंकूचा छेद करून दीर्घवलयाची आकृति साळच्या आकृतीमध्ये दाखविली आहे. (आकृति पहा.)

ईदड हा शंकु आहे, दुसरा शंकु ह्या आकृतीत दाखविला नाही. क्षमम'क्ष' ही छेदक पातळी आहे. ही पातळी आभाशी समानर नाही आणि पण्ड येमा-मिती समानर नाही. तसेच ही पातळी दुसऱ्या शंकूला छेदित नाही, व स्वर्गही यत्नात नाही. ह्या पातळीने शंकूला छेदिल्यामळे होणाऱ्या चिन्नाचा जगपश' हा भाग दिमत आहे. हा भाग दीर्घवलयाचा दिमत आहे. तेव्हा दीर्घवलयाच्या वक्ररेषेन कागदाचा शुक आहेत ते सिद्ध करूं.

(१) ह्या आकृतीत ईस हा शंकूचा आंस आहे. आणि त्या आसावरूनच अनपारी दमड रेषा आहे. ह्या रेषांमधून जाणाऱ्या सगळ्यापातळीने हा शंकु कापिला असता आपणाकडील त्याचा अर्धा भाग आकृतीत दाखविलेला दिमत आहे. दमड हे अर्धवर्तुळ शंकूच्या वर्तुळभागाचे अर्ध आहे. इम आणि दमड रेषा कामदाच्या पातळीत आहेत. शंकूचा कागदाच्या पलीकडचा अर्धा भाग आकृतीत दाखविलेला नाही.

(२) जोड शून्येची एक शकु, ईम आमाणी किवा ईद ईउ पृथ्वंवांणी सम नर नाही अया, आणि कागदाच्या पातळीवर लव अया, सरळपातळीने छेदिता आहे. ह्या छेदक पातळीतील शतय ही रेपा कागदाच्या पातळीनरी आहे. म्हणजे ही रेपा दोन्ही पातळ्यांची छेदक रेपा आहे, ह्या रेपेला "छिन्न मध्य रेपा" म्हणावे. ह्या छेदनाने छेदक पातळीवर "शभपण" ही वक्र रेपा दिसत आहे. हा दीर्घवल्याचा अर्धा भाग आहे.



(३) लेख ११ मधील स्पष्टीकरणांतील विभागाक (३) प्रमाणे. ध केंद्रगोल बाहून क केंद्र ठरविले. त्याप्रमाणेच द' श' न कोन दुभागून ध केंद्र गोल बाहिरा आणि क' केंद्र ठरविले.

(४) लेख ११ मधील स्पष्टीकरणांतील विभागाक (४) प्रमाणें.

(५) क्षन शी पम समांतर केली तेव्हां

$$पम = नक्ष$$

ईदड शकु हा ईद ह्या बद्ध रेपेच्या भ्रमणाने उत्पन्न आला आहे. द विंदु प विंदुपर्यंत भ्रमण करीत आला तर फ विंदु ल स्थानी येईल, आणि द विंदु ड स्थानी आला तर फ विंदु ग स्थानी येईल. ह्यावरून—

$$दफ = पल = डग$$

प विंदुपासून व गोलाला पक पल ह्या दोन स्पर्शरेषा काढिल्या आहेत. गोलाला त्या बाहेरील एका विंदूपासून बाटेल तिनच्या स्पर्शरेषा काढिता येतात, व त्या सर्व समान असतात म्हणून—

$$पल = पक$$

पनक्ष कोन बाटकोन आहे, म्हणून पनक्षम हा बाटकोन चौकोन (अर्थात समांतरभुज चौकोन) आहे. म्हणून पम ही रेषा क्षम वर लंब आहे.

ह्यावरून—

$$\frac{पक}{पम} = \frac{पल}{पम} = \frac{पल}{नक्ष} = \frac{डग}{नक्ष}$$

(६) दोन सरूप त्रिकोणांपैकी एका त्रिकोणाच्या बाजू दुसऱ्या त्रिकोणाच्या बाजूशी प्रमाणात असतात, त्या अशा प्रकारे प्रमाणात असताना, त्या प्रमाणात समान कोना समोरच्या बाजू एकास्पद असतात. गणक्ष आणि डशन हे दोन त्रिकोण सरूप आहेत कारण, गक्ष नड ह्या रेषा समांतर आहेत. तेव्हा

गक्षन कोन = शनड कोन, व शडन कोन — गगक्ष कोन; गगक्ष कोन — डडशन कोन
म्हणून, गक्ष : शक्ष :: शड : नक्ष (अ).

(७) चार राशी प्रमाणात असले तर ने, (१) मध्य विनिमयाने प्रमाणात असतात, (२) अग्र संयोगाने प्रमाणात असतात, (३) उपाग्र संयोगाने प्रमाणात असतात, (४) मयोग त्रियोगाने प्रमाणात असतात, आणि (५) व्युत्क्रमयाने ही प्रमाणात असतात. यांची उदाहरणे खाली दिली आहेत :—

क : च :: ट : त हे चार राशी प्रमाणांत आहेत,

(१) क : ट :: च : त मध्य विनिमयाने प्रमाणांत आहेत,

- (२) क + च : च :: ट + त : त अग्र संयोगानें प्रमाणांत आहेत,
 (३) क : क + च :: ट : ट + त उपाग्र संयोगानें प्रमाणांत आहेत,
 (४) क + च : क च :: ट + त : ट + त म. वियोगाने प्रमाणांत आहेत,
 (५) च : क :: त : ट व्युत्क्रमणानें प्रमाणांत आहेत.

(८) विभागांक (६) मधील (अ) ह्या प्रमाणांत

गश : शक्ष :: शड : नश.

मध्य विनिमयानें गश : शड :: शक्ष : नश.

अग्र संयोगानें गश + शड : शड :: शक्ष + नश : नश.

रूप भेदानें गड : शड :: नक्ष : नश.

मध्य विनिमयानें गड : नक्ष :: शड : नश.

परंतु—

गड = पल = पक. [विभागांक (५)]

आणि नक्ष = पम.

म्हणून पक : पम :: गश : शक्ष.

रूप भेद $\frac{\text{पक}}{\text{पम}} = \frac{\text{गश}}{\text{शक्ष}} = \frac{\text{कश}}{\text{शक्ष}}$ [गश = कश].

(१) शशप ह्या दीर्घ वल्गवाच्या वक्र रेपेवर प चिद् कांठेही असल्या तरी त्या विद्वपासून छिन्नमध्य रेपेचा जो शश भाग त्यावर लव काढिला तर (वक्र रेपेवर प सोडून प घेतला) तो प तं लव, आणि प पासून क्षम जे लंबानंतर प म हो घेऊन वरच्या प्रमाणेच सिद्धता केली तर—

$$\frac{\text{पं क}}{\text{प म}} = \frac{\text{कश}}{\text{शक्ष}}$$

ह्यावरून असे मिळते की, शशप शं ही दीर्घवर्तुळाची वक्र रेपा अशी आहे की, त्या वक्र रेपेतील कोणत्याही विद्वपासून क ह्या केंद्रविद्वचे अंतर पक आणि क्षम रेपेचे लंबानंतर पम याचे गुणोत्तर, कश : शक्ष ह्या एकाच गुणोत्तराबरोबर असते.

येथेही क हे केंद्र आणि क्षम ही नायिका आहे. आणि परवलयामंडवी रेपाविद्वना जी नामावली योजिली तीचीच योजना दीर्घवर्तुळांतही आहे. परंतु दीर्घ वर्तुळाला दुसरे एक केंद्र आणि दुसरी एक नायिका आहे. त्याचे विवरण पुढें केले आहे.

(१०) दं शं न कोन दुभागून दुभागणारी रेषा ईम ह्या शकूच्या अक्षाला भिळेपर्यंत वाढविली, ती ईम ला घं विदूत मिळाली. ध मध्य करून चिछन्नमध्य रेषा हिला स्पर्श करणारे वर्तुळ काढिलें, वगैरे विवेचन लेख मनील शाब्दीकरणातील विभागाक (३) प्रमाणे कं वेद्व टरविले. थं केद्व गोल ईद रेपेला द विदूत रपर्श कोणतो दड्या द'द' समानतर काढिली. शश' चिछन्न मध्य रेषा श' कडे वाढविली ती उ'द'ला क्ष' विदूत मिळाली. श'क्ष'वर क्ष'म' लव किवा क्षम'या समानतर केली. शमग वक रेपवरील कोणत्याही प विदूतामून क्ष'म'वर पम' लव केला आणि पम' साधले. द'श'क्ष' आणि दशन हे दोन स्वरुप विकोण घेऊन ह्याच लेखातील विभागाक (५) ते (९) प्रमाणे सिद्ध होते कीं—

$$\begin{array}{cc} \text{पक'} & \text{क'श'} \\ \text{पम'} & \text{श'क्ष'} \end{array}$$

ह्याप्रमाणे सिद्ध होणे की क' केद्व आणि क्ष'म' ही नांवाचा आहे. ह्याप्रमाणे दीर्घ वलयाळा दोन केद्वे, दीन शिरोविदु आणि दोन नायिका असतात.

९५. बृहदक्ष.—दीर्घ वर्तुळाच्या एका शिरोविदूतामून दुसऱ्या शिरोविदूतपर्यंत चिछन्न मध्य रेपेचा जो भाग शश' त्याला त्या दीर्घ वर्तुळाचा 'बृहदक्ष' म्हणतात. बृहदक्षचे समान दोन भाग करणारा जो विदू त्याला दीर्घ वर्तुळाचा मध्य म्हणतात.

सगत.—दीर्घ वर्तुळाच्या मध्याच्या एकाच अगम अगणाच्या केद्व शिरोविदु व नायिका यास परस्पराचे सगत म्हणतात.

९६. दीर्घ वलयाच्या एका शिरोविदूतामून तत्सगत केद्व व नायिका याची अतरे दुसऱ्या शिरोविदूतामून तत्सगत केद्व व नायिका याच्या अनराशी अनुक्रमे समान असतात.

हा ह्या शिरोविदूशी क केद्व आणि क्षय नायिका सगत आहे, आणि श' ह्या शिरोविदूशी क' केद्व आणि क्ष'य नायिका ही सगत आहेत. तर कश आणि शक्ष ही अतरे अनुक्रमे क'श' आणि श'क्ष' ह्या अंतराशी समान असतात. असें सिद्ध करावयाचे आहे. आकृति पहा.—

$$\text{शक} + \text{कक'} = \text{शक'}.$$

$$२ \text{ शक} + \text{कक'} = \text{शक'} + \text{शक}.$$

$$\text{परंतु} \quad \text{शक'} = \text{शड'} [\text{ध' गोलंज्या स्पर्श रेषा. }]$$

$$\text{म्हणून } २ \text{ शक} + \text{कक'} = \text{शड'} + \text{शक} = \text{शड'} + \text{शश} = \text{गड'}.$$

$$\text{तसेंच श'क' } + \text{कक'} = \text{श'क}.$$

२ श'क' + क' = श'क' + श'क'.

परंतु श'क' = श'फ' [घ गोलाच्या स्पर्श रेखा].

म्हणून २ श'क' : क'क' = श'क' + श'क' : द'श' । श'फ' = द'फ'.

पण गड' = फद'.

म्हणून २ शक + कक' = २ श'क' = कक'.

यास्तव शक = श'क'.

किंवा कश = क'श'.

१८. रेपेची या विदूषून वृक्ष ह्यो समांतर रेखा काढिली. त्याच त्रिकोण द'श'द' त्रिकोणाशी एकरूप आहे असे सिद्ध करायचे आहे. फक्ष आणि ड'क्ष' ह्या समांतर रेखांना क्षक्ष' रेखा छेदिते म्हणून शक्षह कोन = श'क्ष'द' कोन आणि त्याच समांतर रेखास ईद' रेखा छेदिते.

म्हणून क्षफद' कोन = फद'क्ष' कोन.

आणि क्षफद' कोन = क्षह्य कोन [कारण हट ही फद समांतर].

म्हणून क्षह्य कोन = क्ष'द'क्ष कोन.

तसेच ईफग कोन = ईफ कोन = शगह कोन.

पण ईफग कोन = गह्य कोन [हट फद समांतर].

म्हणून शगह कोन = गह्य कोन.

यास्तव शग बाजु = शह बाजु.

आता वृक्षक्ष आणि द'श'क्ष' ह्या दोन त्रिकोणात पहिल्याचे शक्षह आणि शहक्ष कोन व शह बाजु हे अवयव दुसऱ्याचे श'क्ष'द' आणि श'द'क्ष' हे कोन व श'द' बाजु ह्या अवयवाशी अनुक्रमे समान आहेत म्हणून हे दोन त्रिकोण एकरूप आहेत. यास्तव

शक्ष = श'क्ष'.

१७. दीर्घ वलयाच्या परीघावर कोठे तरी प हा एक बिंदु आहे, तर दोन्ही केंद्रांपासून जी त्या बिंदूची पक पक' ही अतरे त्याची वैरीज शश' ह्या वृहदक्षाबरोबर असते.

पक = पल आणि पक' = पर

पक + पक' = पल + पर = गड' = गश + शड'.

पण गश = क'श' आणि शड' = शक'.

म्हणून पक + पक' = शक' + क'श' = शश'.

शेज' वृहदक्षाचे समान दोन भाग करणारा जो ध बिंदु त्यापासून वृहदक्षावरच लव काढिला, व तो लव दीर्घ वलयाच्या परीघाला वव' बिंदूत मिळाला, तेव्हा ह्या वव' रेषेला दीर्घवर्तुळाचा लव्यक्ष म्हणतात.

९८. दीर्घवर्तुळाच्या वक्ररेषेत पुढील धर्म असतात.

(१) दीर्घवर्तुळाच्या वक्ररेषेतील म्हणजे परीघातील प्रत्येक बिंदूचे, कोणत्या एका केद्रापर्यंत असलेले एक अंतर आणि त्याच केद्राशी संगत अशा नायिकेपर्यंत लवांतर पम यांचे गुणोत्तर एकाच सम अपूर्णाक मध्येइतके असते. म्हणजे

$$\frac{\text{पक}}{\text{पम}} = \frac{\text{प'क}}{\text{प'म}} = \text{एक ह्या सधेपेक्षा कमी असा अपूर्णाक.}$$

(२) दीर्घवर्तुळाच्या वृहदक्षाचा मध्य ध बिंदु ह्यापासून दोन्ही वट्टे समान अंतरावर असतात. तथाच दोन्ही नायिकाही समान अंतरावर असतात.

(३) दीर्घवर्तुळाच्या वक्ररेषेतील एका बिंदूपासून दोन्ही केद्रांपर्यंत असलेल्या अंतरांची बेरीज वृहदक्षावरोवर असते.

बिंदु निधान

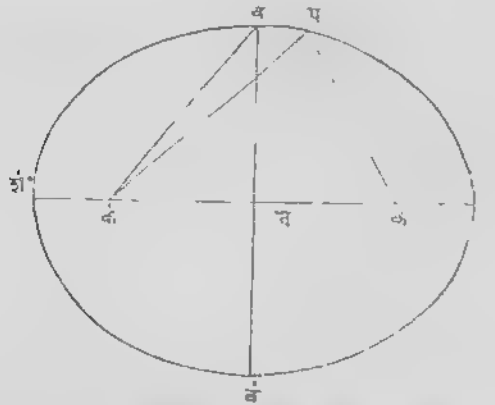
९९. दीर्घवर्तुळ हे एका प्रकारच्या बिंदुचे निधान आहे. ते असे—ज्याचा पाया एकच आहे, व त्यावर अनेक त्रिकोण काढिले आहेत, ते त्रिकोण असे आहेत की, त्याच्या पायावरील इतर दोन बाजूंची बेरीज दिलेल्या (पायापेक्षा जास्त अशा) रेषेवरोवर असेल.

यात्रिक पद्धतीने दीर्घवलयाची आकृति कशी काढता येते ते खाली दाखविले आहे.

आकृति काढणे

अशा हा वृहदक्ष आणि क'क ही केंद्रे दिली आहेत, तर दीर्घवल्य काढण्याचे. एक जाड कागदाचा तुकडा घेऊन त्यावर अशा एवढी रेषा काढा. त्या रेषेवर अशा क'क आणि ध बिंदूच्या खुणा करा आणि ह्या रेषेवरच कागदाच्या तुकड्याला घडी पाडा. नंतर जागल्या रेशमी दोरा घेऊन मुद्दामध्ये ओवून त्या दोऱ्याचे एक टाक कागदाच्या तुकड्याला शिवून पक्के गुंतावा. सुईने व बिंदूत भोंक पाडून दोरा कागदाच्या तुकड्याच्या दुसऱ्या भागास बांधा व क' बिंदूत भोंक पाडून दोरा पहिल्या अंगाम घ्या. क'क मधील दोरा व'श -! करा इतक्या

लावीचा ठेवून दुसरें टोक कागदाच्या पट्टी ला पक्के मिवा. ही कागदाची दुहेरी पट्टी श'श बृहदावर जळवा. दोन्यःमध्ये पेंसिलचे टोक ठेवून ते श'श रेषेच्या वरच्या अंगास दोरा विला न पडू देता फिरवा. म्हणजे



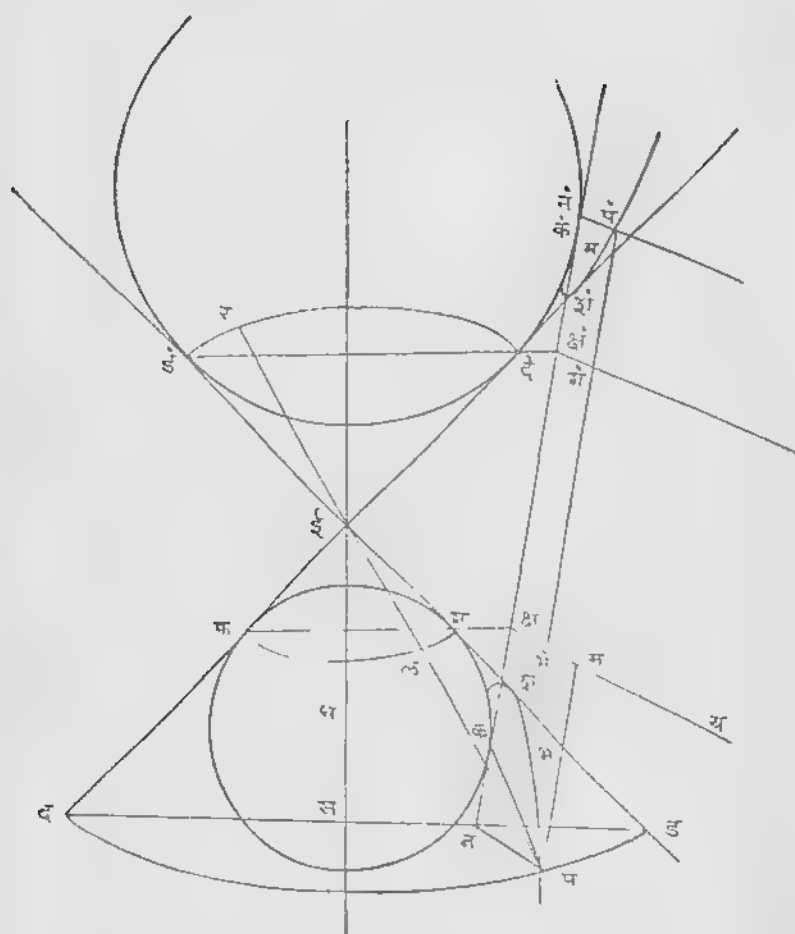
श'शच्या वरच्या अंगाचे दार्धवल्याची आकृति तयार होईल. नंतर कागदाची दुहेरी पट्टी श'शला जळवून खालच्या अंगाची दार्धवल्याची आकृति काढा. म्हणजे श'वागव' ही दार्धवल्याची आकृति तयार होईल.

१००. लघ्वक्षाचे व टोक आणि क केद्र (कोणतेही) यास मांथणारी रेषा बृहवक्षाच्या (शश ह्या) अर्धा बरोबर असते.

हा सिद्धांत वरच्या आकृतीत सिद्ध झालाच आहे.

कारण $वक' + वक = २ वक' = शश'$

$वक' = श' घ.$



१०१. उद्बल्य—याचें लक्षण लेख ८९ मधील (३) ह्या अंशी दिलें आहे. त्या लक्षणाप्रमाणें शकूचा छेद करून उद्बलयाची आकृति बरच्या आकृतीत दाखविली आहे. (आकृति पहा.)

ईदड आणि ईद' ड' हे दोन शकूचे युग्म आहे. धनपम ही छेदक पातळी आहे. ही पातळी कोणत्याही गूळ वेव्याशी समांतर नसून दोन्ही बाजूला कोपित आहे. गश' न' ही चिह्नमध्यरेषा आहे. दोन्ही बाजूला छेदित्यामुळे यभप आणि य'भ'प' ह्या वक्ररेषा विलंबावृत्तीत भाग रिमून आहे. ह्या वक्ररेषा उद्बलयाच्या अर्धाने. तेव्हा उद्बलयाच्या वक्ररेषामध्ये कोणकोणते गुण आहेत ते मिळ करू.

लेख ९४ मध्ये दीर्घलयाच्या वक्ररेषेविषयी ज्या गोंगटी मिळवेल त्या त्याप्रमाणेच उद्बलयाच्या वक्ररेषासंबंधी मिळ होणाने. त्याच्यात भिन्नत्व इतकेच की, दीर्घ-वर्तुळात एका रेषा पातळीला कमी भगने आणि उद्बलयात पर रेषा पम पक्षा मोठी भगने लेख ९७ मध्ये—

पल = पक आणि पर = पक'
 तेव्हां पर — पल = पक' — पक = गड' = शड' — गश
 पण गश = कश आणि शड' = शक'
 म्हणून शड' — गश = शक' — कश = शक' — क'श' — शश
 यास्तव पक' — पक = शश'

१०२. उद्बलयाच्या शिरोविंदुमध्ये सापडलेला जो अक्षाचा शश' भाग त्यास त्या उद्बलयाचा "पादाक्ष" असे म्हणावें.

पादाक्षाला दुभागणारा जो घ विंदु त्याला त्या उद्बलयाचा मध्य भ्रम म्हणावे.

उद्बलयाच्या मध्याच्या दाहो वाजूस ज्या दोन वक्ररेषा त्यास त्या उद्बलयाच्या शाखा म्हणतात.

१०३. उद्बलयाच्या वक्ररेषेत पुढील घर्म असतात :—

(१) उद्बलयाच्या वक्ररेषेतील प्रत्येक विंदूचे, एका केंद्रापर्यंत असलेले पक अंतर आणि त्याच केंद्राशी सगून अशा नायिकेपर्यंत लंबांतर पम याचे गुणोत्तर एकाच विषम अपूर्णाक संख्येइतकें असतें. म्हणजे

$$\frac{\text{पक}}{\text{पम}} = \frac{\text{प'क}}{\text{प'म}} = \text{एक ह्या संख्येपेक्षां जास्त अपूर्णाक.}$$

(२) उद्बलयाच्या पादाक्षाचा मध्य घ विंदु ह्यापासून दोन्ही केंद्रे समान अंतरावर असतात तशाच दोन्ही नायिकाही समान अंतरावर असतात.

(३) उड्डलयाच्या वक्ररेषेतील एका बिंदूपासून दोन्ही केंद्रांपर्यंत असलेल्या अंतरांची बजावाकी पादाक्षारोवर असते.

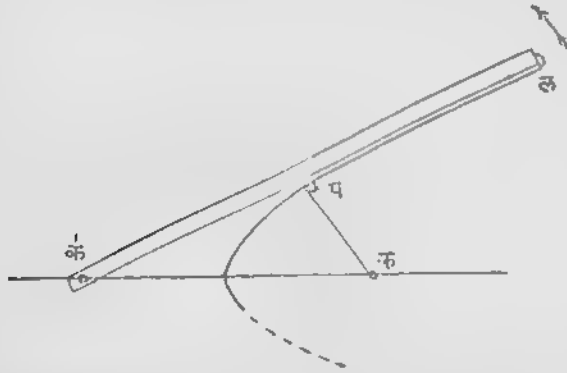
बिंदु निधान

१०४. उड्डलय हे एका प्रकारच्या बिंदूची निधाने आहे ते असे—

अशा बिंदूचे निधान कोणते की, त्या प्रत्येक बिंदूपासून दिलेल्या दोन बिंदूंपर्यंत असलेल्या अंतरांची बजावाकी दिलेल्या त्या दोन बिंदूमधील अंतरावरोवर असेल.

यात्रिक पद्धतीने उड्डलयाची आकृति कशी वाढिता येते ते खाली दाखविले आहे :—

रेषा आगण्याची एक मगळ पट्टी घ्या. त्या पट्टीचे एक टोठ उड्डलय जें काढावयाचे त्याच्या एका केंद्रावर ठेवा. व त्या केंद्रस्थळी एक टाचणी टांचा (कागद व पट्टी ड्राइंग बोर्डवर असावी.)



ही पट्टी केंद्र टाचणीसमोवती कागदाच्या पातळीत फिरती असावी. एक चांगला बळकट दोरा घेऊन त्याचे एक टोंक केंद्राशी पक्कें बांधा. हा दोरा प पेन्सिलीवरून घेऊन लेंद्राशी गुंतावा. पट्टी बाणाच्या दिशेने फिरत आते, तेव्हा प पेन्सिलीच्या टोकानें जी रेषा निघेल ती उड्डलयाची आकृति होईल.

पट्टीची लांबी र रेषा परिमित आहे आणि दोऱ्याची लांबी द रेषा परिमित आहे. तर

$$क'प + पल = र$$

$$\text{आणि } क'प + पल = द$$

$$\text{म्हणून } क'प - क'प = र - द.$$

येथे आपणाम द्विसूत येईल की, २ रेपेपेक्षां द रेपा लहान आहे आणि २—द हे अंतर स्थीर (न बदलणारे) आहे म्हणून उल्लेखन होणारी वक्ररेखा उद्धृत्याची आहे.

१०५. शकुन्तिल भूमितीचे सिद्धान्त पृष्कलच आहेत ते सिद्धांत भूमिति पद्धतीने गोडवून मिद्ध करून त्यावर स्वतंत्र ग्रंथ केल्या आहे. हे सिद्धान्त दोन प्रकारांनी मिद्ध करता येतात. एक भूमिति पद्धतीने आणि दुसऱ्या वीजगणिता पद्धतीने तथा दुसऱ्या पद्धतीला वैज्य-भूमिति म्हणतात. वैज्य-भूमिति ही शब्द गणिताची अत्यंत महत्त्वाची शाखा आहे अनुमान पद्धती आणि वैज्य-भूमिति ह्या युग्माने अनेक महत्त्वाचे सिद्धांत मिद्ध होतात. या कारणांमुळे प्रस्तुत ग्रंथान वैज्य-भूमितीचा विशेष महत्त्व दिले आहे. म्हणून शकुन्तिल भूमितीचे सिद्धान्त रेखा-भूमितीने न मिद्ध करता वैज्य-भूमितीने न मिद्ध करण्याचे योजिले आहे.

१०६. वैज्य-भूमितीमध्ये सर्वत्र समीकरणांचा उल्लेख आहे. सरळ रेपेचे समीकरण, वर्तुळाचे समीकरण, परवलया, दीर्घवलय, उद्धृत्या यांची समीकरणे, ही समीकरणे ठरलेली आहेत. वीजगणिताची परिभाषा आणि घनार्ण नकेत व चिन्ह पद्धति याचे सहाय्य रेखागणिताला मिळाल्यामुळे त्याचा प्रमाविषयीचे सिद्धांत थोडक्यात व शुद्ध रीतीने स्थापित होताना. वैज्य-भूमिति ह्या विषयावर मांडमांडाने ग्रंथ अनेक झाले आहेत. तेव्हा असल्या ह्या विषयाचे परिशीलन ज्योतिर्गणिताचे अभ्यासाला अत्यंत आवश्यक आहे. ह्या विषयाचे मुख्य मुख्य भाग येथे देत आहे.

प्रकरण सातवें

वैज्य-भूमितीचीं मूलतत्त्वे

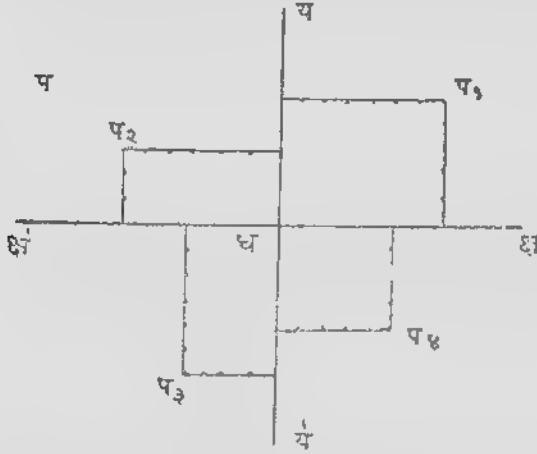
१०३. भूमितीमध्ये जी रेपांची समान असमानता, त्यांची स्थिति परस्पर मीलन व छेदन, त्यामुळे होणाऱ्या कोनाचे मापन व तुलना वगैरे विषयांचे उपपादन करण्याचे कामी बीजगणिताची योजना केली आहे, असा जो शुद्ध गणिताचा भाग त्याला वैज्य-भूमिती असे म्हटले आहे. बीजगणिताची चिन्हपद्धति आणि धनर्ण सकेत याच्या योजनेने विवक्षित विदूचे पातळीमध्ये स्थान कोठे आहे याचा निर्णय, समीकरणाच्या योगाने सरळ अथवा वक्ररेषेची स्थिति निश्चिन करणें, तयेंच त्या समीकरणाच्या सहाय्याने सरळ व वक्ररेषांचे भूमितिप्रियक धर्म स्थापित करणें, दिलेले समीकरण सरळ रेषेचे आहे किंवा वर्तुळाचे अगर दीर्घवर्तुळाचे आहे हे ठरविणे आणि त्यावरून परिमाणासह ती रेपा किंवा ते वर्तुळ याचे लेखन करणें अशी कार्ये वैज्य भूमितीने करिता येतात.

विदूचे पातळीतले स्थान

१०८. विदूला महत्त्व मुळीच नाही परंतु स्थिति मात्र आहे. स्थिति म्हणजे अस्तित्व अथवा स्थान. विदू केवढा अमेल ? या प्रश्नाचे उत्तर, केवढा हे सर्वनाम विदूला याजिगाच येनाही. विदु कोठे अमेल ? तर विदु ह्वाचा त्या स्थानी अमेल, तो पोकळीत आहे व पातळीतही आहे. पोकळी आणि पातळी ह्या अवयवां आहेत. तेव्हा विदु पोकळीत किंवा पातळीत आहे असे म्हटल्याने त्याचे स्थान कळून येत नाही यामागी दुसऱ्या विदूचा उरविजेच्या स्थानाच्या निश्चितीवरूनच इष्ट विदूच्या स्थानाचा बोध होतो. उरविजेच्या विदु रेषेजिवाय जात होत नाही आणि एका रेषेने त्याची जाणीव न होत पातळीतल्या विदूच्या स्थानाची जाणीव व्हावयाम एकमेकीला छेदणाऱ्या दोन रेपांची आवश्यकता असते, आणि पोकळीतल्या विदूच्या स्थानाची जाणीव व्हावयाम एकमेकीस छेदणाऱ्या तीन रेपांची आवश्यकता असते. प्रस्तुत पोकळीतल्या विदूचा विचार बाजूला ठेवून पातळीतल्या म्हणजे सरळ पातळीती व विदूच्या स्थानाचा निर्णय समा करितान हे येथे दाखवावयाचे आहे.

१०९. भूमितिप्रियक ग्रंथांत विदूला एकाद्या अक्षराचे नाव देऊन त्याचे स्थान दर्शवितान. त्या अक्षराने विदूच्या स्थानाचे दर्शन होते, त्या स्थानाचा निर्णय आम्हास लेखनद्वारा करावयाचा आहे. हा निर्णय करण्याकरिता घ हा एक विदु

शोधून घेऊन ठरविला आहे. ह्या बिंदूला प्रस्थापित बिंदु म्हणावे. घ बिंदूपासून एका परिचित दिशेने जाणारी घक्ष रेखा काढिली व ती विरुद्ध दिशेलाही वाढविली आहे. ती वाढविलेली रेखा घक्ष' आहे. क्ष' घ क्ष ह्या रेखा प्रस्थापित रेखा म्हणावे. इच्छि-



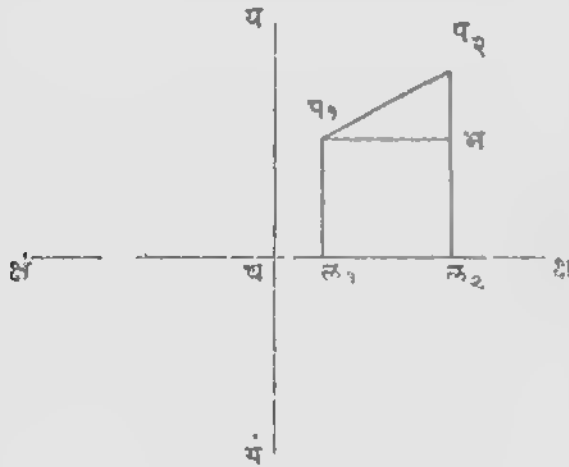
लेला बिंदु ज्या पातळीत आहे त्याच पातळीत क्ष' घ क्ष मगळ रेखा आणि निच्यातील घ बिंदु ही ही आहेत. परंतु एवढ्याच माहितीत त्याच पातळीतील ह्या त्या बिंदूच्या स्थानाचा निर्णय होऊ शकत नाही. यास्तव घ बिंदूत गेलेली जी क्ष' क्ष रेखा आहे निच्याविरहित घ बिंदूत जाणारी दुसरी एखादी रेखा पाहिजे आहे. तसेच ह्या दुसऱ्या रेपेची दिशा व पूर्व क्ष' क्ष रेपेची घ क्ष दिशा यांच्यामध्ये केवढा कोनाचे अंतर आहे तो कोन ही ज्ञात असला पाहिजे. ही दुसरी रेखा घ य ती होय. घक्ष आणि घय यांच्यामध्ये जो कोन आहे तो केवडाही असला तरी आमच्या प्रतिपादनाला कोणत्याही प्रकारचं न्यूनत्व येत नाही. परंतु तो ज्ञान वादकोन म्हणजे ९० अशाचा असला तर प्रतिपादनात आणि कृतीत सीगम्य येतं.

११०. लेख, ५१, ५२ मध्ये जो घनर्ण सकेत दिला आहे आणि प बिंदूचे भुज कोटि घनर्ण स्वीकारून तो कोणत्या पादान आहे याचा निर्णय दिला आहे तोच संकेत येथेही स्वीकारला आहे. वरच्या लेखात जी आकृति आहे निच्य प बिंदु अनुक्रमे चांगी पादान प, प२, प३, प४ असा दाखविला आहे. प, ह्या बिंदूचा य भुज प आहे आणि क्ष कोटि ७ आहे आणि भुज व कोटि दोन्ही धन आहेत. ह्या भुज कोटीची बिंदूच्या स्थानाचा निर्णय होतो. बैज्य-भूमितीत बिंदु दाखवावयाचा असता प, हा बिंदु अ

बिंदु असा दाखवून सांगत नाही तो (३, ५) किंवा सामान्यत्वे (क्ष य) असा दाखवावा लागतो. त्यांत नेहमी कोटि प्रथम भुज नंतर असाच क्रम असतो हे कोटिभुज रेखात्मक देऊन साधत नाही त्या रेखा कोणत्यातरी एकाच रेखा परिमाणाने मोजून आलेल्या मूल्या असाव्या लागतात. कोटि आणि भुज ह्या संख्या जात असतील तर तो बिंदु आपणाला जात आहे म्हणजे माहित आहे असे म्हणतात. वरच्या लेखातील आकृतीत P_1 बिंदु (५, -४) हा होय. आणि $(-३\frac{1}{2}, -६)$ हा P_2 बिंदु होय P बिंदु $(-४, +५)$ हा आहे आणि P_3 बिंदु $(-६, +३)$.

१११. दोन बिंदु दिले आहेत, तर त्या दोन बिंदुमधील अंतर (म्हणजे त्या दोन बिंदुम साधनाच्या रेखांनी लावली किती रेखा परिमाणे हे) सांगावयाचे.

P_1 आणि P_2 हे दोन बिंदु आहेत. आणि याचे भुज* कोटि अनुक्रमे $(क्ष_1, य_1)$ आणि $(क्ष_2, य_2)$ हे आहेत. ह्या दोन बिंदुमधील अंतर ठरवावयाचे आहे.



P_1 बिंदूचे भुज कोटि $क्ष_1 - य_1$ ल, आणि $य_1 - P_1$ ल, आहेत आणि P_2 बिंदूचे भुज कोटि $क्ष_2 - य_2$ ल आणि $य_2 - P_2$ ल, आहेत. P_1 बिंदूपासून P_2 ल,

* भुज कोटि = भुजामह कोटि असा अर्थ लेखनाप्रमाणे घेणे कारण लेखनात प्रथम कोटि म्हणजे क्ष आहे नंतर भुज य आहे.

वर p_1 म लव काडिला, तेव्हा p_1 म p_2 काट कोन त्रिकोण झाला म्हणून

$$\begin{aligned}(p_1 p_2)^2 &= (p_1 m)^2 + (p_2 m)^2 \\&= (घल_1 - घल_2)^2 + (प_1 ल_1 - मल_2)^2 \\&= (क्ष_1 - क्ष_2)^2 + (य_1 - य_2)^2 \dots (१)\end{aligned}$$

११० कोणत्याही दोन बिंदूने भुज कोटि ज्ञान असले तर त्या दोन बिंदूमधील अंतर ज्ञात होते ते अंतर r ह्या अक्षराने दाखविले तर

$$r = \sqrt{(क्ष_1 - क्ष_2)^2 + (य_1 - य_2)^2}$$

लेख १०९ मधल्या आकृतीत p_1 आणि p_2 या दोन बिंदूने भुज कोटि दिले आहेत ते p_1 चे (७, ५) आणि p_2 चे (-६, -३) हे आहेत तेव्हा $p_1 p_2$ ह्या दोन बिंदूमधील अंतर r ची किंमत खाली दिल्याप्रमाणे

$$\begin{aligned}r^2 &= \left\{ (७) - (-६) \right\}^2 + \left\{ (५) - (-३) \right\}^2 \\&= १३^2 + ८^2 = १६९ + ६४ = २३३ \\r &= \sqrt{२३३} = १५.२५३.\end{aligned}$$

तसेच p_1 व p_2 मधील अंतर

$$\begin{aligned}r^2 &= \left\{ (७) - (-३\frac{१}{२}) \right\}^2 + \left\{ (५) - (-६) \right\}^2 \\&= (१०\frac{१}{२})^2 + (११)^2 = ११०.२५ = २३१.२५ \\r &= \sqrt{२३१.२५} = १५.२०६\end{aligned}$$

सरलरेखा

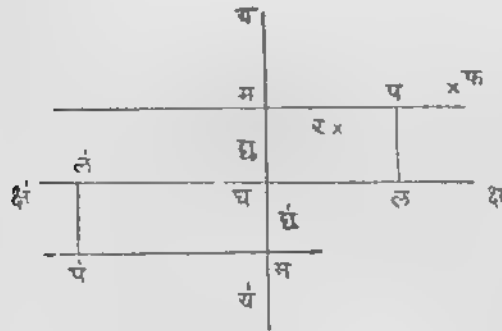
११३. अन्याय्य भुज बिंदुनिर्णयिके क्ष व यांनी बिंदूच्या स्थानाचा निर्णय होतो. त्याच्याच महात्वाचे रेपेच्या स्थितीचे परिमाणनाचे अन्याय्य संबंधाचे विश्लेषण करिता येते. कोणतीही रेखा समीकरणाचे दाखविता येते. क्ष आणि य ह्या दोन अवयव किंवा व्यक्त मन्त्रांपैकी एक किंवा दोन्हीही रेखा दाखविता येते. हे समीकरण एकवर्ण समीकरण असले तर ते समीकरण मरुडरेपेचे आहे असे समजावे. पण त्या समीकरणातील काही पदे द्विघातात्मक असतील तर ते वक्ररेपेचे समीकरण आहे असे

सम जावे, अमुक समीकरण सरळरेषेचे आहे किवा वक्ररेषेचे आहे असा परवलयाने किंवा दीर्घवलय उद्वलनाचे आहे याचा वैज्य मूमितीने निर्णय करिता येतो. या स्थळी सरळरेषेच्या समीकरणाचा विचार करीत आहे.

११४. क्ष अक्षाशी समांतर असणाऱ्या सरळरेषेचे समीकरण म्हणजे त्या समीकरणाने ज्या दोन अव्यक्त मर्या आहेत त्याच्या व्यक्त अशा ज्या ज्या किमती समवर्तील त्यानी दाखविलेला प्रत्येक बिंदु त्या सरळरेषेचेच असला पाहिजे. आणि त्या समीकरणापासून आलेला बिंदु त्या रेषेच्या बाहेर नसला पाहिजे.

क्ष अक्षाशी पम ही समांतर रेषा काढिली. ती घम अक्षामे म स्थानी छेदिते. घम रेषा छ परिमाणे लावीची आहे. तेव्हां

$$पल = मघ \quad अथवा \quad य = छ$$



येथे पम ही रेषा क्ष अक्षी समांतर आहे म्हणून

$$य = छ$$

हे पम रेषेचे समीकरण होय. येथे आपणाला असेही ठरविता येते की फ बिंदूचा ग भुज छ पेशा जास्त आहे आणि र चा य भुज छ पेशा कमी आहे.

याचप्रमाणे प' म' रेषेचे समीकरण खाली दिल्याप्रमाणे आहे. प' म' क्ष अक्षी समांतर आहे तेव्हां प' ल' — म' घ म्हणून.

$$य = - छ'$$

११५. या अक्षाशी समांतर असणाऱ्या रेषेचें समीकरण ठरविणे. वरच्या लेखातील विनयभावकृत लक्षात घेऊन की, समीकरण ज्या रेषेचे आहे त्या रेषेतील प्रत्येक बिंदू या अक्षापासून ϕ अंतरावर आहे, आणि त्या रेषेवाटेरील प्रत्येक बिंदू जास्त किंवा कमी आहे म्हणून त्या रेषेचें समीकरण

$$x = \phi$$

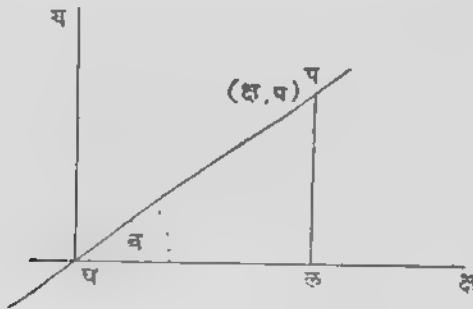
टीप — यात्राचन हे लक्षात घेऊन की, x हा रेषा म्हणजे x अक्ष या रेषेचे समीकरण $x = 0$ मानिली किंवा असली तर

$$y = 0$$

असे होत. तसेच y या रेषेचे समीकरण खाली दिश्याप्रमाणे आहे :—

$$x = 0$$

११६. जी रेषा प्रस्थापित अशा घ बिंदूतून जाते आणि प्रस्थापित अशा घ क्ष रेषेच्या दिशेची व वृत्तापरिमाणाचा कोन करित त्या रेषेचें समीकरण मिळू करावयाचें.



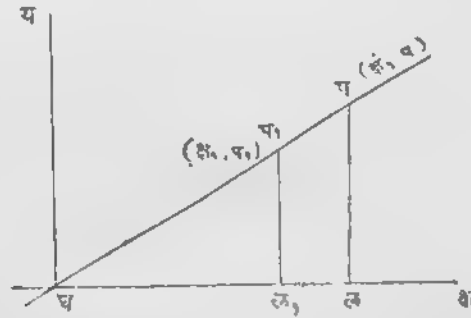
घ ही रेषा घ बिंदूतून जाते, आणि ती घक्ष शी व वृत्तापरिमाणाचा कोन करिते. येथे व कोन दिशेला आहे. घ प रेषेचें समीकरण मिळू करावयाचें. येथे क्ष, य आणि व कोन यांचे समीकरण ठरवावयाचें. घ प रेषेचे कोणता नरो प बिंदू घेतला त्याचे भुज (क्ष, य) आहेत. घक्ष वर पल लंब काढिला

$$\frac{\text{पल}}{\text{घल}} = \frac{y}{x} = \text{स्पशरेषा प घ ल कोन [ल. ४९]}$$

ही स्पश रेखा स्पृह्या बिंदूतून जाव्याविराचें घांजिले आहे
तेव्हा $y = \text{स्पक्ष} \dots \dots$ [हें त्या रेषेचें समीकरण होय].

११३. जी रेखा प्रस्थापित अशा घ बिंदूतून जाणे, आणि जिच्यातील प बिंदु ज्ञान आहे, म्हणजे प बिंदूचे (अ, य) हे भुज दिलेले आहेत. त्या रेपेचे समीकरण सिद्ध करावयाचें.

(सामान्यत्वे कोणत्याही बिंदूचे भुज (अ, य) अकविरहित आणि आपणाम माहित आहे या बिंदूचे भुज (अ, य); (अ, य) इत्यादि अंकयुक्त लिहिले आहेत. हा एक सकेत स्वीकारला आहे असे लक्षात आवाचें.)



घा, ही रेखा दिलेल्या प बिंदूतून (अ, य) जाणे आणि घ बिंदूतून जाणे. ह्या रेपेचें समीकरण सिद्ध करावयाचें.

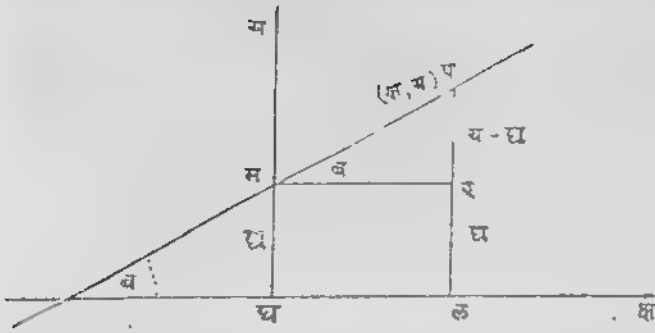
ह्या रेगेन प (अ, य) हा एक बिंदु घेतला. नेह्या अ, य आणि अ, य, ह्या अवयव व्यक्त अशा सामान्य संख्यांचें समीकरण बनवावयाचें.

प, अ, अ, आणि पअ हे सरूप त्रिकोण आहेत. म्हणून

$$\frac{पअ}{प, अ,} = \frac{अअ}{अ, अ,} \quad \text{ह्यावरून}$$

$$य = \frac{य, अ,}{अ,} अ \quad [\text{हें त्या रेपेचें समीकरण होय}].$$

११८. जी रेखा प्रस्थापित अशा घअ रेपच्या दिशेची व वृत्तपरिमाणाचा कोन करिते आणि य अक्षाला छेदिते, अशा रेपेचें समीकरण सिद्ध करावयाचें.



मग ही रेखा घक्ष द्विघोषी व कोनात्मक दिशांतर करिते, व कोनाची स्पर्शरेषा स्पष्ट आहे. ही रेखा य अक्षाला म बिंदूत छेदिते, आणि घक्ष रेखा छ परिमाणे लांबीची आहे. अशा ह्या रेषेचे समीकरण मिळू करवावयाचे.

ह्या रेषेन प (क्ष, य) हा कोणताही एक बिंदू घेऊन प पासून घक्ष वर पल लक्ष केला, आणि म बिंदूतून घक्ष शी सर गमानर केला, येथे क्ष, य, स्पष्ट आणि छ यांचे समीकरण बनवावयाचे.

परम हा काटकोन त्रिकोण आहे, तेव्हां

$$\frac{\text{पर}}{\text{मर}} = \text{स्पष्ट} = \text{स्पष्ट}$$

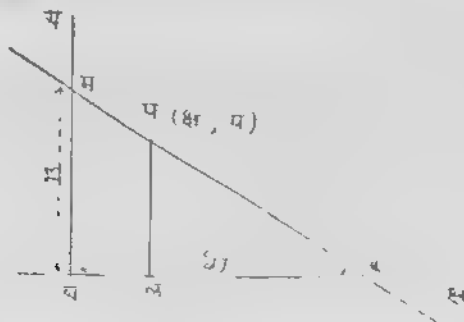
$$\text{पर} = \text{पल} - \text{रल} = \text{य} = \text{छ} \text{ आणि मर} = \text{वल} = \text{क्ष}$$

म्हणून

$$\frac{\text{य} - \text{छ}}{\text{क्ष}} = \text{स्पष्ट}$$

किंवा य स्पष्ट ल - छ [हे त्या रेषेचे समीकरण होय].

११९. जी रेखा क्ष, य ह्या दोन्ही अक्षांना प्रस्थापित जगा घ बिंदूपासून अनुक्रमे छ, छ अंतरावर छेदिते त्या रेषेचे समीकरण मिळू करवावयाचे.



मप रेखा क्ष अक्षाला र बिंदूत छेदिते, तेव्हा घ र लांबी ए रेखा परिमाणे आहे, तसेंच पम रेखा य अक्षाला म बिंदूत छेदिते, तेव्हा घम लांबी ए रेखा परिमाणे आहे. मप रेषेचें समीकरण सिद्ध करावयाचें.

प (क्ष, य) बिंदूपामून घक्षवर पल लंब केला. येथे क्ष, य, ए , ए याचें समीकरण सिद्ध करावयाचें.

पलर आणि मघर हे दोन सरूप त्रिकोण आहेत. म्हणून

$$\frac{\text{पल}}{\text{मघ}} = \frac{\text{लर}}{\text{घर}}$$

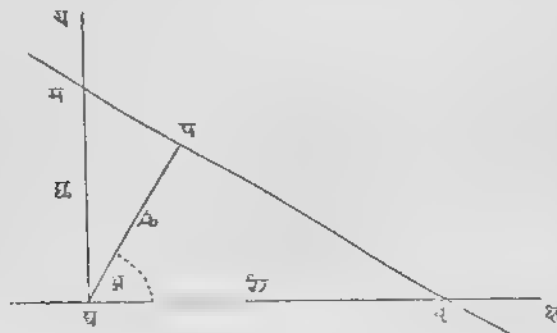
परंतु लर घर - पल $\text{ए} - क्ष$

$$\text{म्हणून } \frac{य}{\text{ए}} = \frac{\text{ए} - क्ष}{\text{ए}} \quad \therefore 1 = \frac{क्ष}{\text{ए}}$$

$$\text{किंवा } \frac{क्ष}{\text{ए}} + \frac{य}{\text{ए}} = 1 \quad [\text{हें त्या रेषेचें समीकरण होय}].$$

१२०. प्रस्थापित अशा घ बिंदूपामून ज्या रेषेवर टाकलेल्या लंबाची लांबी उ आहे, आणि तो लंब घक्ष अक्षाशी अ अशाचा कोन करील अशा रेषेचें समीकरण सिद्ध करावयाचें.

ह्या आकृतीत मघर, घपर आणि घपम हे तिन्ही काटकोन त्रिकोण आहेत. मरघ कोनाचा अ हा कोटिकोण आहे तसा घमर कोनही कोटिकोण आहे. म्हणून



घमर कोन = अ कोन.

$$\text{तेव्हां छ} = \text{अ. कोमुअ म्हणून अ} = \frac{\text{अ}}{\text{कोमुअ}}$$

$$\text{तसेंच छ} = \text{अ. मुअ म्हणून अ} = \frac{\text{अ}}{\text{मुअ}}$$

परंतु मर रेषेचें समीकरण वरच्या लेखाप्रमाणें

$$\frac{\text{अ}}{\text{अ}} + \frac{\text{य}}{\text{अ}} = १$$

असे आहे ह्या समीकरणात अ, अ च्या किमती लिहिल्या. तेव्हां

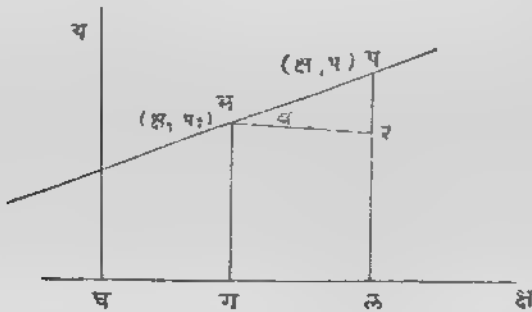
$$\frac{\text{अ}}{\text{कोमुअ}} + \frac{\text{य}}{\text{मुअ}} = १$$

$$\text{म्हणजे } \frac{\text{अ को मुअ}}{\text{छ}} + \frac{\text{य मुअ}}{\text{छ}} = १$$

$$\text{किवा } \text{अ को मुअ} + \text{य मुअ} = \text{छ} \quad [\text{हें समीकरण होय}].$$

१२१. वरच्या दोनचार कृत्यांमध्ये आपल्या निदर्शनास आले आहे की, सरळरेषेचें प्रत्येक समीकरण अ आणि य या दोन अव्यक्तांचे असून ते एकवर्ण समीकरण असतें. म्हणजे त्या समीकरणात अ किंवा य अथवा अय असें द्विघातात्मक पद नसतें. तेव्हां—

दोन अव्यक्तांचें एकवर्ण समीकरण हे सरळरेषा दाखविते. असें सिद्ध करावयाचें



ह्या समीकरणाचें सामान्य स्वरूप खाली दाखविल्याप्रमाणें असतें.

$$\text{कक्ष} + \text{चय} + \text{ट} = ०$$

ह्या समीकरणातील क्ष आणि य ह्या चल सख्या आहेत. आणि क व ट ह्या स्थीर सख्या आहेत. ह्यावरून लक्षात येईल की, य आणि क्ष यांची वृद्धि, य आणि क्ष यांना जे च आणि क गुणक आहेत त्याच्या व्यस्त प्रमाणात होऊन, दोहोपैकी एक धन व एक ऋण असली पाहिजे. तसें नमल्यान समीकरणाच्या दोन्ही पेट्याचें समत्व राहणार नाहीं. हेंच प्रथम सिद्ध करितो.

वरचे सामान्य स्वरूपा समीकरणाचा स्थानभेद केला तर

$$\text{कक्ष} + \text{चय} = - \text{ट}$$

ह्या समीकरणातील क्ष आणि य यांच्या किमती चल न पावून त्या क्ष, य, असा झाल्या तर ते कक्ष, चय, ट असें होईल. ह्याप्रमाणे गणनेशी समीकरण झालें तरी — ट यांत बदल होत नाही.

$$\text{म्हणून} \quad \text{कक्ष} + \text{चय} = \text{कक्ष}' + \text{चय}'$$

याचेंच स्थानभेदानें स्वरूप

$$\text{कक्ष} - \text{कक्ष}' = - \text{चय} + \text{चय}'$$

$$\text{क} (\text{क्ष} - \text{क्ष}') = - \text{च} (\text{य} - \text{य}')$$

दोन गुणाकार समान असतील तर एका गुणाकाराचे अवयव आद्यस्थानी आणि दुसऱ्या गुणाकाराचे अवयव मध्यस्थानी, याप्रमाणे लिहिल्याने जे चार राशी हानान ते प्रमाणात असतात. ह्यावरून

$$(\text{क्ष} - \text{क्ष}') : (\text{य} - \text{य}') :: - \text{च} : \text{क}$$

$$\text{किंवा} \quad \frac{\text{य} - \text{य}'}{\text{क्ष} - \text{क्ष}'} = - \frac{\text{क}}{\text{च}} = - \text{स्थीर संख्या} + \text{घेऊं.}$$

ह्यावरून सिद्ध आहे की, य च्या चलनास जसें क्ष चें चलन तसें क च. मात्र दोहोपैकी एक ऋण.

आता हे समीकरण क्ष य ह्या भुज कोटीच्या म्हाय्याने मगळरेखा दगंविने अन्न सिद्ध करावयाचें.

(१) क च ट ह्या स्थीर सख्या आहेत, त्यांच्या किमती समीकरणाचे समान पक्ष वायम ठेवून ह्या त्या असू शकतात त्यापैकी ट ही सख्या ० मानिली तर,

$$च य = - क क्ष$$

$$य = - \frac{क}{च} क्ष$$

हे समीकरण सरळरेषा दाखविने (लेख ११६, ११७ पहा). कारण $\frac{क}{च}$ ही त्या रेषेने क्ष अक्षाशी केलेल्या कोनाची स्पर्शरेषा आहे आणि ती स्थीर आहे म्हणून ती रेषा सरळ आहे. ही सरळ रेषा प्रस्थापित अशा घ बिंदूतून गेलेली आहे.

(२) सामान्य समीकरणातील ट ही सख्या ० नाही, असे असेल तर ट ने समीकरण भागिले तर तें खाली दिल्याप्रमाणे होते :—

$$\frac{क क्ष}{ट} = \frac{च य}{ट} \quad ? \quad ०$$

$$\text{किंवा} \quad \frac{\frac{क्ष}{ट}}{\frac{क}{च}} = \frac{य}{ट} \quad ? \quad ०$$

ह्या समीकरणातील सरळरेषा लेख १२० मधील रेषेप्रमाणे आहे.

$$\frac{ट}{क} = ए \text{ आणि } \frac{ट}{च} = छ \text{ आहे.}$$

(३) सामान्य समीकरणातील च ही संख्या ० असेल तर,

$$क क्ष = - ट$$

$$क्ष = - \frac{ट}{क}$$

ही य अक्षाशी समांतर अशी सरळरेषा आहे. (लेख ११५.)

(४) सामान्य समीकरणातील क ही संख्या ० असेल तर,

$$च य = - ट$$

$$य = - \frac{ट}{च}$$

ही क्ष अक्षाशी समांतर अशी सरळरेषा आहे. (लेख ११४.)

(५) सामान्य समीकरणातील क च ट पैकीं कोणतीच संख्या ० नाही. तेव्हा च ने समीकरण भागिलें तर,

$$y = - \frac{k}{c}x - \frac{t}{c}$$

हे ही सरलरेषेचें समीकरण आहे (लेख ११८.)

ह्याप्रमाणे दोन अव्यक्तांचें एकवर्ण समीकरण सरलरेषा दाखविने.

१२२. दोन सरलरेषांचीं समीकरणें दिलीं आहेत, तर त्या रेषांच्या छेदन बिंदूचे भुजकोटि सांगा.

$$a_1x + c_1y + m_1 = 0$$

$$\text{आणि } a_2x + c_2y + m_2 = 0$$

ही त्या दोन रेषांची समीकरणें आहेत. याच्या छेदन बिंदूचे भुजकोटि शोधायचा आहेत.

दोन रेषांचा छेदन बिंदु म्हणजे दोन्ही रेषांमध्ये असणारा बिंदु. यावरून क्ष य यांच्या किंमती दोन्ही समीकरणांत सामान्य असतील त्या शोधावयाच्या. बीजगणिताच्या माषेनें बोधवयाचे म्हणजे ही समीकरण सोडवावयाची.

समीकरण सोडविण्याच्या अनेक पद्धति आहेत. त्या एथे सांगणे अप्रासंगिक आहेत म्हणून त्याचें विवेचन करित नाही. तथापि दोन अव्यक्तांपैकी एकाचे गुणक समान करून समीकरणांची वजावाची केली म्हणजे ते अव्यक्त लुप्त होई, आणि दुसऱ्या अव्यक्ताची किंमत तयार करिता येई. त्याप्रमाणे

$$a_1 \times a_2x + c_1 \times c_2y + m_1 = 0$$

$$a_2 \times a_2x + c_2 \times c_2y + m_2 = 0$$

$$+ (a_2c_1 - a_1c_2)y + (a_2m_1 - a_1m_2) = 0$$

$$y = - \frac{(a_2m_1 - a_1m_2)}{(a_2c_1 - a_1c_2)}$$

$$\text{आणि } x = + \frac{(c_2m_1 - c_1m_2)}{(c_2a_1 - c_1a_2)}$$

१२३. (१) खाली दिलेल्या दोन रेखांचा छेदन बिंदु सांगा :—

७ क्ष — ६ य + ५९ = ० आणि ३ क्ष — ८ य + ४७ = ०
पहिले समीकरण ४ ने आणि दुसरें ३ ने गुणून आलेल्या समीकरणांची वजा-
बाकी केली तर

$$२८ क्ष - २४ य + २३६ = ०$$

$$९ क्ष - २४ य + १४१ = ०$$

$$१९ क्ष + १५ = ०$$

$$क्ष = -५, \quad य = +४.$$

(-५, ४) हा तो छेदन बिंदु.

(२) ३ क्ष — ४ य — ७ ही रेखा स्पर्शरेषेच्या उल्लेखाने म्हणजे
य = स्पर्श क्ष + छ हा स्वरूपाने लिहा.

$$य = ३ क्ष - ७$$

(३) $\sqrt{३}$ क्ष - ३ य - $\sqrt{६}$ ही रेखा क्ष अक्षाशी किती अक्षाचा कोन
करिते. ३० अक्षाचा.

(४) ३ क्ष — ४ य — १३ आणि ३ क्ष — ४ य — ९ ह्या रेखांचा छेदन
बिंदु सापडेल काय ?

सापडणार नाही. दोन्ही क्ष अक्षाशी समान कोन करितात म्हणून त्या समानर
आहेत.

१२४. श्रीमद्भास्कराचार्य यांनी आपल्या लीलावती नामक ग्रंथाने एक
कृत्य त्याच्या रीतिमूढ दिशेने आहे. त्या कृत्याची उत्पत्ति युक्लीडच्या महाव्या-
पुस्तकाच्या आधारे दाखविता येते. तथापि आपल्या ह्या प्रस्तुत वैज्य भूमितीच्या
सिद्धांतांनी अत्यंत सुष्ठम रीतीने त्या कृत्याच्या रीतीची उत्पत्ति सिद्ध होती. ते कृत्य
आणि त्याची रीति खाली दिल्याप्रमाणे आहे:—

॥ अन्योऽन्युभूलाग्रस्य सूत्रं योगात् ।

॥ वेणोर्वधे योगद्वये च लंबः ॥

॥ वशी स्वयोगेन हृतावभीष्ट ।

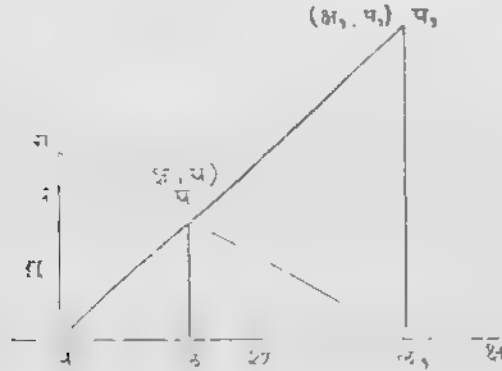
॥ भूजौच लंबोभयतः कुल्लडे ॥ १६४ ॥

॥ लीलावती ॥

समभूमीवर दोन वेणू (वेळू) लंबाकार उभे केले आहेत, आणि एकाच्या मूळापासून दुसऱ्याच्या अग्रापर्यंत सूत्र बांधिले आहे. तसेच दुसऱ्याच्या मूळापासून पहिल्याच्या अग्रापर्यंतही सूत्र बांधिले आहे. तर दोन्ही सूत्रांच्या छेदन बिंदूपासून भूमीवर टाकलेला लंब किती? असा प्रश्न आहे त्याचे उत्तर 'वेणूबरोबरचे योगदूनेच' ह्या दोन शब्दांत आहे. ते असे की "वेळूच्या गुणाकाराला वेरजेने भागा".

हा लंब भूमीवर ज्या बिंदू पडला त्या बिंदूपासून प्रत्येक वेळूच्या वृद्धापर्यंत अंतर किती? हा दुसरा प्रश्न आहे. ह्याची रीत अशी की, एका वेळूच्या उंचीला दोन्ही वेळूच्या मूळांमधील जे भूम्यंतर त्याने गुणून दोन्ही वेळूच्या उंचीच्या वेरजेने भागा. म्हणजे त्या वेळूच्या मूळापासून लंब पडलेल्या बिंदूचे अंतर काढेल. या याच रीतीने दुसऱ्या वेळूच्या मूळापासून लंबमूळापर्यंत अंतर काढेल.

वरच्या दोन कृत्यांच्या रीतीचा उपयोग आपल्या वैज्य-भूमितीने कशी सिद्ध होते, ती पहा—



ह्या आवृत्तीत या हा प्रस्थापित बिंदु आणि घस, घस हे भुजकोटीचे अक्ष आहेत असे घ्या. आणि मल, रेखा व घग, ही रेखा ह्या दोन रेखांची समीकरणे माडा. ह्या दोन रेखांच्या प ह्या छेदन बिंदूचा भुजकोटी ठरवा.

मल, ही रेखा दोन्ही अक्षांना छेदिते. घल, - $\frac{A}{B}$, आणि घम - $\frac{A}{C}$ तेव्हा लेख ११९ प्रमाणे मल, रेबेचे समीकरण

$$\frac{A}{B} + \frac{A}{C} = 1 \dots \dots \dots (१)$$

घप_१ ही रेखा घ तया प्रसंगानि विद्वतुन जाणे आणि प_१ ह्या दिलेल्या विद्वतुन जाते हिचे समीकरण लेख ११३ प्रमाणे

$$य = \frac{य_१}{क्ष_१} क्ष \dots \dots (२)$$

ह्या दोन समीकरणावामुन क्ष व य तया प विद्वत्ता भूजोटीची किमत ठरवा.
क्ष, $\frac{य}{य_१} = \frac{क्ष}{क्ष_१}$ वास्तवी वेळामधील भूमध्यंतर आणि समीकरण (२) वरून

$$\frac{य}{य_१} = \frac{क्ष}{क्ष_१} \Rightarrow$$

पहिल्या समीकरणातील $\frac{क्ष}{क्ष_१}$ ची किमत $\frac{य}{य_१}$ ही त्यान टाविशी

$$\text{तर } \frac{य}{य_१} = \frac{य}{क्ष} \quad १$$

$$क्ष व य, य = य_१ क्ष$$

$$य (क्ष + य_१) = य_१ क्ष$$

$$\text{म्हणून } य = \frac{य_१ क्ष}{(क्ष + य_१)} \dots \dots (३)$$

ह्या समीकरणातील मर्या य पल लव घम—क्ष डावीकडचा
वेणु य_१ = प, ल उजवीकडचा वेणु. यावरून रीती ठरवो की

वेणुवेळं ये योग हनेच लव ।

दुसऱ्या समीकरणान क्ष_१ च्या जागी $\frac{य}{य_१}$ लिहिला तर

$$य = \frac{य_१}{क्ष_१} क्ष$$

$$\text{म्हणून } क्ष = \frac{क्ष_१ य}{य_१}$$

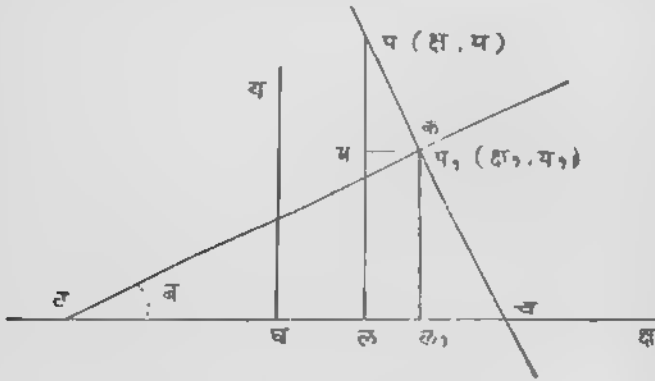
$$= \frac{क्ष_१ य}{य_१} \quad (क्ष + य_१)$$

$$= \frac{क्ष_१ य}{(क्ष + य_१)}$$

(ह्या उपपत्तिवरून गगनक चक्रचूडामणि श्रीमद्भास्कराचार्य यांना हा विषय उत्तम रीतीने ज्ञान होना. आजकालपर्यंत जर ह्या विषयाचा अभ्यास भारतीयांनी केला असता, नग आम्हास पाश्चात्य विद्वानांनी केलेल्या विचारांचे ग्रहण करण्याची पाळी आली नसती.)

१२५ जी रेखा क्ष अक्षाशी, ज्याची स्पर्शरेखा स्पृज आहे इतक्या अशाचा कोन करिते आणि ती दिलेल्या $P_1 (क्ष_1, य_1)$.

१२५-अ. ज्या रेपेचें क्ष अक्षाशी, स्पृज ज्या कोनाशी स्पर्श आहे, तेवढ्या कोनाचे तीर्थगत्व आहे, त्या रेपेवर तिच्यातील दिलेल्या $P_1 (क्ष_1, य_1)$ बिंदूपासून लंब असणाऱ्या रेपेचें समीकरण सिद्ध करावयाचे.



कट रेखा क्ष अक्षाशी व अशाचा कोन करित आहे. व कोनाची स्पर्श रेखा स्पृज आहे. तर कट रेपेतील क म्हणजेच $P_1 (क्ष_1, य_1)$ या बिंदूपासून लंब केलेली रेखा कच हिचें समीकरण सिद्ध करावयाचे.

कच मध्ये कोणता तरी प बिंदु घेतला. त्याचे मुज $(क्ष, य)$ हे आहेत.

P_1, P_2 या बिंदूपासून प ल व P_1, P_2 लंब काढिले. तसेच P_1 पासून पल वर P_1 म लंब केला.

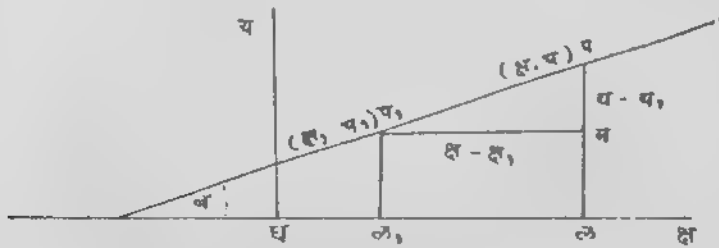
आतां क च क्ष कोन = व' कोन.

$$-\text{स्प } ब' = + \text{स्प } (९० + ब) = + \text{कोस्पब.}$$

$$- \frac{1}{\text{स्प } ब} = + \frac{1}{\text{स्प}}$$

$$\begin{aligned}
 \text{पम} &= \text{क्ष}_2 - \text{क्ष} \text{ आणि पम} = \text{य} - \text{य}_1 \\
 \text{म्हणून—स्पष्ट} &= \frac{\text{पम}}{\text{क्ष}_2 - \text{क्ष}} = \frac{\text{य} - \text{य}_1}{\text{क्ष} - \text{क्ष}_1} \\
 \text{यास्तव} &= \frac{\text{य} - \text{य}_1}{\text{क्ष} - \text{क्ष}_1} = + \frac{1}{\text{स्प}} \\
 \text{म्हणजे} &\quad \text{य} - \text{य}_1 = \frac{1}{\text{स्प}} (\text{क्ष} - \text{क्ष}_1) \text{ हे कच र्हे समीकरण}
 \end{aligned}$$

बिंदूतून जाते, त्या रेषेचें समीकरण सिद्ध करावयाचें.



प१ ही दिलेल्या $(\text{क्ष}_1, \text{य}_1)$ प१ ह्या बिंदूतून गेलेली सरळरेषा आहे. आणि ती ज्याची गम्यरेषा स्प आहे अशा व अशाचा कोन क्ष अक्षाशी करीत आहे. ह्या रेषेचे समीकरण सिद्ध करावयाचें, प हा त्या रेषेला कोणता तरी बिंदु आहे. तेव्हा क्ष, य, क्ष_१, य_१ आणि स्प यांचें समीकरण वनवावयाचें.

क्ष अक्षावर पल, प१, ल१ लव्हा काढिले आणि प१ म ही क्ष अक्षाशी समानर रेषा काढिली. तेव्हां

$$\text{पम} = \text{पल} - \text{मल} = \text{पल} - \text{प१ल१} = \text{य} - \text{य}_1$$

$$\text{प१म} = \text{ल१ल} = \text{वल} - \text{वल१} = \text{क्ष} - \text{क्ष}_1$$

$$\text{आणि पमप१ त्रिकोणावरून} \quad \frac{\text{पम}}{\text{प१म}} = \text{स्प प प१म कोन} = \text{स्प}$$

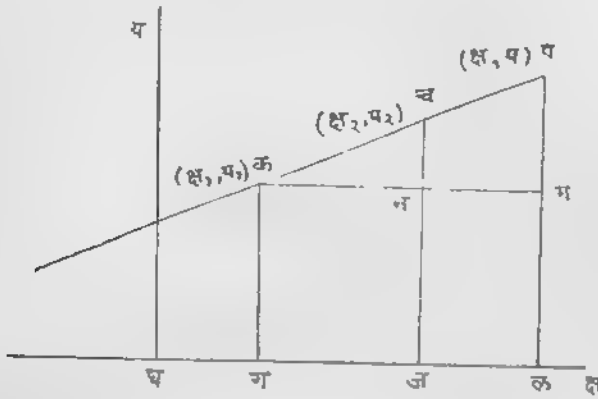
$$\begin{aligned}
 \text{अथवा} \quad & \frac{\text{य} - \text{य}_1}{\text{क्ष} - \text{क्ष}_1} = \text{स्प}; \\
 & \text{क्ष} - \text{क्ष}_1
 \end{aligned}$$

$$\text{म्हणून} \quad \text{य} - \text{य}_1 = \text{स्प} (\text{क्ष} - \text{क्ष}_1)$$

१२६. जी सरळ रेखा दिलेल्या दोन बिंदूतून जाणे, त्या रेपेचें समीकरण मिळ करवायाचे.

क च दिलेले दोन बिंदु आहेत, त्या दोन बिंदूंचे भुज अनुक्रमे $(क्ष_१, य_१)$ आणि $(क्ष_२, य_२)$ हे आहेत. ह्या दोन बिंदूतून गेलेल्या सरळ रेपेचे समीकरण मिळ करवायाचे.

प हा त्या रेपेच्या कोणता तरी एक बिंदु आहे त्याचे भुज $(क्ष, य)$ आहेत. तेव्हां $क्ष, य, क्ष_१, य_१, क्ष_२, य_२$ आणि $य_१, य_२$ यांचें समीकरण जुळवावयाचें.



वक्ष वर कग चज आणि पल लंब काढिले, तगाच कतम चज आणि पल वर लव काढिला. आता पमक आणि कनक हे दोन मूल्य त्रिकोण आहेत, यावरून

$$\frac{\text{पम}}{\text{चन}} = \frac{\text{कम}}{\text{कन}}$$

परंतु

$$\begin{aligned} \text{पम} &= \text{पल} - \text{मल} = \text{पल} - \text{कग} = य - य_१, \\ \text{चन} &= \text{चज} - \text{नज} = \text{चज} - \text{कग} = य_२ - य_१, \\ \text{कम} &= \text{गल} = \text{घल} - \text{घग} = क्ष - क्ष_१, \\ \text{कन} &= \text{गज} = \text{घज} - \text{घग} = क्ष_२ - क्ष_१ \end{aligned}$$

म्हणून

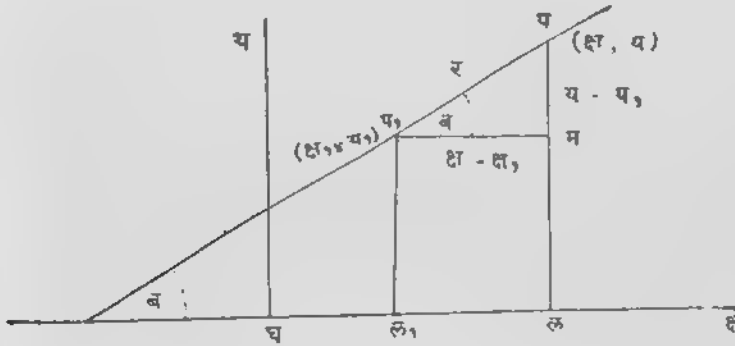
$$\frac{य - य_१}{य_२ - य_१} = \frac{क्ष - क्ष_१}{क्ष_२ - क्ष_१} \quad \text{हे इष्ट रेपेचें समीकरण होय.}$$

१२७. प, हा दिलेल्या रेषेत एक बिंदु आहे आणि ती रेषा क्ष अक्षाशी व अंशाचा कोन करीत आहे. प_१ (क्ष_१, य_१) ह्या बिंदूपासून त्याच रेषेतील प (क्ष, य) ह्या बिंदूपर्यंत अंतर र आहे तर क्ष, य, क्ष_१, य_१ व कोन आणि र रेषात्मक अंतर याचे

$$\frac{\text{क्ष} - \text{क्ष}_1}{\text{कोमुब}} = \frac{\text{य} - \text{य}_1}{\text{मुब}} = \text{र}$$

हे समीकरण बनते असे सिद्ध करावयाचे.

प बिंदूपासून घक्ष वर पल लंब केला आणि प_१ बिंदूपासून प_१ ल_१ हा लंब केला. तसेंच प_१ पासून पल वर प_१ म लंब केला.



पमप_१ त्रिकोणांत प_१ म = पप_१ कोमुब,

अथवा $\text{क्ष} - \text{क्ष}_1 = \text{र कोमुब}$. अर्थात $\frac{\text{क्ष} - \text{क्ष}_1}{\text{कोमुब}} = \text{र}$.

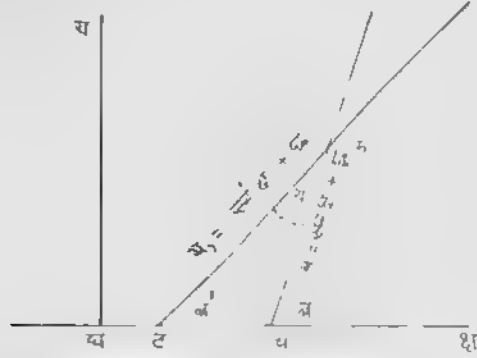
तसेच $\text{पम} = \text{पप}_1 \text{ मुब}$

अथवा $\text{य} - \text{य}_1 = \text{र मुब}$ अर्थात $\frac{\text{य} - \text{य}_1}{\text{मुब}} = \text{र}$

म्हणून $\frac{\text{क्ष} - \text{क्ष}_1}{\text{कोमुब}} = \frac{\text{य} - \text{य}_1}{\text{मुब}} = \text{र}$.

१२८. दिलेल्या दोन रेषा एकमेकीस छेदनात तर त्यांच्या छेदस्थानी होणा या कोनाची स्पर्शरेषा किती ?

त्या दोन रेषांची समीकरणे खाली दिली आहेत. ती ज्ञाची—



य स्पर्श छेद आणि य, स्पर्श छेद

कच आणि कट ह्या दोन रेषा एकमेकीं ठा व बिन्दूत छेदनात तर चकट कोन वेवढा आहे हे मिळू शकतयाचें. कोन केवढा जाणें म्हणजे किती अशाचा आहे अथवा त्याचें वृत्त परिमाण किती आहे, हे त्या कोनाचे निरुपणमिनिविषयक एखाद्या गुणोत्तरावरूनच ठरवावे लागते. म्हणून येथे चकट कोनाची स्पर्शरेषा ठरवितात.

आकृतीवरून

चकट कोन = थ कोन, कचक्ष कोन = व कोन

आणि कटच कोन = ब' कोन.

तेव्हां ब = ब' + थ म्हणून थ = ब - ब'

पण स्पथ = स्प (ब - ब')

आणि $\text{स्प (ब - ब')} = \frac{\text{स्पब} - \text{स्पब}'}{१ + \text{स्पब स्पब}'}$

कच कट रेषांच्या समीकरणांत स्पब = स्प

आणि स्पब' = स्प' व ब' कोनाच्या स्पर्शरेषा दिल्या आहेत त्यावरून

$\text{स्पथ} = \frac{\text{स्प} - \text{स्प}'}{१ - \text{स्प स्प}'}$

उपसिद्धांत १.—कच कट रेषा समांतर असतील तर ब - ब' म्हणजे स्प - स्प'

उपसिद्धांत २. — कच कट रेखा एकमेकीवर लंब असतील तर $\theta = 90^\circ$,
 $\text{स्प} = \infty$ म्हणजे अनंत

$$\frac{\text{स्प} - \text{स्प}'}{1 + \text{स्प} \text{स्प}'} = \infty \quad 1 + \text{स्प} \text{स्प}' = 0$$

$$\text{म्हणून } \text{स्प} \text{स्प}' = -1 \text{ आणि } \text{स्प} = -\frac{1}{\text{स्प}'}$$

उपसिद्धांत ३. — जर k_1 क्ष + c_1 य + $d_1 = 0$ ही रेखा
 k_2 क्ष + c_2 य + $d_2 = 0$ ह्या रेपेवर लंब असेल तर

$$k_1 k_2 + c_1 c_2 = 0 \text{ अमें समीकरण असतें.}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{कारण पहिल्या रेपेतील स्प} &= -\frac{k_1}{c_1} \\ \text{दुसऱ्या रेपेतील स्प}' &= -\frac{k_2}{c_2} \end{aligned} \right\} [\text{लेख १२५ (५)}]$$

$$\left(-\frac{k_1}{c_1}\right) \times \left(-\frac{k_2}{c_2}\right) = -1$$

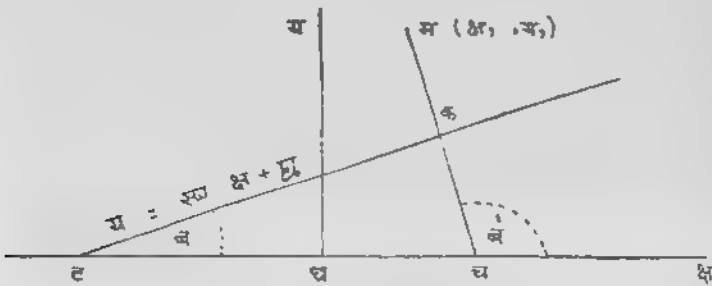
ह्यावरून $k_1 k_2 + c_1 c_2 = 0$

लक्षांत ठेवण्यासारख्या गोष्टी—

(१) $\left. \begin{aligned} ५ \text{ क्ष} - २ \text{ य} &= ३ \\ ५ \text{ क्ष} - २ \text{ य} &= ५ \end{aligned} \right\}$ न ची किंमत कोणतीही असो ह्या रेपा समांतर आहेत.

(२) $\left. \begin{aligned} ५ \text{ क्ष} - २ \text{ य} - ३ &= ० \\ २ \text{ क्ष} + ५ \text{ य} &= ५ \end{aligned} \right\}$ न ची किंमत कोणतीही असो ह्या रेपा एकमेकीवर लंब आहेत.

१२९. दिलेल्या $y = \text{स्प}x + c$ रेपेवर निच्या बाहेर असणाऱ्या म ह्या
 (x_1, y_1) बिंदूपासून निजवर लंब काढावयाचा आहे आणि त्या लंबरेपेचे
समीकरण ठरवावयाचें.



दिलेल्या कट रेपेवर मकळ लंब असणारी रेषा काढली. टकच कोन काटकोन आहे, म्हणून कटच कोन आणि कचट कोन हे एकमेकांचे कोटिकोन, आहेत म्हणून

$$- \text{स्प कचक्ष (ब')} = + \text{स्प (१८० - ब')} = + \text{स्प कचट}$$

$$\therefore + \text{को स्प कटच} = + \frac{1}{\text{स्प कटच}}$$

$$- \text{स्प ब'} = + \frac{1}{\text{स्प ब}} = + \frac{1}{\text{स्प}}$$

लेख १२५ प्रमाणे

$$\text{स्प ब'} = - \frac{1}{\text{स्प}} = + \frac{य - य_1}{क्ष - क्ष_1}$$

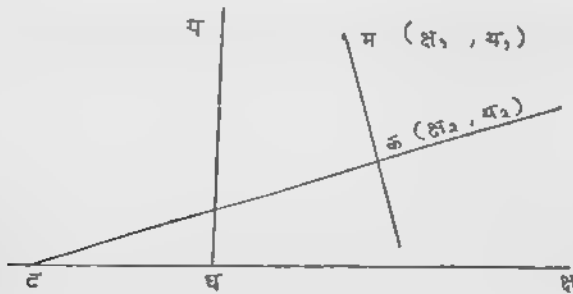
$$(य - य_1) = - \frac{1}{\text{स्प}} (क्ष - क्ष_1)$$

म्हणजे

$$य = \text{स्पक्ष} + \text{छ ह्या रेपेवर}$$

$$य - य_1 = - \frac{1}{\text{स्प}} (क्ष - क्ष_1) \text{ ही रेषा लंब आहे.}$$

१३०. दिलेल्या रेपेवर, तिच्या बाहेर असलेल्या दिलेल्या बिंदूपामून टाकलेल्या लंबाची लांबी ठरविणे.



कट रेषा दिली आहे तिचें समीकरण

$$य = \text{स्पक्ष} + \text{छ}$$

हे दिलेले आहे आणि दिलेल्या म बिंदूचे मुज (क्ष१, य१) हे आहेत तर मक रेपेची लांबी ठरवावयाची.

मक रेषेचें समीकरण वरच्या लेखाप्रमाणें.

$$(y - y_1) = - \frac{1}{\text{स्ज}} (x - x_1)$$

हे आहे. कट मक रेषांची समीकरणे माहित आहेत, तर त्यांचा छेदन बिंदु क याचे भुज त्या समीकरणावरून समजतात. ते भुज x_2 , y_2 हे आहेत असे ध्या. हे भुज घेतल्याने वरची समीकरणे खाली लिहिल्याप्रमाणे होतील.—

$$y_2 = \text{स्ज}x_2 + \text{छ आणि } y_2 - k = - \frac{1}{\text{स्ज}} (x_2 - x_1)$$

ह्या दोन्ही समीकरणापासून y_2 च्या किमती घेऊन त्याचें समीकरण मांडू

$$\text{स्ज}x_2 + \text{छ} - y_2 = \frac{1}{\text{स्ज}} (x_2 - x_1) \text{ हे स. स्ज ने गुणिलें तर}$$

$$\text{स्ज}^2 x_2 + \text{स्ज} \text{छ} = \text{स्ज} y_2 - x_2 + x_1 \text{ स्थान बदल}$$

$$\text{स्ज}^2 x_2 + x_2 = \text{स्ज} y_2 + x_1 - \text{स्ज} \text{छ};$$

$$\text{किवा } x_2 = \frac{\text{स्ज}^2 y_2 + x_1 - \text{स्ज} \text{छ}}{\text{स्ज}^2 + 1}$$

दोहीकडे x_2 वजा केला तेव्हां

$$x_2 - x_1 = \frac{\text{स्ज} y_2 + x_1 - \text{स्ज} \text{छ}}{\text{स्ज}^2 + 1} - x_2$$

$$= \frac{\text{स्ज} y_2 - \text{स्ज}^2 x_2 - \text{स्ज} \text{छ}}{\text{स्ज}^2 + 1}$$

$$= \frac{\text{स्ज}}{1 + \text{स्ज}^2} (y_2 - \text{स्ज} x_2 - \text{छ}) \quad \dots (अ)$$

आता

$$y_2 - y_1 = - \frac{1}{\text{स्ज}} (x_2 - x_1)$$

$x_2 - x_1$ ची किमत (अ) ह्या वरच्या समीकरणात ठेविली तेव्हां

$$y_2 - y_1 = - \frac{1}{\text{स्ज}} \times \frac{\text{स्ज}}{1 + \text{स्ज}^2} (y_2 - \text{स्ज} x_2 - \text{छ})$$

$$= \frac{\text{स्ज} x_2 + \text{छ} - y_2}{1 + \text{स्ज}^2} \quad \dots \quad \dots (ब)$$

$$\begin{aligned}
 \text{परंतु } m^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (a)^2 + (b)^2 \\
 &= \frac{sp^2}{(1 + sp^2)^2} (y_1 - spx_1 - c)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{(1 + sp^2)^2} (y_1 - spx_1 - c)^2 \\
 &= \frac{(1 + sp^2)}{(1 + sp^2)^2} (y_1 - spx_1 - c)^2
 \end{aligned}$$

वर्गमूल काढिले

$$m = \frac{y_1 - spx_1 - c}{\sqrt{(1 + sp^2)}}.$$

१३१. रेषेच्या समीकरणाचें समान्य गुणकाचे स्वरूप

$$kx + cy + c = 0$$

असे आहे यावरून m कढावची लांबी किती हें ठरवू. समीकरण c नें भागिले तर—

$$y = -\frac{k}{c}x - \frac{c}{c} \text{ असे स्वरूप होते.}$$

$$\text{किंवा } y + \frac{k}{c}x + \frac{c}{c} = 0$$

$$\text{यामध्ये } sp = -\frac{k}{c} \text{ आणि } c = -\frac{c}{c}$$

$$\text{ह्यावरून } y_1 - spx_1 - c = y_1 + \frac{k}{c}x_1 + \frac{c}{c}$$

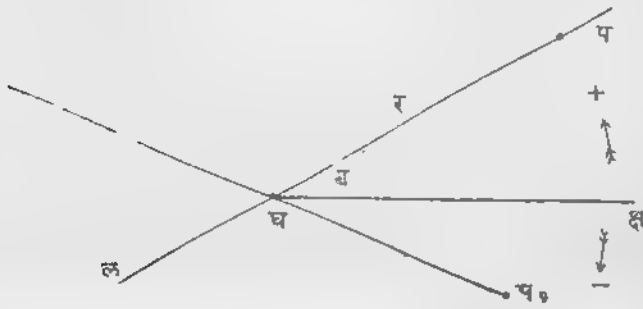
$$\text{आणि } 1 + sp^2 = 1 + \frac{k^2}{c^2} = \frac{k^2 + c^2}{c^2}$$

$$\begin{aligned}
 m^2 &= \frac{\left(y_1 + \frac{k}{c}x_1 + \frac{c}{c}\right)^2}{\frac{k^2 + c^2}{c^2}} \times \frac{c^2}{1} \\
 &= \frac{kx_1 + cy_1 + c}{\sqrt{(k^2 + c^2)}}.
 \end{aligned}$$

काढून ग्रहांचे इष्टकालचें स्थान शोधणें, ह्या कार्यामध्ये सर्व प्रसंगी केला आहे. ह्या बिंदु निर्णयिकास चलत्रिज्या आणि वृत्तानुसारी अने नांव दिले आहे. पण सक्षेपे त्यास वृत्तानुसारी बिंदुनिर्णयिके असंच आपण म्हणू. ह्या निर्णयिकाकरिता प्रस्थापित असे काय काय ठरवावे लागतें त्या वा विचार खाली केला आहे.

१३४. ज्याचें स्थान निश्चित आहे असा एक बिंदु आणि त्या बिंदूतून एका ठराविक दिशेने गेलेली एक सरळ रेषा ह्या साधनांनी बिंदूच्या (कोणत्याहि) स्थानाचा निर्णय करिता येतो.

घ क्ष ही एक रेषा घ बिंदूतून गेलेली आहे. ह्या रेषेला प्रस्थापित रेषा म्हणावे किंवा अक्ष म्हणा. आणि घ हा प्रस्थापित बिंदु आहे. ज्या बिंदूच्या स्थानाचा



निर्णय लिहावयाचा तो प बिंदु आहे. एक चलरेषा कल्पिली आहे तिचे एक टोक घ बिंदूत बद्ध केलेले आहे, आणि ती रेषा घ टोका सभोवती उजवीकडून डावीकडे पण घक्ष च्या वरच्या अगाम फिरत आहे. ह्या फिरण्याने घ स्थळी जो कोन होतो तो कोन, ज्या बिंदूच्या स्थानाचा निर्णय करावयाचा त्या साधनापैकी एक साधन आहे. चलरेषा घक्ष रेषेपासून प बिंदूपर्यंत फिरत आली आहे यामुळे तिच्या भ्रमणाने व कोन झाला आहे. आणि प बिंदूने घ पासून अंतर घप रेषेइतके आहे. घप रेषेला आपण र म्हणू तेव्हा र आणि ब ह्या दोन निर्णयिकांनी प बिंदूच्या स्थानाचा निर्णय होतो प्रसंगविशेषी प बिंदूचा नासनिर्देश (र, ब) ह्या लेखनाने करिता येतो.

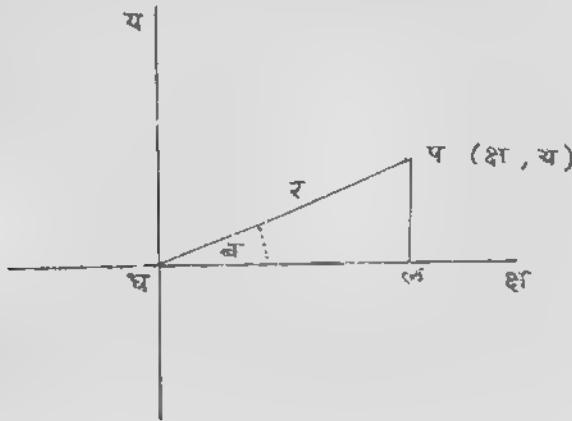
१३५. व कोन आणि र रेषा यासंबंधाने धनर्ण संकेत स्वीकारले आहेत. त्यात विशेष लक्षांत ठेवण्याची गोष्ट म्हणजे व कोन चल किंवा भ्रामक रेषेच्या कोणत्या भ्रमणाने झालेला आहे. घप रेषा घक्ष रेषेला मिळून गेलेली आहे. अशा स्थितीत भ्रमण नाही व कोनही नाही व घप रेषेचा प बिंदु घक्ष रेषेच आहे, अर्थात व = ०

आता घप रेषा उर्व्व मार्गाने बाणाग्राप्रमाणे भ्रमण करील तर ब कोन घन समजावा. मग ते भ्रमण किती ही होवो. पण ती रेषा घक्षच्या खालच्या अंगाने जर भ्रमण करील तर ब कोन ऋण समजावा. घप रेषा कोणत्याही स्थितीत असो ती दोन कोन दाखविते—एक घन व दुसरा ऋण, आणि ते कोन असे असतात की, घनर्णत्व सोडून (दोन्ही घन किंवा दोन्ही ऋण मानून) त्याची बेरीज केली तर ती ४ काटकोन किंवा घप रेषेचे पूर्ण भ्रमण इतकी दिसते.

र रेषेविषयी धनर्ण सकेत आहे. तो असा आहे की, ती रेषा घ बिंदूपासून प बिंदूकडे मोजली तर घन मानावी, पण ती घ बिंदू पासून प च्या विरुद्ध दिशेला मोजली तर ती ऋण समजावी. आकृतीत घप रेषा घन असून घल रेषा ऋण मानिली आहे.

१३६. अन्योन्य लंबभुज बिंदु निर्णयिके याचा वृत्तानुसारी बिंदुनिर्णयिकाशी संबंध.

दोन्ही पद्धतीत या हा प्रस्थापित बिंदु आणि घ क्ष अक्ष यात भिन्नत्व नाही. खालच्या आकृतीत लंबभुज आणि वृत्तानुसारी दोन्ही निर्णयिके दाखविली आहेत. प हा एक बिंदु आहे आणि (क्ष, प) त्याचे अन्योन्य लंब भुज आहेत. तसेच त्याच बिंदूचे



(र, ब) वृत्तानुसारी निर्णयिके आहेत.

घप = र आणि पघक्ष कोन = ब कोन

आतां घल = क्ष कोटि आणि पल = य भुज आहे.

$$\text{पण } \frac{\text{पल}}{\text{घप}} = \frac{य}{र} = \text{भुज्या व,}$$

$$\text{म्हणून } य = र भुज ;$$

$$\text{आणि } \frac{\text{घल}}{\text{घप}} = \frac{\text{क्ष}}{र} = \text{कोभुज्या व,}$$

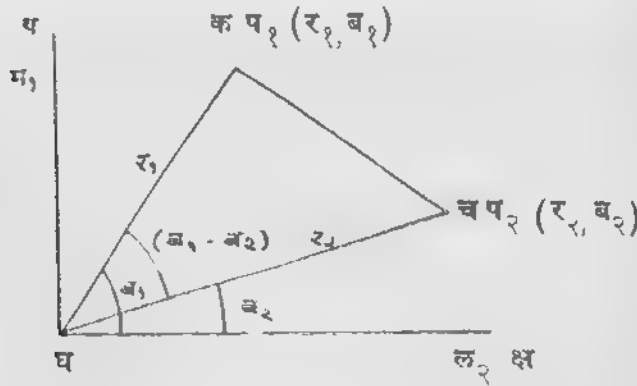
$$\text{म्हणून } \text{क्ष} = र कोभु व.$$

त्याप्रमाणे $\text{क्ष} = र कोभु$ आणि $य = र भुज$.

असा त्यांचा अन्योन्य संबंध आहे.

१२७. दिलेल्या दोन बिंदूंमध्ये अंतर किती असते हें शोधावयाचे.

$प_१$ आणि $प_२$ हे दोन बिंदू आहेत. $प_१$ ची निर्णायके $(र_१, ब_१)$ आहेत आणि $प_२$ ची निर्णायके $(र_२, ब_२)$ ही आहेत. तेव्हा $प_१, प_२$ ह्या रेषेची लांबी ठरवावयाची



$प_१$ घ $प_२$ हा त्रिकोण आहे. त्याच्या $र_१$ आणि $र_२$ ह्या दोन बाजू आणि त्याच्यामधील $ब_१ - ब_२$ हा कोन दिला आहे. तेव्हा त्रिकोणमितीच्या लेख ७० समीकरण (१) प्रमाणे.

$$(प_१ प_२)^२ = र_१^२ + र_२^२ - २ र_१ र_२ कोभु (ब_१ - ब_२)$$

$$\text{कच} = \sqrt{र_१^२ + र_२^२ - २ र_१ र_२ कोभु (ब_१ - ब_२)}$$

१३८. दिलेल्या दोन बिंदुमधील अंतर, वृत्तानुसारी निर्णायकांनी साधिले. ते समीकरण घर आहे, त्यात लंबभुज निर्णायक ठेवल्याने समीकरणाचे स्वरूप कसे होते ते ठरवावयाचे. ते समीकरण असे—

$$(कच)^2 = (प_१ प_२)^2 = र_१^2 + र_२^2 - २ र_१ र_२ कोमु (ब_१ - ब_२)$$

$$क्ष_१ - र_१ कोमु ब_१ ; य_१ - र_१ मुब_१$$

$$क्ष_१ - य_१ = र_१ (कोमुब + मुब) - र_१ [कोमुब + मुब = १]$$

$$ह्या प्रमाणेच क्ष_२ + य_२ = र_२$$

$$तेव्हा (क्ष_१ + क्ष_२) + (य_१ + य_२) = र_१ + र_२ ; \dots \dots (अ)$$

$$तसेच क्ष_१ क्ष_२ = र_१ र_२ कोमुब_१ कोमुब_२$$

$$आणि य_१ य_२ = र_१ र_२ मुब_१ मुब_२$$

$$(क्ष_१ क्ष_२ + य_१ य_२) - र_१ र_२ (कोमुब_१ कोमुब_२ + मुब_१ मुब_२)$$

$$= र_१ र_२ कोमु (ब_१ - ब_२) [ले. ६० स. (४)] \dots (ब)$$

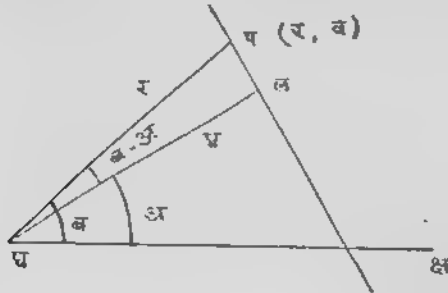
ब समीकरणाची दुपट अ समीकरणात वजा केली तेव्हा.

$$(क्ष_१ - २क्ष_१ क्ष_२ + क्ष_२) + (य_१ - २य_१ य_२ + य_२)$$

$$र_१^2 ; र_२^2 - २र_१ र_२ कोमु (ब_१ - ब_२)$$

$$म्हणून (क्ष_१ - क्ष_२)^2 + (य_१ - य_२)^2 = र_१^2 + र_२^2 - २र_१ र_२ कोमु (ब_१ - ब_२)$$

१३९. वृत्तानुसारी बिंदु निर्णायकांनी सरळ रेषेचे समीकरण सिद्ध करावयाचे.



प हा पल रेषवरील कोणतातरी बिंदु आहे. त्याची निर्णायके (र, ब) आहेत. घ पासून पल वर धल लंब केला. तेव्हा पलघ हा काटकोन त्रिकोण आहे. म्हणून

$$घल = घप कोभु पघल$$

$$म्हणजे घ - र कोभु (ब अ) [हे त्या रेषेचे समीकरण]$$

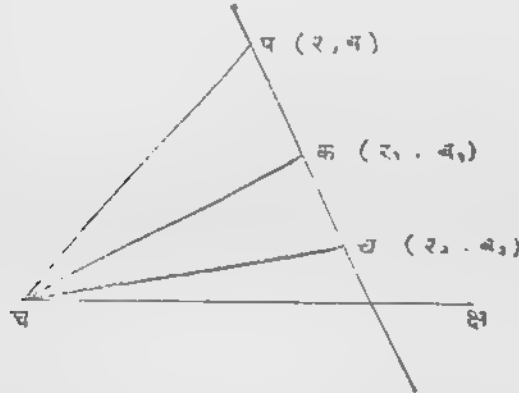
१४०. सरळ रेपेच्या वृत्तानुसारी समीकरणावरून भुजांनुसारी समीकरण बनवते, ते अस—

$$\begin{aligned} \text{छ} &= \text{र कोभुज कोभुज} + \text{र भुज भुज}, \\ &= \text{क्ष कोभुज} + \text{य भुज} \quad [\text{ले. १२०}] \end{aligned}$$

$$\text{कारण र कोभुज} = \text{क्ष, आणि र भुज} = \text{य} \quad [\text{ले. १३६}]$$

१४१. दिलेल्या दोन बिंदुमधून जाणाऱ्या सरळ रेपेचे समीकरण सिद्ध करावयाचे.

क च हे दोन बिंदु दिलेले आहेत याचे वार्तिक अनुक्रमे (र, व_१) आणि (र, व_२) हे आहेत. ह्या दोन बिंदूतून जाणाऱ्या रेपेन प (र, व) हा एक कोणता तरी बिंदु घेतला. घप, घक, घच हे बिंदु सांघले.



ह्या आकृतीत प घ क आणि क घ च हे दोन त्रिकोण आहेत आणि त्यांच्या बेरजेबरोबर प घ च त्रिकोण आहे.

$$\begin{aligned} \text{पघक त्रि. चे क्षेत्र} &= \frac{1}{2} \text{र.र}_१ \text{ भुज्या पघक कोन} \\ &= \frac{1}{2} \text{र.र}_१ \text{भु}(व - व_१) \end{aligned}$$

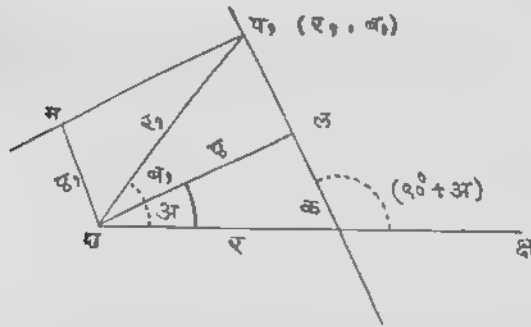
$$\text{तसेच कघच त्रि. चे क्षेत्र} = \frac{1}{2} \text{र}_१ \text{र}_२ \text{भु}(व_१ - व_२)$$

$$\text{पघच त्रि. चे क्षेत्र} = \frac{1}{2} \text{र.र}_२ \text{भु}(व - व_२)$$

म्हणून

$$\text{र.र}_१ \text{भु}(व - व_१) + \text{र}_१ \text{र}_२ \text{भु}(व_१ - व_२) = \text{र.र}_२ \text{भु}(व - व_२).$$

१४२. जी रेखा (२, २५) ह्या बिंदूतून जाने आणि प्रस्थापित घक्ष रेपेशी (९०° अ) अंशाचा कोन करिजे ह्या रेपेचे समीकरण मिद्ध करावयाचे.



कल रेखा घक्ष रेपेशी क बिंदूतून छेदिजे घक्ष रेखा र लावोची आहे. क बिंदूने वृत्तानुसारी निर्णयिके (२, ०) आहेत. आणि प्रस्थापित रेपेशी कल रेखा (९०° अ) अंशाचा कोन करिजे ह्या कल रेपेचे समीकरण मिद्ध करावयाचे.

घ पासून कल वर घल लंब केला. तो छ लावोना आहे ल घक्ष वोन अ अंशाचा आहे. तेव्हां

$$\text{छ} = २ \text{ कोभुअ}$$

क बिंदुची वार्तिके (२, ०) आहेत ह्यामध्ये व वोन ० आहे म्हणजे हे समीकरण

$$\text{छ} = २ \text{ कोभु}(० - अ) - \text{कोभुअ} [\text{कोभु}(- अ) - \text{कोभुअ}]$$

किंवा $\text{छ} = २ \text{ कोभु}(ब - अ)$.

१४३. दिलेल्या रेपेवर तिच्यातील दिलेल्या बिंदूपासून लंब काढलेली जी रेखा तिचे समीकरण ठरवावयाचे.

वरच्या लेखांतील आकृती पहा.

प हा दिलेल्या कल ह्या रेपेतील दिलेला बिंदु आहे. प बिंदूतून कल वर लंब असणारी पम रेखा आहे तेव्हां पम रेपेचे समीकरण मिद्ध करावयाचे.

घ पासून पम वर घम लंब केली घम = छ, आहे.

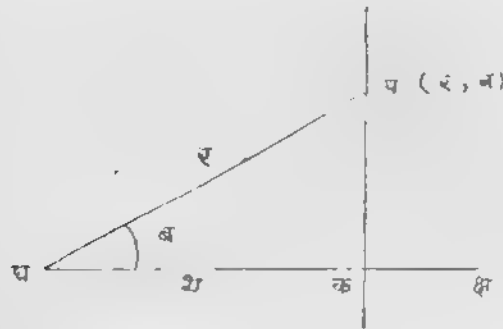
प, क रेपेचे समीकरण

$$\text{छ} = २ \text{ कोभु}(ब, - अ)$$

प, हा बिंदु प, म रेषेनही आहे तेव्हां प, म चे समीकरण असे—

$$\begin{aligned}
 \angle_1 &= r_1 \text{ कोभु } \{b_1 - (a + 90^\circ)\} \\
 &= r_1 \text{ कोभु } \{b_1 - a - 90^\circ\} \\
 &= - r_1 \text{ कोभु } \{180 - (b_1 - a - 90)\} \\
 &= - r_1 \text{ कोभु } \{90 - (b_1 - a)\} \\
 &= - r_1 \text{ भु } (b_1 - a) \\
 &= - r_1 \text{ भु } (a - b_1)
 \end{aligned}$$

१४४. जी रेखा प्रस्थापित रेषेवर (घक्ष वर) लव होईल, आणि ती रेखा प्रस्थापित रेषेला घ नामून \angle अंतरावर छेदील त्या रेषेचे वृत्तानुगारी समीकरण सिद्ध करा.



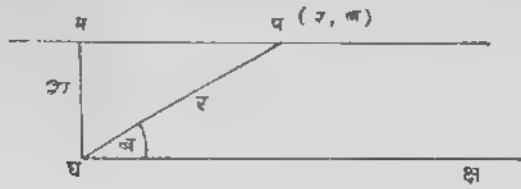
घक्ष रेषेवर पक रेखा लव आहे, आणि घक अंतर — \angle आहे ह्या रेषेचे समीकरण सिद्ध करणे.

पक रेषेत प (र, ब) हा कोणता तरी बिंदु आहे.

$$\frac{\angle}{r} = \text{कोभुब}$$

म्हणून $\angle = r \text{ कोभुब}$ [हे त्या रेषेचे समीकरण.]

१४५. जी रेखा प्रस्थापित रेणेशी समानर आहे, आणि त्या दोहोत $\frac{r}{R}$ लवानर आहे. त्या रेणेशी वृत्तांतुसारी समीकरण मिळू करा.



$$\frac{r}{R} = \frac{\text{भू घयम} - \text{भूव}}{\text{र भुव.}}$$

म्हणून

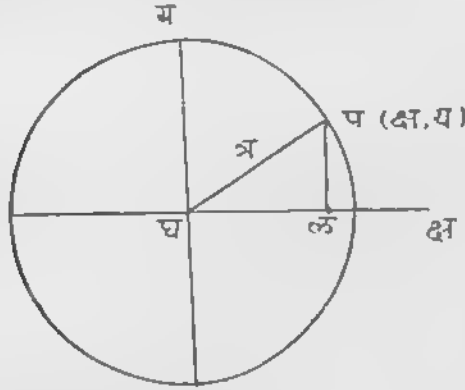
$$\frac{r}{R} = \frac{\text{भू घयम} - \text{भूव}}{\text{र भुव.}}$$

वर्तुळ

अभ्योग्य लंबाक्ष

१४६. प्रस्थापित घ बिंदु ज्याचा मध्य आहे, आणि ज्याची त्रिज्या त्र आहे, अशा वर्तुळाचे समीकरण सिद्ध करावयाचे.

वर्तुळाच्या परिघावर प (क्ष, य) हा कोणताही बिंदु आहे.



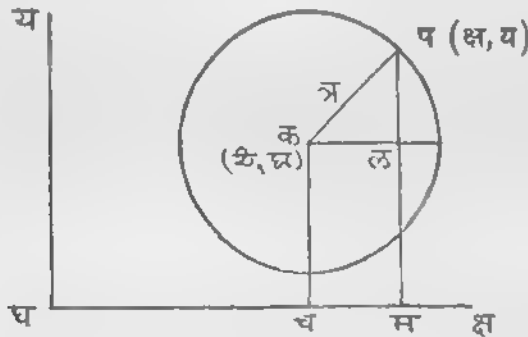
प बिंदूपासून घ क्ष वर प ल लंब केला. तेव्हा

$$पल^2 + घल^2 = घप^2$$

$$यल = क्ष, पल = य, घप = त्र$$

म्हणून $क्ष^2 + य^2 = त्र^2$ [हे वर्तुळाचे समीकरण होय.]

१४७. ज्या वर्तुळाचा मध्य बिंदु क स्थानी आहे, आणि ज्याची त्रिज्या त्र आहे, अशा वर्तुळाचे समीकरण सिद्ध करावयाचे



क विदु वर्तुळाचा मध्य आहे. त्याचे भुज (ॲ, ए) आहेत.
वर्तुळाच्या परीघावर प (क्ष, य) कोणता तरी विदु आहे.

क आणि प विदूपासून घक्ष वर कच, पम लंब केले आणि क पासून पम वर कल लंब केला.

क प ल हा काटकोन त्रिकोण आहे. म्हणून

$$कल^2 + पल^2 = कप^2$$

$$पण कल = वर = क्ष - ॲ$$

$$पल = पम - कच = य - ए$$

$$म्हणून (क्ष - ॲ)^2 + (य - ए)^2 = कप^2. [हें त्या वर्तुळाचें स.]$$

१४८. वर मिळ केलेल्या $(क्ष - ॲ)^2 + (य - ए)^2 = कप^2$ ह्या समीकरणाचें स्वरूप.

$$क्ष^2 + य^2 - २ ॲक्ष - २ एय + ॲ^2 + ए^2 - कप^2 = ० \dots (१)$$

$$किंवा क्ष^2 + य^2 + २ गक्ष + २ फय + स = ० \dots (२).$$

हें वर्तुळाच्या समीकरणाचें सर्वसामान्य स्वरूप आहे.

(अ) (१) ह्या समीकरणान ॲ = ०, आणि ए = ० असेर तर समीकरण $क्ष^2 + य^2 = कप^2$ असें होईल.

ह्यावरून दोन गोष्टी दिसून येतात ॲ आणि ए हे वर्तुळ मध्याचे भुज कोटि आहेत. हे ० असेर तर प्रस्थापित घ विदूवर भुज काटि शून्य असताना म्हणून वर्तुळाचा मध्य घ विदूत आहे, असे सिद्ध होते.

(ब) (१) यातील वर्तुळाचा पण प्रस्थापित घ विदूतून गेला असेल तर समीकरण खाली लिहिल्याप्रमाणे होईल. कारण क्ष = ०, य = ०

$$म्हणून ॲ^2 + ए^2 = कप^2.$$

आणि समीकरणाचे सामान्य स्वरूप.

$$क्ष^2 + य^2 - २ ॲक्ष - २ एय - ०$$

असे असेर तर, त्या वर्तुळाचा परीघ प्रस्थापित घ विदूत जात आहे.

(क) (१) वर्तुळाचा परीघ प्रस्थापित घ बिंदूतून जात आहे. आणि वर्तुळाचा मध्य क्ष अक्षावर आहे, म्हणजे क्ष अ क्ष वर्तुळ मध्यातून जात आहे, तर $\angle \text{अ} = ०$ आणि $\angle \text{अ} = १८०$ होईल आणि समीकरण अशा स्वरूपाचे होईल—

$$क्ष^2 + य^2 - २ \text{अ} य = ०$$

(२) वर्तुळाचा परीघ प्रस्थापित घ बिंदूतून जात आहे. आणि वर्तुळाचा मध्य य अक्षात आहे, म्हणजे य अ क्ष वर्तुळ मध्यातून जात आहे, तर, तर $\angle \text{अ} = ०$ $\angle \text{अ} = १८०$ होईल तेव्हा समीकरणाने स्वरूप खाली लिहिल्याप्रमाणे होईल :—

$$क्ष^2 + य^2 - २ \text{अ} य = ०$$

१४९. दोन अव्यक्तांचे वर्गसमीकरण असले, म्हणजे क्ष आणि य ह्या दोन अव्यक्तांचे वर्गसमीकरण असले तर त्याच्या निरनिराळ्या स्वरूपांचे निरनिराळे बिंदुनिधान दाखविते.

वर्तुळ हे बिंदुनिधान आहे. “मध्यबिंदूपासून त्रिज्यापरिमित अंतरावरच्या बिंदूंचे निधान हे वर्तुळ होय.”

ह्याप्रमाणेच सरकट, दीर्घवलय आणि उद्वलय याची समीकरणे ही क्ष आणि य ह्या अव्यक्तांच्या वर्ग समीकरणाने दाखविली जातात. तीही समीकरणे बिंदुनिधानांचीच असतात.

वरच्या प्रमाणात समीकरण (२) मध्ये ने स्थान मध्यात्मक गुणत ग, फ, ग दिले जात त्याचा एकमेकांशी व अंतरात अ य ह्याशी ज्या संबंध असेल त्याप्रमाणे ने वर्गसमीकरण वर्तुळादि कोणत्या बिंदुनिधानात आहे याचा निर्णय करून घ्या, ते विचार क्रमाक्रमाने पुढे दाखविला जाईल.

१५०. उदाहरण — वर्तुळाच्या परीघावर दोन बिंदू आहेत. त्या दोन्ही बिंदूतून जाणाऱ्या सरळ रेषेचा आपण वर्तुळाची छेदनरेषा म्हणतो. ह्या दोन बिंदूंची एक बिंदु स्थिर असून दुसरा बिंदु त्या स्थिर बिंदूपासून गमन करीत जातो. ह्या गमनामुळे ती छेदनरेषा आपली दिशा बदलत गेली. ज्या प्रसंगे ती चल बिंदु स्थिर बिंदूच्या अत्यंत समीप जाते त्या प्रसंगाची जी छेदनरेषा निघते त्या वर्तुळाची त्या स्थिर बिंदूतून गेलेली स्पर्शरेषा म्हणतात.

(‘मापरेषा’ हा शब्द त्रिकोणमितीमध्ये आहे आणि भूमितीमध्येही आहे. तथापि वरच्या उदाहरणातील स्पर्शरेषा हा भूमितीमधील शब्द सरलरेषेचा दर्शक आहे, आणि त्रिकोणमितीतील स्पर्शरेषा हा शब्द गुणोत्तरदर्शक असून वेगळ्यात्मक आहे.)

आतां p_1 बिंदु p बिंदूकडे आला तर p_1 ह्या रेषेचे तीर्यंगत्व p p_1 म_१ कोना-
इतके होईल. आणि ते p कोनाइतके झाले तर वरच्याप्रमाणेच सिद्ध होईल की

$$\text{स्प } \angle = \frac{p m_1}{p_1 m_1} = \frac{\nabla y}{\nabla x}.$$

शेवटी p_1 हा बिंदु p बिंदूशी जाऊन मिळाला तर वर्तुळाला छेदणारी p_1 रेषा
 p अशी होईल. म्हणजे वर्तुळाच्या परीघावरील अतिसन्निध असणाऱ्या दोन
बिंदूतून जाणारी रेषा होईल, म्हणजे ती वर्तुळाला स्पर्श करील.

१५२. वर्तुळाच्या परीघावर दिलेला p_1 (x_1, y_1) हा बिंदु आहे. ह्या
दिलेल्या बिंदूपासून—

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2$$

ह्या वर्तुळास स्पर्शरेषा काढावयाची आहे.

वर्तुळाच्या परीघावर p_1 $\left\{ (x_1 + \Delta x_1) + (y_1 + \Delta y_1) \right\}$ हा बिंदु

घेतला. p तो p_1 ह्या बिंदुमधील आहे. p_1 बिंदूतून जाणारे वर्तुळही तेच आहे,
म्हणून—

$$x_1^2 + y_1^2 = (x_1 + \Delta x_1)^2 + (y_1 + \Delta y_1)^2$$

स्थान विनिमयाने

$$(x_1 + \Delta x_1)^2 + (y_1 + \Delta y_1)^2 - x_1^2 - y_1^2 = 0$$

$$2 x_1 \Delta x_1 + (\Delta x_1)^2 + 2 y_1 \Delta y_1 + (\Delta y_1)^2 = 0$$

ह्या गमीकरणान Δx_1 आणि Δy_1 ही पदे p_1 आणि p_1 ह्या दोन
बिंदूंच्या भिन्नत्वासुद्धे अनुक्रमे x_1 y_1 ह्या भुजामध्ये होणारी वाढ किंवा घट
आहे. पण हे बिंदु अतिसन्निध आल्यान नी वाढ किंवा घट अत्यंत सूक्ष्म अशी सल्ला
होईल आणि त्याचे वर्ग म्हणजे $(\Delta x_1)^2$, $(\Delta y_1)^2$ तर ० होणार म्हणून

$$2 x_1 \Delta x_1 + 2 y_1 \Delta y_1 = 0$$

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = - \frac{x_1}{y_1}$$

पण वरच्या लेखाप्रमाणे $\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$ हें पद (x_1, y_1) ह्या बिंदूत काढि-
लेल्या स्पर्शरेषेचे घट्ट अक्षाशी जें तीर्यगत्व त्या कोनाची स्पर्शरेषा आहे. ही
स्पर्शरेषा (x_1, y_1) ह्या बिंदूत जाते आणि घट्ट अक्षाशी $\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$ ही किंवा
— $\frac{y_1}{x_1}$ ही ज्या कोनाची स्पर्शरेषा आहे इतक्या अशाचा कोन करिते, ह्या रेषेचे
समीकरण लेख १२५ प्रमाणे खाली दिल्याप्रमाणे आहे :—

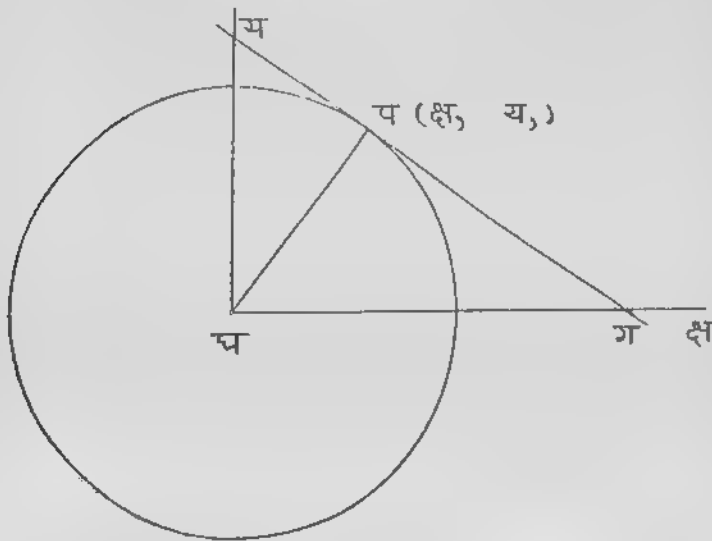
$$y - y_1 = - \frac{x_1}{y_1} (x - x_1) \text{ [हें स्पर्शरेषेचें स.]}$$

$$\text{किंवा } y y_1 + x x_1 = x_1^2 + y_1^2$$

$$\text{पण } x_1^2 + y_1^2 = r^2$$

$$\text{म्हणून } x x_1 + y y_1 = r^2 \text{ [हें स्प. रेषेचें समी. होय.]}$$

१५३. व्याख्या.—जी रेषा स्पर्शरेषेवर तिच्यातील स्पर्श बिंदूत जाते आणि
तिजवर लंब असते त्या रेषेला स्पर्शरेषा म्हणावे. जसे (खालच्या आकृतीत पहा).



वर्तुळाला प बिंदूतून पग स्पर्श रेखा काढिलेली आहे ह्या रेपतील प बिंदूपासून तिजवर पक हो लबरेषा केलो. हिला स्पर्लबरेषा म्हणावें.

वर्तुळाला त्याच्या परीधावर असलेल्या बिंदूपासून स्पर्लबरेषा होणाऱ्या किंवा असलेल्या रेषेचें समीकरण सिद्ध करावयाचें.

$$क्ष^२ + य^२ = ३^२$$

ह्या वर्तुळाच्या परीधावर (क्ष_१, य_१) हा बिंदु आहे. ह्या बिंदूपासून वर्तुळाम काढिलेली स्पर्शरेषा—

$$क्ष क्ष_१ + य य_१ = ३^२$$

ही आहे. आणि ह्याच समीकरणाचे स्वरूप—

$$य - य_१ = - \frac{क्ष_१}{य_१} (क्ष - क्ष_१)$$

असेही आहे ह्या समीकरणांत रेपेने क्ष अक्षाची तीर्यगतत्वदर्शी स्पर्शरेषात्मक गुणन — $\frac{क्ष_१}{य_१}$ हा आहे, हा गुणक $\frac{१}{+ \frac{क्ष_१}{य_१}}$ असा लिहिल्यानें जें समीकरण

होईल ते, त्या रेपेवर लंब असणाऱ्या रेपेने समीकरण होतें असे मागे सिद्ध केले आहे. लेख १२८ उपसिद्धांत २ पहा. तेथे सिद्ध केले कीं—

$$स्पर्ज = \frac{१}{स्पर्ज},$$

म्हणून

$$य - य_१ = \frac{१}{\frac{क्ष_१}{य_१} + \frac{क्ष_१}{य_१}} (क्ष - क्ष_१)$$

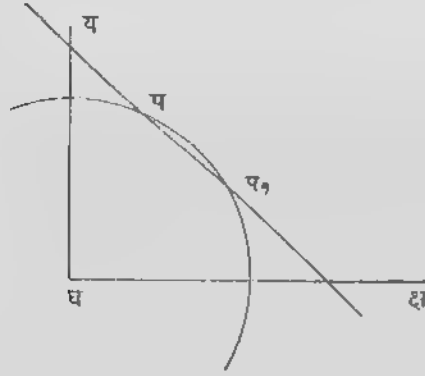
$$\text{किंवा} \quad (य - य_१) = \frac{य_१}{क्ष_१} (क्ष - क्ष_१)$$

$$\frac{य - य_१}{य_१} = \frac{क्ष - क्ष_१}{क्ष_१}$$

$$\text{म्हणजे} \quad \frac{य}{य_१} = \frac{क्ष}{क्ष_१} \quad [\text{हें स्पर्लब रेपेचें स. होय.}]$$

उपसिद्धांत—वर्तुळाच्या स्पर्शरेपेवरील स्पर्लबरेषा वर्तुळाच्या मध्यबिंदूतून जाते.

१५४. ज्याचा प्रस्थापित बिंदु आणि लंब भुज अक्ष एकच आहेत असे एका वर्तुळाचे समीकरण $x^2 + y^2 = r^2$ दिले आहे, आणि एका सरळ रेषेचे समीकरण $y = \text{स्प} x + \text{छ}$ दिले आहे. तर ही रेषा ह्या वर्तुळाला स्पर्श करिते हे कोणत्या आधारांनं म्हणता येईल ?



रेषेच्या समीकरणातील y ची किमान वर्ग करून वर्तुळाच्या समीकरणात लिहिली तर x ह्या अव्यक्ताचं वर्गसमीकरण व्हेल. ह्या वर्गसमीकरणापासून x च्या दोन किमती निघतील. ह्या दोन किमती वास्तव निघून दोन्ही समान असतील तर P आणि P_2 बिंदूंचे x कोटि समान ठरतील आणि P, P_2 रेषा वर्तुळाला स्पर्श करील.

$$y^2 = (\text{स्प} x + \text{छ})^2$$

$$x^2 + (\text{स्प} x + \text{छ})^2 = r^2$$

$$x^2 + \text{स्प}^2 x^2 + 2 \text{स्प} x \text{छ} + \text{छ}^2 = r^2$$

$$x^2 (1 + \text{स्प}^2) + 2 \text{स्प} \text{छ} x + \text{छ}^2 - r^2 = 0$$

सामान्य स्वहूपाचें वर्गसमीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ असें असते आणि त्यांत $b^2 - 4ac$ अक अशी स्थिति अगली तर x च्या समान अद्या दोन किमती निघतात

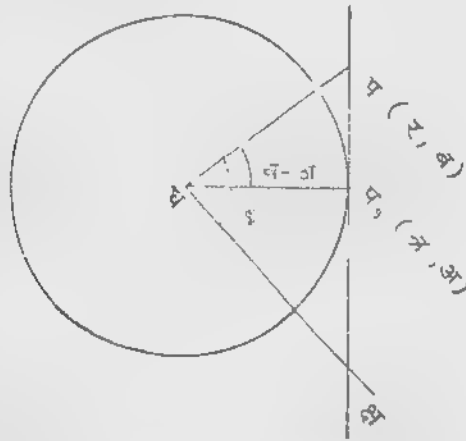
येथें $a = 1 + \text{स्प}^2$; $b = 2 \text{ स्प} \text{ छ}$ आणि $c = \text{छ}^2 - \text{त्र}^2$ असें आहे म्हणून

$$\begin{aligned} (2 \text{ स्प} \text{ छ})^2 &= 4 (1 + \text{स्प}^2) \times (\text{छ}^2 - \text{त्र}^2) \\ 4 \text{ स्प}^2 \text{ छ}^2 &= (4 + 4 \text{ स्प}^2) (\text{छ}^2 - \text{त्र}^2) \\ 4 \text{ छ}^2 + 4 \text{ स्प}^2 \text{ छ}^2 &= 4 \text{ छ}^2 - 4 \text{ स्प}^2 \text{ छ}^2 \\ \text{छ}^2 &= \text{त्र}^2 (1 + \text{स्प}^2) = \text{त्र}^2 \text{ छ}^2 (b) \\ \text{छ} &= \text{त्र} \text{ छेव} \end{aligned}$$

(येथें ϕ कोन म्हणजे स्पर्शरेषेनें घट अक्षाशी केलेला कोन.)

वृत्तानुसारी वर्तुळाची समीकरणे

१५५ वर्तुळाचे आणि वर्तुळाच्या स्पर्शरेषेचे वार्तीय समीकरण वर्तुळाचा मध्य प्रस्थापित व बिंदूत आहे.



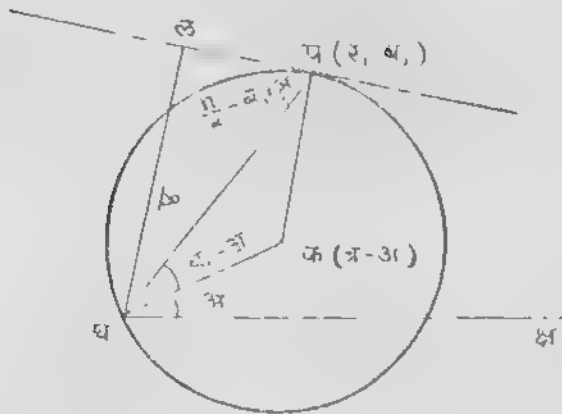
वर्तुळाच्या परीघावरील प्रत्येक बिंदूचे r अंतर व बरोबर असते.

$$r = \text{त्र} \quad (\text{हें वर्तुळाचें वार्तीय समी.})$$

वर्तुळाला $P, (त्र, अ)$ ह्या बिंदूतून स्पर्शरेषा काढावयाची. P_1 ह्या बिंदूतून वर्तुळाला स्पर्शरेषा काढली आहे असे द्या. ती PP_1 ही आहे तिच्यात $P, (r, b)$ हा कोणता तरी बिंदू आहे. घपप, हा काटकोन आहे. आणि ϕ घ प, कोन $b - अ$ आहे तसेच ϕ ही त्रिज्या आहे म्हणून PP_1 ह्या स्पर्शरेषेचें समीकरण खाली दिल्याप्रमाणे आहे :—

$$x = r \cos (\phi - अ)$$

क (अ, अ) वर्तुळाचा मध्य आहे. म्हणून



$$\text{लघु कोन} = \frac{\pi}{2} - \text{घण्ट कोन}$$

$$= \frac{\pi}{2} - (अ, अ)$$

$$\begin{aligned} \text{म्हणून घळ} &= \text{पलभु} \left\{ \frac{\pi}{2} - (अ, अ) \right\} \\ &= \text{र कोसु} (अ, अ) \end{aligned}$$

$$\text{आतां लघु कोन} = \text{लघु कोन} + \text{पक्ष कोन}$$

$$= (अ, अ) + अ = २अ - अ$$

नेह्या पल स्पर्शरेषेचे समीकरण खाली दिल्याप्रमाणे. घळ = ४

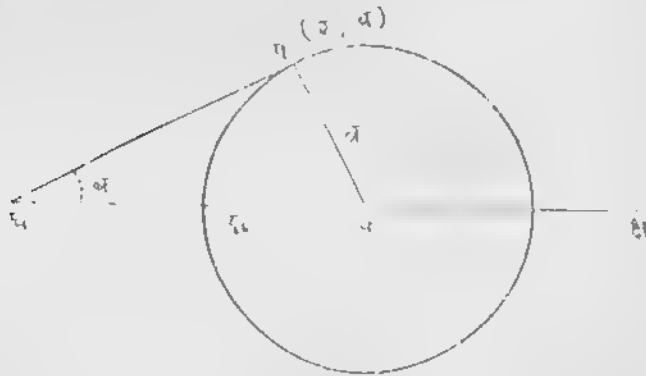
$$\text{आणि } ४ = \text{र कोसु} (अ - अ) \quad [\text{लेख १४२.}]$$

$$\text{म्हणून र कोसु} (अ, अ) = \text{र कोसु} \left\{ अ - (२अ - अ) \right\}$$

१५९. ज्या वर्तुळाचा मध्य क बिंदु घळ अक्षावर आहे आणि त्या मध्य बिंदूची वार्तिके (अ ०) आहेत त्याचे समीकरण मिळव करावयाचे.

वर्तुळ परीधानर कोणता नरी π (२ व) बिंदु घेतला. आणि पच पर बिंदु साधले,

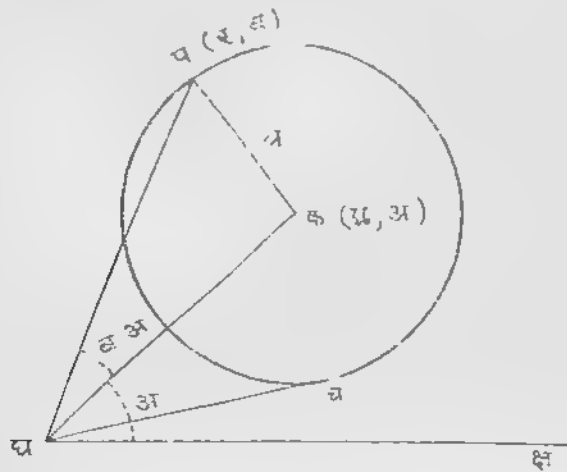
तेव्हां लेख ७० स. (१) प्रमाणें



$$व^2 = र^2 + अ^2 - २ अर कोसु$$

[हें वर्तुळाचें स. होय.]

१६० वर्तुळाचा मध्य बिंदु क (४, अ) आहे. आणि त्याची त्रिज्या व आहे त्या वर्तुळाचें समीकरण सिद्ध करावयाचें.



तेव्हां लेख ७० स (१) प्रमाणे

$$व^2 = र^2 + अ^2 - २ अर कोसु (व - अ)$$

[हें व. स. होय.]

परवलय

१६१. शंकुच्छिन्न भूमिनिमध्ये परवलय, दीर्घवलय आणि उद्वलय ह्या वक्र-रेषांची लक्षणे मागितली आहेत. त्याची समीकरणे व त्यावरून मिद्ध होणारे मिद्वान येथे दाखविले आहे. ते मिद्वान पुष्कळच आहेत. ते येथे देणें अवश्यक आहे. ह्या विषयावर स्वतंत्र ग्रंथ व्हावयास पाहिजे. येथे काही मिद्वानांची रूपरेखा मात्र दिली आहे.

१६२. वरच्या तीन आकृती विदुनिधानरूपी आहेत. ह्या आकृतींचें सामान्य लक्षण खाली लिहिल्याप्रमाणे आहे :

व्याख्या.—एक स्वीर रेषा आणि एक त्या रेषेबाहेरील स्वीर विदु आहे. एक चक विदु आहे. ती विदु, ती रेषा आणि स्वीर विदु यांच्याच पानळीमध्ये गमन करीत आहे, हे गमन असे होत आहे की, चक विदु व स्वीर विदु यामधील अंतर आणि चक विदुचे स्वीर रेषेपासून लंबांतर, ह्या दोन रेषांचे गुणोत्तर, त्या चक विदूच्या कोणत्याही प्रत्येक स्थितीत समान असते. ह्या गुणोत्तरात चक विदु व स्वीर विदु यामधील अंतर अग्रसरस्थानी आणि चकविदु आणि स्वीर रेषा यामधील लंबांतर उपाग्रसरस्थानी घेतले आहे. हे गुणोत्तर (१) साम्यायक म्हणजे ३ असेल तर परवलयाची रेषा हे विदुनिधान होते, (२) अनयार्थक म्हणजे गम अत्रुणासामक असेल (उदाहरणार्थ १ असल) तर दारंगडा नामक विदुनिधान होत, आणि (३) गुणोत्तर अविस्थायक असेल (उदाहरणार्थ ३ असेल) तर उद्वलय नामक विदुनिधान होत. ह्या गुणोत्तराच्या केंद्रस्थिति असे म्हणतात.

ह्या व्याख्येतील स्वीर रेषेला नायिका आणि स्वीर विदूला केंद्र म्हणतात हे मागे शंकुच्छिन्न प्रकरणी सांगितलेच आहे.

१६३. परवलयाचें समीकरण मिद्ध करावयाचे.

क हे केंद्र आहे आणि मम' ही नायिका आहे. क विदूपासून मम' वर कर्ण लव हाडिला. कर्ण' व विदूत दोन समान भाग केले. आता कड 'मम' हे गुणोत्तर साम्यायक आहे म्हणून या विदु परवलयावरून असे हे व्याख्येवरून कळत. या विदु हा प्रश्नात घेतले व त्यास घ असे म्हणू. या रेषा वाडवून तिच्यातील एका विदूला थ असे नाव देऊ. तेव्हा लव मुज कोटीचा घअ हा अ अक्ष आहे. हापर घ विदूत घय लंब केला. घय हा घ अक्ष आहे. प हा परवलयावरील (अ घ) कोणताही

ह्यावरून क्ष च्या प्रत्येक किमतीवरून य च्या सारख्या दोन किमती एक धन व एक ऋण अशा निघतात. ह्यावरून क्ष अक्षानें परवल्याचे जे दोन भाग होतात ते 'सम-स्वरूपी' असतात.

क्ष ची किमत ऋण असेल तर य^१ ची किमत ऋण होणे पण हें अशक्य. [कोणत्याहि सव्येचा वर्ष धन असतो.] म्हणून य अक्षाच्या उजवीकडेच परवलय आहे.

क्ष ची किमत जमजमी वाढेल तगन्शी य ची किमत वाढेल म्हणून परवल्याच्या वक्ररेषेची टोके अमर्याद अंतरावर नुद्धां एकमेवाम मिळणार नाहीत.

१६५. परवल्याचा केंद्र क्ष अक्षान असून नायिका य अक्षान मिळालेली अनेक जशी स्थिति असतां परवल्याच्या समीकरणाचें स्वरूप.

लेख १६३ मधील आकृति पहा. क्ष'म हा य अक्ष समजा आणि घ बिंदु क्ष' वर समजा. अर्थात प बिंदूचा क्ष भुज = पम आणि य भुज = क्षम = पल

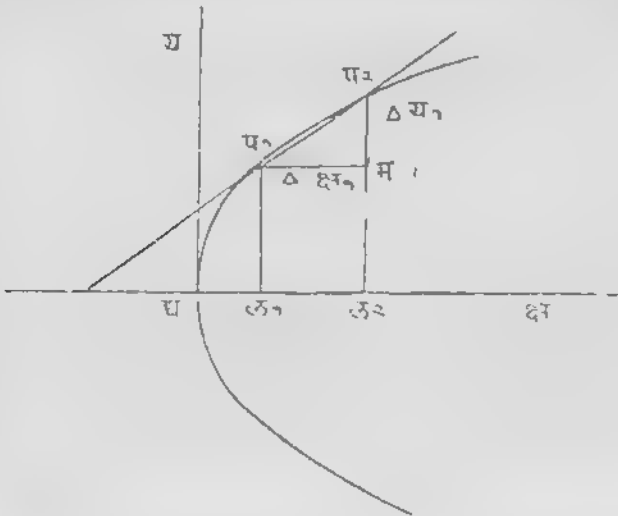
$$क्ष^२ = पम^२ = क्ष'ल^२ = पक^२ = कल^२ + पल^२$$

$$कल^२ = (क्ष - २'क्ष)^२; पल^२ = य^२$$

$$क्ष^२ = क्ष^२ - ४'क्ष + ४'क्ष^२ + य^२$$

$$य^२ = ४'क्ष (क्ष - २')$$

१६६. ज्याचें गमीकरण य^२ = ४'क्ष क्ष आहे ह्या परवलयाम प, (क्ष, य,) ह्या परवल्यावरील बिंदूतून ताढलेल्या स्पर्शरेषे व गमीरण मिळ करवयाचे.



प, विदू जवळ प, $\left\{ (\Delta_1 + \Delta \Delta_1), (y_1 + \Delta y_1) \right\}$ हा विदु घेतला, हा विदु परवळयावर आहे म्हणून

$$(y_1 + \Delta y_1)^2 = ४ \text{ अ } (\Delta_1 + \Delta \Delta_1)$$

$$\text{म्हणजे } y_1^2 + २ y_1 \Delta y_1 + (\Delta y_1)^2 = ४ \text{ अ } \Delta_1 + ४ \text{ अ } \Delta \Delta_1$$

परंतु $y_1^2 = ४ \text{ अ } \Delta_1$ हे परवळयाचे समीकरण वजा केले

$$\text{तेव्हा } २ y_1 \Delta y_1 + (\Delta y_1)^2 = ४ \text{ अ } \Delta \Delta_1$$

$$\text{म्हणून } २ y_1 \Delta y_1 = ४ \text{ अ } \Delta \Delta_1 \text{ कारण } (\Delta y_1)^2 = ०$$

आतां प, विदु प, विदुशी मिळाल्या तर प, प, विदुतून जाणाऱ्या छेदरेषेचे क्ष अक्षाशी नियोगत्व

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta \Delta_1} = \frac{२ \text{ अ}}{y_1} \quad [\text{लेख १५१}]$$

असे होते आणि तो छेद रेखा स्पर्शरेखा होते. द्विचे समीकरण लेख १५१ प्रमाणे

$$y = y_1 + \frac{० \text{ अ}}{y_1} (\Delta_1 - \Delta_1)$$

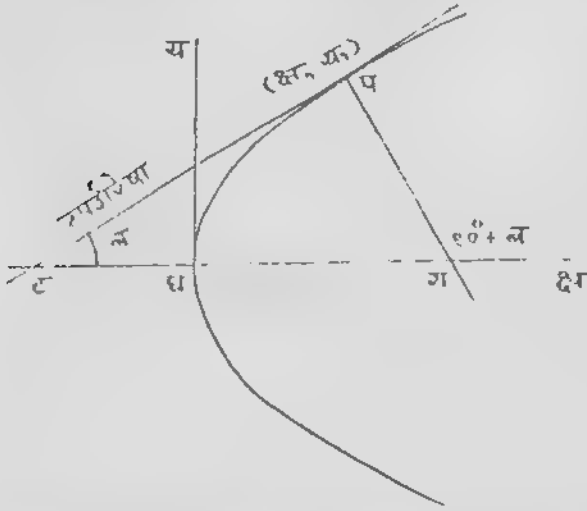
$$\text{म्हणजे } y_{\Delta_1} - y_1^2 = २ \text{ अ } \Delta_1 - २ \text{ अ } \Delta_1$$

$$\text{पण } y_{\Delta_1}^2 = -४ \text{ अ } \Delta_1 \quad [\text{वजा केले}]$$

$$\text{म्हणून } y_{\Delta_1} = २ \text{ अ } \Delta_1 (\Delta_1 + \Delta_1) \quad [\text{हैं स्पर्शरेषेचे स.}]$$

१६७. परवल्याची स्पर्शरेषा $y = y_1 = \frac{2xy_1}{(x_1 - x_2)}$ आहे तर

त्या रेषेवरील स्पर्शबिंदूत तिजवर लव असणाऱ्या रेषेचे म्हणजे स्पर्शरेषेचे समीकरण ठरवावयाचे.



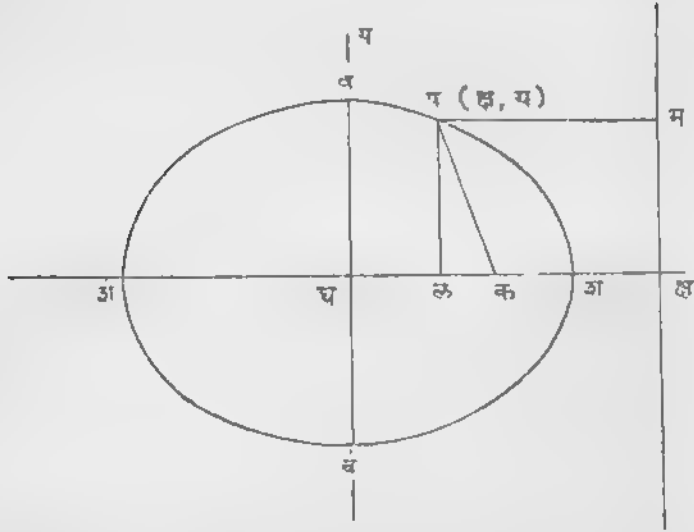
पट ही स्पर्शरेषा असून प हा स्पर्शबिंदु आहे. तेव्हा पम लव रेषा हिला स्पर्शरेषा म्हणावयाचे. हिचे समीकरण मिळ करवावयाचे. हे समीकरण लेख १२५ अ प्रमाणे खाली लिहिल्याप्रमाणे आहे—

$$y - y_1 = - \frac{y_1}{2x_1} (x - x_1) \quad [\text{हे स्पर्शरेषेचे स.}]$$

दीर्घवलय

१६८. दीर्घवलयाचें समीकरण सिद्ध करावयाचे.

क हें दीर्घ वर्तुळाचें केंद्र आहे, आणि क्षम ही नायिका आहे. क केंद्रापासून क्षम नायिकेवर कक्ष लंब केला. कक्षचे असें दोन



भाग केले की, त्या भागांचे गुणोत्तर ई ह्या केंद्रच्युतिशी परिमित होईल ते भाग श विद्युंत झाले असें घ्या. ह्यावरून

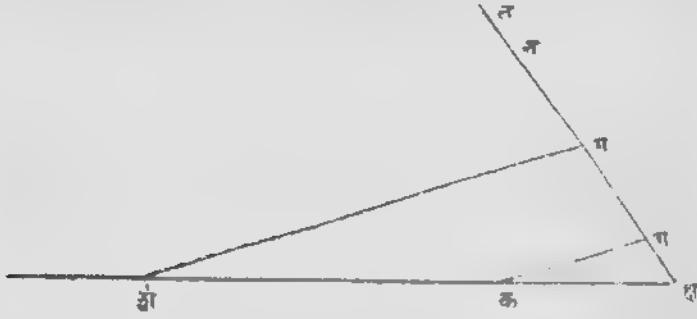
$$\frac{\text{कक्ष}}{\text{शक्ष}} = \text{ई} \quad [\text{लक्षणावरून}]$$

म्हणून श विद्युत दीर्घवलयाच्या परीघावरचा आहे.

१६९. क्षक रेखा वाढवून तिच्यात अमा एक बिंदु समजा श' बिंदु सोडून वाढावयाचा आहे की श'क : श'क्ष हे गुणोत्तर वरच्या लेखांतील ई बरोबर होईल.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{कक्ष} & & \text{श'क} & & & & \\ \text{—} & = & \text{—} & & & & \\ \text{शक्ष} & & \text{श'क्ष} & & & & \\ \text{शक्ष} \text{ — } \text{कक्ष} & = & \text{श'क्ष} \text{ — } \text{श'क} & & \text{कक्ष} & & \\ \text{शक्ष} & & \text{श'क्ष} & & \text{श'क्ष} & & \end{array}$$

क्षकच' ही भरल रेपा घ्या. हिच्यासी केवडा नरी कांन करणारी क्षत रेपा काढा. क्षतचा क्ष बिंदूपासून क्षम हा श'क्ष एवडा नुकडा पाडा आणि मन चा कक्ष एवडा



मन नुकडा पाडला. तसेच मक्ष चा मन एवडा मग नुकडा पाडला.

श'क्ष रेपाचा क्ष पासून क्षक नुकडा वगच्या लेवानील कक्ष बरोबरच केला. क्षम बिंदु माथून निच्यासी म बिंदूतून समान रेपा काडली, ती क्षक ला श' बिंदूत मिळाली तेव्हां श' हा इच्छिलेला बिंदु आहे. कारण

$$\text{क्षम} : \text{क्षक्ष} :: \text{क्षम} : \text{क्षक्ष}$$

$$:: \text{क्षम} : \text{क्षक्ष}$$

$$:: \text{क्ष'क्ष} = \text{क्ष'क्ष} \text{ [सरूप त्रिकोण]}$$

क्षक्ष आणि क्ष'क्ष, हे सरूप त्रिकोण आहेत.

ह्यावरून

$$\frac{\text{क्षम}}{\text{क्षक्ष}} = \frac{\text{क्ष'क्ष}}{\text{क्षक्ष}}$$

$$\frac{\text{क्ष'क्ष}}{\text{क्षक्ष}} = \frac{\text{क्षम}}{\text{क्षक्ष}}$$

तेव्हा श' बिंदु हा दोन्ही वर्तुळांच्या परीधावरचाच आहे.

१७०. लेख १६८ मधील प्राकृताने जंग हा दीर्घवल्ग्याचा बृहदक्ष आहे. जंग
जे घ विदूत दोन समान भाग केले. त्यापैकी प्रत्येक भाग ७ लावीला आहे. म्हणजे

$$\text{घश} = ७ = \text{घश}';$$

$$\text{कश}' = \text{ई. श'क्ष आणि कश} = \text{ई. शक्ष}$$

$$\text{श'श} = \text{श'क} + \text{कश} = \text{ई (श'क्ष + शक्ष)} = २७$$

$$२७ - \text{ई} \left\{ (\text{घक्ष} + \text{घश}') + (\text{घक्ष} - \text{घश}) \right\} = २ \text{ई घक्ष}$$

$$\text{म्हणून घक्ष} = \frac{७}{२} \dots \dots \dots (१)$$

तसेच

$$\text{श'क्ष} - \text{कश} = \text{ई (श'क्ष - शक्ष)}$$

$$= \text{ई} \left\{ (\text{घश}' + \text{घक}) - (\text{घश} - \text{घक}) \right\} = २ \text{ई. घक}$$

$$= २७ \text{ई}$$

$$\text{घक} = ७ \text{ई} \dots \dots \dots (२)$$

१७१. दीर्घवल्ग्याचे समीकरण सिद्ध करण्याकरिता लव भुजकोटी प्रस्थापित
केले पाहिजेत. त्यासाठी जंग हा क्ष अक्ष आणि वव' हा य अक्ष ठरवून अक्षाने
त्याचा छेदन बिंदु घ हा प्रस्थापित बिंदु होय. जंग बृहदक्षाचे अर्ध ७ मध्येने आणि
वव' लघ्वक्षाचे अर्ध हा सध्येने दाखवू.

दीर्घवल्ग्याच्या परीघावरील प्रत्येक बिंदूच्या भुज कोटीचे समीकरण सिद्ध वगवग्याचे
या करिता परीघावर कोठे तरी प हा एक बिंदु घेतला त्याचे भुज (क्ष, य) हे आहेत.
प बिंदूपासून नायिकेवर पम लव केला आणि घक्ष वग पन लव केला. पक माघळ.

लक्षणावरून पाहता

$$\text{पक} = \text{ई पम} = \text{ई. लक्ष}$$

$$\text{पक}^2 = \text{ई}^2. \text{लक्ष}^2$$

$$\text{पल}^2 + \text{कल}^2 = \text{पक}^2 = \text{ई}^2. \text{लक्ष}^2$$

$$\text{पण कल} = \text{घक} - \text{घल} = ७ \text{ई} - \text{क्ष}, \text{ पल} = \text{य}$$

$$\text{आणि लक्ष} = \text{घक्ष} - \text{घल} = \frac{७}{२} - \text{क्ष}$$

$$\text{म्हणून कल}^2 = \text{पल}^2 = (७ \text{ई} - \text{क्ष})^2 + \text{य}^2 \dots \dots \dots (अ)$$

$$\text{आणि ई}^2 \text{लक्ष}^2 = \text{ई}^2 \left(\frac{७}{२} - \text{क्ष} \right)^2 \dots \dots \dots (ब)$$

(अ) आणि (ब) ह्या दोन्ही किमती समान आहेत

म्हणून

$$(\text{अई} - \text{क्ष})^2 + \text{य}^2 = \text{इ}^2 \left(\frac{\text{अ}}{\text{ई}} - \text{क्ष} \right)$$

$$(\text{अई} - \text{क्ष})^2 - (\text{अ} - \text{क्षई})^2 = \text{य}^2$$

$$(\text{अ} - \text{क्षई})^2 - (\text{अई} - \text{क्ष})^2 = \text{य}^2$$

$$\left\{ (\text{अ} - \text{क्ष}) + \text{ई} (\text{अ} - \text{क्ष}) \right\} \left\{ (\text{अ} + \text{क्ष}) - \text{ई} (\text{अ} + \text{क्ष}) \right\} = \text{य}^2$$

$$(\text{अ}^2 - \text{क्ष}^2) + \text{ई} (\text{अ}^2 - \text{क्ष}^2) - \text{ई} (\text{अ}^2 - \text{क्ष}^2) - \text{ई}^2 (\text{अ}^2 - \text{क्ष}^2) = \text{य}^2$$

$$(\text{अ}^2 - \text{क्ष}^2) - \text{ई}^2 (\text{अ}^2 - \text{क्ष}^2) = \text{य}^2$$

$$\text{य}^2 = (1 - \text{ई}^2) (\text{अ}^2 - \text{क्ष}^2) \quad [\text{हें दीर्घवल्याचें स.}]$$

१७२. दीर्घ वर्तुळाच्या परीघावरील प बिंदु पय अक्षावर आला तर य = अ होईल आणि क्ष = ० होईल म्हणून

$$\text{य}^2 = (1 - \text{ई}^2) (\text{अ}^2 - \text{क्ष}^2) \quad \dots\dots\dots (अ)$$

ह्या समीकरणाचे स्वरूप

$$\text{अ}^2 = (1 - \text{ई}^2) \text{अ}^2 \quad \dots\dots\dots (ब)$$

(अ) समीकरणाला (ब) समीकरणानें भागिले तर

$$\frac{\text{य}^2}{\text{अ}^2} = \frac{(1 - \text{ई}^2) (\text{अ}^2 - \text{क्ष}^2)}{(1 - \text{ई}^2) \text{अ}^2} = 1 - \frac{\text{क्ष}^2}{\text{अ}^2}$$

$$\text{किंवा } \frac{\text{क्ष}^2}{\text{अ}^2} + \frac{\text{य}^2}{\text{अ}^2} = 1 \quad [\text{हें दीर्घवल्याचें लसमी. होय}]$$

१७३. दीर्घवल्याच्या परीघावरील दिलेल्या प (क्ष, य,) ह्या बिंदूपासून त्यास स्पर्शरेषा काढावयाचें. दीर्घवल्याचें समीकरण

$$\frac{\text{क्ष}^2}{\text{अ}^2} + \frac{\text{य}^2}{\text{अ}^2} = 1 \quad \text{हें आहे.}$$

प बिंदूमधील दुसरा बिंदु घेतला त्याचे भुज $(x_1 + \Delta x_1, y_1 + \Delta y_1)$ हे आहेत.

प बिंदु दीर्घवलय वक्ररेषेवर आहे म्हणून $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$

$$\text{त्यामुळेच } \frac{(x_1 + \Delta x_1)^2}{a^2} + \frac{(y_1 + \Delta y_1)^2}{b^2} = 1$$

$$\text{वजावाकीत } \frac{x_1 \Delta x_1 + (\Delta x_1)^2}{a^2} + \frac{y_1 \Delta y_1 + (\Delta y_1)^2}{b^2} = 0$$

दुसरा बिंदु पहिल्या बिंदूम मिळाला तर $(\Delta x_1)^2 = 0, (\Delta y_1)^2 = 0$

म्हणून

$$\frac{x_1 \Delta x_1}{a^2} + \frac{y_1 \Delta y_1}{b^2} = 0$$

$$\text{अर्थात } \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = - \frac{a^2 x_1}{b^2 y_1}$$

स्पर्शरेषेचे क्ष अक्षाशी जे तीर्यगत्य त्याची स्पर्शरेषा $-\frac{a^2 x_1}{b^2 y_1}$ ही आहे म्हणून (x_1, y_1) या बिंदूतून जाणाऱ्या रेषेचे समीकरण खालील लिहिल्याप्रमाणे—

$$y - y_1 = - \frac{a^2 x_1}{b^2 y_1} (x - x_1)$$

$$\text{अथवा } \frac{y y_1}{b^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = - \frac{a^2 x_1}{b^2} x + \frac{a^2 x_1^2}{b^2}$$

$$\frac{a^2 x_1}{b^2} x + \frac{y y_1}{b^2} = 1 \quad [\text{हे स्पर्शरेषेचे समीकरण}].$$

१७४. दीर्घवलाच्या स्पर्शरेषेचे समीकरण हे

$$y - y_1 = - \frac{a^2 x_1}{b^2 y_1} (x - x_1)$$

असे आहे. तेव्हा स्पर्शरेषेचे समीकरण

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1)$$

असे आहे. लेख १२५-अ पहा.

१७५. दीर्घवलयाचें स्वरूप.

दीर्घवलयाचें समीकरण खाली लिहिल्याप्रमाणें आहे :—

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{ह्यावरून } \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2}$$

$$\text{अर्थात् } \frac{y}{b} = \pm \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}}$$

ह्या समीकरणात x ची किंमत कोणतीही असो y च्या समान अशा दोन किंमती येतात, त्यापैकी एक धन आणि दुसरी ऋण येते. यावरून असे ठरते की, दीर्घवलयाचें x अक्षानें केलेले दोन भाग 'सम स्वरूपी' असतात.

सम स्वरूपी म्हणजे x अक्षानें झालेले दोन भाग एक वरचा, ज्यात y ची किंमत धन आहे असा भाग, आणि दुसरा खालचा, ज्यात y ची किंमत ऋण आहे असा भाग हे दोन्ही एकमेकांवर उबलून ठेविले तर ते सर्वांशी परस्परार्था मिळतात.

$$\text{तसें व } \frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} = \frac{b^2 - y^2}{b^2}$$

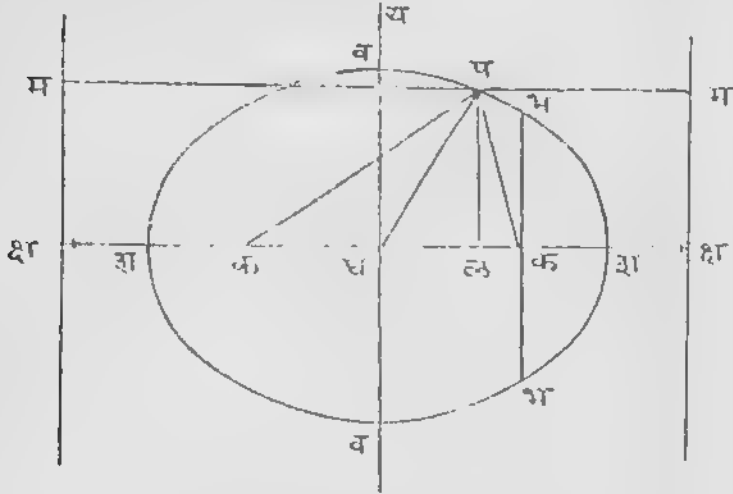
$$\text{अर्थात् } \frac{x}{a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - y^2}{b^2}}$$

ह्यावरून y अक्षानें केलेले दीर्घ वर्तुळाचे दोन्ही भाग डावीकडचा आणि उजवीकडचा, हेही 'सम स्वरूपी' असतात.

१७६ शत्रुजिह्वा ह्या प्रकरण त मिळ केले आहे या दीर्घवलयाचा दोन केंद्रे आणि दोन नायिका असतात. हे वरच्या प्रतिपादनावरून मिळतात. y अक्षानें वर्तुळ दोन्ही भाग सम स्वरूपी असतात. केंद्र केंद्राशी शिरोविंदु शिरोविंदूशी मिळतात अर्थात् नायिका ही नायिकेशी मिळालीच पाहिजे.

१७७ दीर्घवलयाच्या परीधावरील कोणत्याही एका बिंदूपासून दोन्ही केंद्रांपर्यंत 2 दोन अतरे त्याची वेरीज बृहदक्षावरोबर असते.

क क' ही केंद्रे आहेत. प (x_1, y_1) हा परीधावरील कोणतातरी बिंदु आहे आणि $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ हे त्या दीर्घवर्तुळाचे समीकरण आहे तर प क पक' ह्या रेखांची बेरीज शश' बृहदक्षावरोवर म्हणजे २ ए असते असे सिद्ध करावयाचे.



$$पक = ई. पम \text{ आणि } पक' = ई. प म'$$

$$\text{किंवा } पक = ई. लक्ष = ई \left(\frac{ए}{ई} - क्ष \right) = ए - ईक्ष$$

$$\text{आणि } पक' = ई. लक्ष' = ई \left(\frac{ए}{ई} + क्ष \right) = ए + ईक्ष$$

म्हणून

$$पक + पक' = २ ए.$$

१७८. दीर्घवल्याचे कांहीं सिद्धांत

(१) दीर्घवल याचा केंद्रग भुज, याचे समीकरण.

क केंद्रापासून श श' बृहदक्षावर काढलेल्या लंबाचा दीर्घवल्यातील जो भाग त्याला केंद्रग भुज म्हणतात. आकृतीमध्ये भ क भ' हा केंद्रग भुज आहे. याचे समीकरण ठरवावयाचे.

भ विदूचे भुज (घ क, क भ) हे आहेत. किवा (अ ई, क भ) हे आहेत. भ विदु दीर्घवर्तुळाच्या परीघावर आहे, व दीर्घवर्तुळाचे समीकरण

$$\frac{क्ष^2}{अ^2} + \frac{य^2}{छ^2} = १ \text{ हे आहे.}$$

$$\text{म्हणून } \frac{अ^2 ई^2}{अ^2} + \frac{कभ^2}{छ^2} = १$$

$$\begin{aligned} कभ^2 &= (१ - ई^2) छ^2 - \frac{अ^2}{अ^2} \cdot छ^2 \\ &= \frac{छ^2}{अ^2} \end{aligned}$$

$$कभ = \frac{छ^2}{अ} = \frac{(१ - ई^2) अ^2}{अ} = (१ - ई^2) अ$$

$$\text{आणि भ भ' = } \frac{२अ^2}{अ}$$

(२) असें सिद्ध करावयाचें की

$$पल^2 : शल \times श'ल :: छ^2 : अ^2$$

प हा दीर्घवर्तुळाच्या परीघावरील विदु आहे. त्याचे क्ष, य भुज घल, पल हे आहेत घग माधत्ये. तेथें क्ष — घल अ कोभ पल आणि य छ भु पल = प

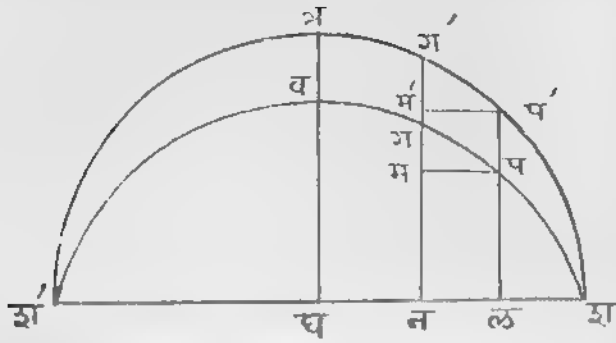
$$प^2 = छ^2 भु^2 \text{ (पलघ) }$$

$$\begin{aligned} शल \times श'ल &= (क्षघ + घल) (क्षघ - घल) \\ &= क्षघ^2 - घल^2 = अ^2 - अ^2 कोभु^2 \text{ (पलघ)} \\ &= अ^2 (१ - कोभ^2 पलघ) = अ^2 भ^2 पलघ \end{aligned}$$

म्हणून

$$\frac{प^2}{शल. श'ल} = \frac{छ^2 भ^2 \text{ (पलघ)}}{अ^2 भु^2 \text{ (पलघ)}} = \frac{छ^2}{अ^2}$$

(३) दीर्घवर्तुळाचे क्षेत्रफल



अ'अ हा श्रवण दीर्घवर्तुळाचा वृहदक्ष आहे, आणि अ'अ वर्तुळाचा अक्ष आहे. अ'अ वर पल, पल लव काढिले ते वर्तुळाचा मिळेपर्यंत वाढविले. पल वर पम, प'म लव काढिले.

तेव्हा

मनलप काटकोन चौकोणास : मनलप का. चौ. :: पल : पल'

पण वर्तुळाचा पल भुज याचा वग शंल \times शल

म्हणून पल' : पल' :: छ' : अ'

किंवा पल : पल :: छ : अ

म्हणून

मनलप का. चौ. : मनलप का. चौ. :: छ : अ

ह्या काटकोन चौकोनाप्रमाणे अ पासून न पर्यंत अनेक चौकोन काढिले तर

लहान चौकोनाच्या बेरजेस मांड या चौकोनाचा बेरीज :: छ : अ याने अनंत भाग करून चौकोन केले तरी त्याच्या बेरजांचे गुणोत्तर छ : अ हेच असणार म्हणून गणन ह्या आकृतीच्या क्षेत्राम ग'अन आकृतीचे क्षेत्र समेक छ : अ ह्याच प्रमाणेच

दीर्घवर्तुळक्षेत्रास : वर्तुळाचें क्षेत्र :: छ : अ

पण वर्तुळाचें क्षेत्र $= \pi a^2 = \pi a^2$ [अ'अ = अ] म्हणून

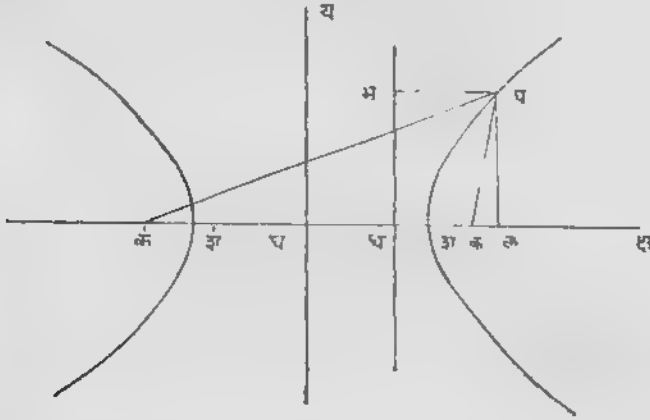
दीर्घ वर्तुळाचें क्षेत्र : πa^2 :: छ : अ

किं व. क्षे $= \frac{\pi a^2 \cdot छ}{अ} = \pi a^2 छ$

उद्वल्य

१७९. उद्वलयाचें समीकरण सिद्ध करावयाचें.

व हें उद्वलयाचें केंद्र आहे आणि व म ही नायिका आहे.



ई ही उद्वलयाची केंद्रब्युति आहे. ही भाव संख्या आहे. सर्व गुणोत्तरें भाव संख्यात्मकच असतात. ई ही संख्या १ पेक्षा जास्त आहे. (लेख १६२ उद्वलयाची व्याख्या पहा) काय मानून वाटविलेली रेषा हा उद्वलयाचा अक्ष होईल. क ध चे श विद्वत दोन भाग करा ते अने १: कय : यय हे गुणोत्तर ई परिमित होईल. म्हणजे ई इतके होईल. तेव्हा

$$\frac{यय}{कय} = ई$$

यावरून लक्षणाप्रमाणे पाहता श हा विद्व उद्वलयाच्या वक्र रेगेवरचा आहे.

लेख १६९ च्या पद्धतीने श' हा असा विद्व शोधून काढा की

$$\frac{यय'}{कय'} = ई$$

हा शोधिलेला श' विद्व उद्वलयाच्या वक्र रेगेवरील आहे. य' य चे ध विद्वत दोन समान भाग करा. म्हणजे

$$यय' = यय = यय'$$

$$\text{कश'} = \text{ई.श'घ} \text{ आणि कश} = \text{ई.शघ}$$

$$\text{कश'} + \text{कश} = \text{ई} (\text{श'घ} + \text{शघ})$$

$$\text{अथवा (घश' + घक)} + (\text{घक} - \text{घश}) = \text{ई.श'श} = २ \text{ ई.घश} \\ = २ \text{ ई.घश}$$

$$\text{म्हणून घक} = \text{ॲई} \dots\dots\dots (१)$$

$$\text{तसेच कश'} - \text{कश} = \text{ई} (\text{श'घ} - \text{शघ})$$

$$\text{अथवा श'श} = \text{ई} \left\{ (\text{घश' + घक}) - (\text{घश} - \text{घक}) \right\}$$

$$२ \text{ ॲ} = २ \text{ ई घ घ}$$

$$\text{घघ} = \frac{\text{ॲ}}{\text{ई}} \dots\dots\dots (२)$$

१८०. उद्बलवाचे समीकरण मिद्ध करण्यास अक्ष घक्ष आणि घघ हे घेऊ.
उद्बलवाच्या वक्ररेषेवर कोठे तरी प हा बिंदु घेतला त्याचे भुज (क्ष, य) हे आहेत
लक्षणावरून पाहतां

$$\text{पक} = \text{ई.पम} = \text{ई.लघ}$$

$$\text{पक}^२ = \text{ई}^२ \text{ लघ}^२$$

$$\text{पल}^२ + \text{कल}^२ = \text{पक}^२ = \text{ई}^२ \text{ लघ}^२.$$

$$\text{पण कल} = \text{घल} - \text{घक} = \text{क्ष} - \text{ॲई}; \text{पल} = \text{य},$$

$$\text{आणि लघ} = \text{घल} - \text{घघ} = \text{क्ष} - \frac{\text{ॲ}}{\text{ई}}$$

$$\text{कल}^२ + \text{पल}^२ = (\text{क्ष} - \text{ॲई})^२ + \text{य}^२$$

$$\text{ई}^२ \text{ लघ}^२ = \text{ई}^२ \left(\text{क्ष} - \frac{\text{ॲ}}{\text{ई}} \right)^२$$

$$\text{म्हणून } (\text{क्ष} - \text{ॲई})^२ + \text{य}^२ - \text{ई}^2 \left(\text{क्ष} - \frac{\text{ॲ}}{\text{ई}} \right)^२ = ०$$

$$(\text{क्ष} - \text{ॲई})^२ + \text{य}^२ = (\text{क्षई} - \text{ॲ})^२$$

$$(\text{क्षई} - \text{ॲ})^२ - (\text{क्ष} - \text{ॲई})^२ = \text{य}^२$$

$$\left\{ \frac{x}{\alpha} (\alpha - \beta) + (\alpha - \beta) \right\} \left\{ \frac{x}{\alpha} (\alpha - \beta) - (\alpha - \beta) \right\} = y^2$$

$$\frac{x^2}{\alpha^2} (\alpha^2 - \beta^2) - (\alpha^2 - \beta^2) = y^2$$

$$y^2 = (\frac{x^2}{\alpha^2} - 1) (\alpha^2 - \beta^2) = (\frac{x^2}{\alpha^2} - 1) \alpha^2 - (\frac{x^2}{\alpha^2} - 1) \beta^2$$

ह्या समीकरणांतील $\alpha = 0$ मानिला तर

$$-y^2 = -\beta^2 + (\frac{x^2}{\alpha^2} - 1) \beta^2$$

$$\text{म्हणून } (\frac{x^2}{\alpha^2} - 1) \alpha^2 - y^2 = + (\frac{x^2}{\alpha^2} - 1) \beta^2$$

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad [\text{हे उद्वलयाचे समी.}]$$

१८१ उद्वलयाच्या परीधावरील कोणत्यानरी एखाद्या (α, y) ह्या बिंदू-
पासून त्यास स्पर्शरेषा काढिली असता निघालेल्या रेषेचे मर्माकरण मिळू करावयाचे

लेख १७३ मधील दीर्घवर्तुळाच्या उपपत्तिमध्ये β च्या जागी— β' लिहिल्याने
जे समीकरण होते तेच उद्वलयाच्या स्पर्शरेषेचे समीकरण असते. म्हणजे

$$\frac{\alpha \alpha_1}{\beta^2} - \frac{y y_1}{\beta^2} = 1$$

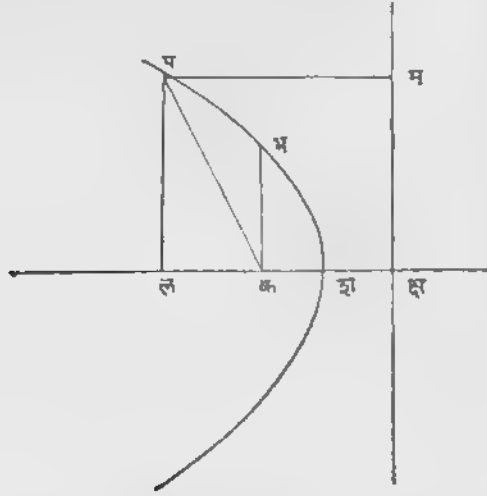
त्याचप्रमाणे दीर्घवर्तुळाच्या स्पर्शरेषेच्या मर्माकरणाने β' च्या जागी
— β' लिहिल्याने लेख १७४ मधील उपपत्ति प्रमाणे उद्वलयाच्या स्पर्शरेषेचे
समीकरण सिद्ध होते. ते असे—

$$y - y_1 = - \frac{\beta y_1}{\beta' \alpha_1} (\alpha - \alpha_1)$$

शंकुच्छिन्नाकृतीच्या वक्ररेषांची अक्षीय समीकरणे

१८२. परवलय, दीर्घवर्तुळ व उद्वलय यांची लव भुज निर्णायिकाची समीकरणे
मागे मिळू केली आहेत. त्यांचीच अक्षीय समीकरणे येथे मिळू करावयाची आहेत.
वृत्तासमारी बिंदु निर्णायक घेऊन वर्तुळासमवी समीकरणे लेख १५५ ते १६० यांमध्ये
मिळू करून दाखविली. त्याप्रमाणे शंकुच्छिन्नाची समीकरणे मिळू होताना. शंकु-
च्छिन्नाच्या परवलय, दीर्घवर्तुळ व उद्वलय ह्या निही प्रकारच्या वक्ररेषांची
समीकरणे, यांच्यामध्ये एकरूपता असल्यामुळे, प्रत्येक वक्ररेषेचे समीकरण निराळे
सिद्ध करावे लागत नाही.

१८३. पमश ह्या वक्ररेषेचें केंद्र क विंदु अमून क्षम



ही नायिका आहे. येथे क हा प्रस्थापित विंदु आणि क क्ष हा अक्ष आहे. वक्र रेपेवर प हा एक (r, θ) विंदु आहे. क भ हा केंद्रग मुजायें आहे. केंद्रग भुजायें भ ह्या अक्षराने दाखविला. आता ह्या चिह्नाकृतीची केंद्रच्युति ई आहे. तेव्हा ई भ र व ह्या सख्यानी कभय रेपेचे समीकरण बनवावयाचें.

येथें कभ = $r \cos \theta$, कप = $r \sin \theta$ आणि प क क्ष कोन θ व आणि केंद्रच्युति ई ह्याप्रमाणे र व भ ई याचें समीकरण साधावयाचें आहे.

प विंदूपासून क्षम वर पम लंब केला आणि कक्ष वर पल लंब केला. आता

$$र = कप = ई.पम = ई.लक्ष = ई (कक्ष + कल).$$

$$= कभ + ई.कप कोभु पकल कोन$$

$$= भ + ई.र. कोभु (१८० - \theta)$$

$$= भ - ई र कोभु \theta.$$

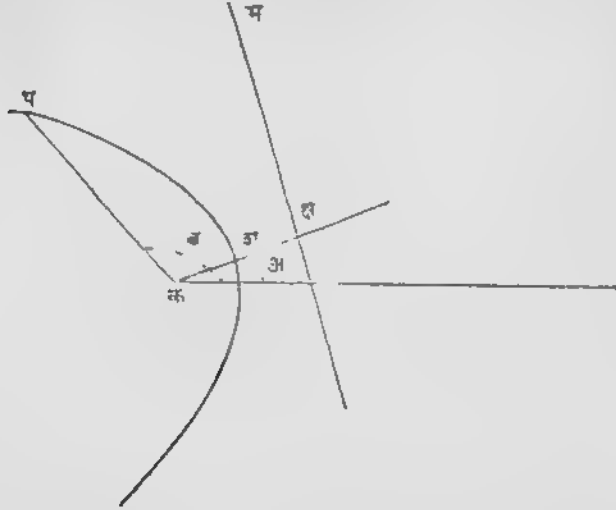
येथे ई.कक्ष = भ व्याख्येवरून स्थान भेदानें

$$भ = र (१ + ई कोभु \theta)$$

$$\text{किवा } \frac{भ}{र} = १ + ई कोभु \theta$$

[हें चिह्नाकृतीचें स. हांय.]

उपसिद्धांत १.—जर क केन्द्रानून जाणारी प्रस्थापित रेखा छिन्नाकृतांच्या अक्षाशी (च्छिन्नमध्य रेपेशी) अ अशाचा कोन करीत असेल तर ते समीकरण खाली लिहिल्याप्रमाणे होईल.



येथे प क क्ष कोन = (व — अ)

$$\text{म्हणून } \frac{भ}{र} = १ + \text{ई कोभु (व — अ)}$$

उपसिद्धांत २.—शंकुच्छिन्न जर परवलय असेल तर ई = १

$$\text{तेव्हा } \frac{भ}{र} = १ + \text{कोभु व}$$

$$\text{पण भभ' = ४ कक्ष म्हणून भ = २७.}$$

$$\text{आणि } १ + \text{कोभु व} = २ \text{ कोभु }^2 \frac{व}{२},$$

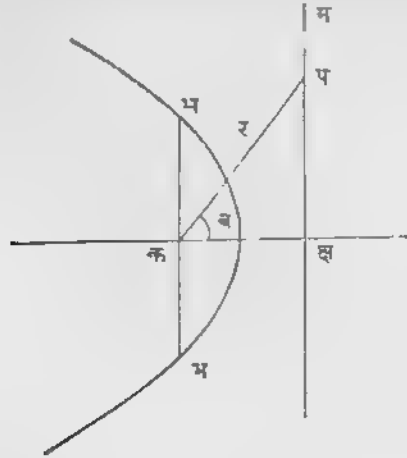
$$\text{म्हणून } \frac{२७}{२} = २ \text{ कोभु }^2 \frac{व}{२},$$

$$\text{अथवा } \frac{७}{२} = \text{कोभु }^2 \frac{व}{२}.$$

[हे परवलययाचें समीकरण]

१८४. अक्षीय बिंदुनिर्णयकानुसारी प्रस्थापित बिंदु जो स्वीकारला तो शंकुच्छिन्नाचे केंद्र क हा बिंदु होय, आणि क क्ष ही प्रस्थापित रेखा किंवा अक्ष होय, ही घेऊन नायिकेचें समीकरण सिद्ध करावयाचे.

क्षम नायिकेवर प (र, व) हा कोणता तरी बिंदु घेतला. तेव्हा



$$\text{कक्ष} = \text{र कोभु व}$$

$$\text{आणि कभ} = \text{ई. कक्ष}$$

$$\text{म्हणून } \frac{\text{भ}}{\text{र}} = \text{ई. कोभु व}$$

[हें नायिकेचें समीकरण.]

१८१. शकुन्तिलयामध्ये परवलय, दीर्घवलय आणि उर्ध्ववलय ह्या तीन वक्र-रेखांचा समावेश होतो. या तीहीचो अक्षांश समीकरणे तिथिचा भिन्न आहेत. म्हणून प्रत्येक वक्ररेषेचे समीकरण येथें दाखवितो.

(१) परवलयाचें समीकरण—

$$\text{कप} = \text{र, शकप} = \text{व, आणि कप} = \text{पम} = \text{लक्ष.}$$

$$\text{र} = \text{लक्ष} = \text{लक} + \text{कय} + \text{शक्ष.}$$

$$= \text{कप} \times \text{कोभु} (१८० - \text{व}) + \text{७} + \text{७}$$

$$\text{र} = - \text{र. कोभुव} + २ \text{७}$$

$$\text{र} (१ + \text{कोभुव}) = २ \text{७}$$

$$\text{र} = \frac{२ \text{७}}{१ + \text{कोभुव}}$$

(२) दीर्घवलाचें समीकरण,—

$$\text{कप} = \text{र, शकप} = \text{व, आणि कप} = \text{ई. पम} = \text{ई. लक्ष}$$

$$\text{कप} = \text{ई. (कक्ष + कल)} = \text{ई. कक्ष} + \text{ई. कल};$$

$$\begin{aligned}
\text{ई. कश} &= \text{ई (कश + शश)} = \text{ई.कश} + \text{कश} \\
&= \text{कश (१ + ई)} \\
&= (\text{अ} - \text{वक}) (१ + \text{ई}) & [\text{वश} = \text{अ}] \\
&\quad - (\text{अ} - \text{अई}) (१ + \text{ई}) & [\text{वक} = \text{अई}] \\
&= \text{अ (१ - ई)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ई.कल} &= \text{इ. कप कोभु (१८० - ब)} \\
&= \text{ई. र कोभु (१८० - ब)} = - \text{ई. र कोभु}
\end{aligned}$$

म्हणून

$$र = \text{अ (१ - ई)} - \text{ई.र कोभु}$$

$$\text{किंवा } र = \frac{\text{अ (१ - ई)}}{१ + \text{ई कोभु}}$$

(३) उद्बलयाचें समीकरण—

$$\begin{aligned}
\text{कप} &= \text{र, शरूप} = \text{ब, कप} = \text{ई, पप} = \text{ई. लय}; \\
\text{रप} &= \text{ई (कप + कल)} = \text{ई. कप} + \text{ई. कल}; \\
\text{ई. कप} &= \text{ई (कश + शव)} = \text{ई. कश} + \text{कश} \\
&= \text{कश (ई + १)} = (\text{ई + १}) (\text{वरु} - \text{वश}) \\
&= (\text{ई + १}) (\text{वक} - \text{अ}) & [\text{वश} = \text{अ}] \\
&= (\text{ई + १}) (\text{अई} - \text{अ}) & [\text{वक} = \text{अई}] \\
&= \text{अ (ई - १)}
\end{aligned}$$

$$\text{ई. कल} = \text{ई. कप कोभु} = \text{ई. र कोभु}$$

म्हणून

$$र = \text{अ (ई - १)} + \text{ई. र कोभु}$$

$$\text{किंवा } र = \frac{\text{अ (ई - १)}}{१ - \text{ई कोभु}}$$

१८६. वैज्यभूमिनि ही उच्च प्रतीच्या गणितशास्त्राची अन्योन्य महत्त्वाची शाखा आहे, आणि ती अत्यंत विस्तीर्ण अशी आहे. ह्या विषयाशिवाय ग्रहांच्या गतीचे सिद्धान्त मिळत नाहीत. या कारणास्तव ह्या विषयाचे आधारभूत सिद्धान्त मिळत केल्या जावेत. सर्व सिद्धान्त मिळत करणे हे येथे असंभव असावा म्हणून तेथे केवळ नाहीं. एखाद्या सिद्धान्ताची आवश्यकता वाटल्यास तेथे तो सिद्धान्त मिळत करिता येईल म्हणून वैज्यभूमितीचें लेखन येथे थांबवून इतर विषयाकडे वळू.

प्रकरण आठवें

सूक्ष्मांश गणिताची मूलतत्वे.

१८७ सूक्ष्म हा शब्द मापेक्ष आहे. जसे लहान हा शब्द मापेक्ष असून त्याची अपेक्षा 'मोठा' ह्या शब्दाची असते. त्याप्रमाणे सूक्ष्म हा शब्द आहे. एका तळ्यातील पाणी किती आहे ते खडी (वजनी) ह्या परिमाणाने मोजून त्याचा इतक्यापणा लक्षण घ्यावयाचा असतो, त्या मोजणीत आपण शेर मण ह्याच्या संख्याची (म्हणजे खडीची पूर्ण मण्या सोडून राहिलेल्या शेगमणाची जी मण्या त्याची) ओक्षा वाळगीत नाही लहान म्हणून सोडून देतो. ह्यावरून तळ्यातील पाण्याच्या दृष्टीने शेरभर पाणी असदीच थोडे आहे. येथे शेरभर पाणी हा तळ्यातील पाण्याचा सूक्ष्मांश आहे अशा सूक्ष्मांशाचे जे गणित ते सूक्ष्मांश गणित होय.

१८८. विविध पदार्थांची वृद्धि किंवा क्षय होत असले तर ती त्या पदार्थाच्या किमती असावशेष होत, तिचे मापन करणे हा सूक्ष्मांश गणिताचा विषय आहे. ह्या मापनाचा विचार करिताना अनेक गिज्ञात गिज्ञाताना, आणि त्यासाठी जी समीकरणे गिज्ञा होताना, त्या समीकरणातील ज्ञान व अज्ञान ह्या दोन प्रकारच्या पदार्थांची ज्ञान पदार्थातून अज्ञान पदार्थाच्या किमती शोधिता येताना. सोपेसे उदाहरण म्हणजे वर्तुळाच्या परिघाचे व्यासाशी गुणोत्तर याची किमती किती? त्याच्या विविधोपनिमित्तविषयक एखाद्या गुणोत्तरावरून त्या कोनाच्या अशा सव्या ठरविणे. एखाद्या ग्रहाचा सूर्याभोवती फिरण्याचा प्रदक्षिण वेळ साहीत असतो त्या ग्रहाचे सूर्यापासून अंतर किती ते शोधणे. अशा प्रकारच्या मापनाचा विचार करणे हा सूक्ष्मांश गणिताचा विषय आहे.

१८९. काही शब्दांचे स्पष्टीकरण — 'स्वीय मर्या' 'विकार मर्या' आणि 'सचय' हे शब्द सूक्ष्मांश गणितात वापरले जावेत. त्यांची लक्षणे स्पष्टीकरणद्वारा खाली दाखविली आहेत:—

एका विविधोपनिमित्त विषयक स्वयं-क्षय-लक्षणाचे असेत, आणि त्या दोन वास्तविक दोन अंशांचा आहे. आणि त्याचे क्षय (Δ) परिमाणे आहे. क्षय अ आणि (क्षेपण) Δ (Δ चिन्हाचे वाचन 'अ' ह्या शब्दाने करावे. तसेच Δ क्षयाने वाचन क्ष या अशा अशा वाचवा.) ह्या चार सव्याने समीकरण खाली दिल्याप्रमाणे होतें. लेख ७० अ पहा.

$$\Delta = \frac{1}{2} \text{ क्ष. य मु अ}$$

ह्या समीकरणातील अ कोन दिलेला आहे म्हणून अ ही संख्या न बदलणारी आहे, तिच्या 'स्थीर संख्या' म्हणू. बाकी क्ष, य आणि Δ ह्या संख्या बदलणाऱ्या आहेत असे घेऊ. क्ष किंवा य ह्यांपैकी एका रेषेची किंवा दोन्हीची लांबी कमी किंवा जास्त झाल्यास Δ ची संख्या कमी किंवा जास्त होईल. म्हणून ह्या बदलणाऱ्या संख्या आहेत ह्यांना आपण 'विकारी संख्या' म्हणू.

विकारी संख्या ही दोन प्रकारच्या आहेत, एक 'स्वयंविकारी' आणि दुसरी 'परावलंबी'. वरच्या उदाहरणाने क्ष, य ह्या मग स्वयं विकारी आहेत, म्हणजे त्या स्वतांच विकार पावणाऱ्या म्हणजेच कमीजास्त होणाऱ्या आहेत. परंतु Δ ही क्षेत्राची संख्या स्वता विकार पावत नाही, ह्या मध्येची वाढ किंवा घट ही स्वयं विकारी संख्यांच्या किंवा एका संख्येच्या वाढघटीवर अवलंबून असते. म्हणून Δ (क्षेत्राचे क्षेत्र) ही संख्या परावलंबी असे म्हणण्याचे योजिले जाते.

Δ हे त्रिकोणाचे क्षेत्र आहे, हे क्षेत्र क्षय ह्यांपैकी दोन्ही किंवा एका मध्य विकारी पदाने घटते म्हणून Δ ही संख्या येथे क्ष, य ह्या स्वयं विकारी पदांचा गन्व जात असे म्हणावे.

१९०. वरच्या लेखाने जे गणिभाषिक शब्द मागिले त्यांच्या व्याख्या त्यांच्या लिहिल्याप्रमाणे आहेत :—

(अ) विवक्षित गणितविषयक एकाच कार्यामध्ये ज्या संख्येची किंमत घटत नाही अशा संख्येला स्थीर संख्या म्हणावे.

(ब) विवक्षित गणितविषयक एकाच कार्यामध्ये ज्या संख्येची किंमत एकाच रमाने नाही कमी जास्त होते तिच्या विकारी संख्या म्हणावे.

(क) ज्या विकारी संख्येची किंमत कमी जास्त वेवढेही मानिता येत तिच्या स्वयं विकारी संख्या, सौकर्यार्थ विकारी संख्या म्हणावे.

(ड) ज्या विकारी संख्येची किंमत स्वयं विकारी संख्येच्या किंमतांतून घटत तिच्या परावलंबी सौकर्यार्थ अवलंबी संख्या म्हणावे.

(ड) अवलंबी मध्य विकारी संख्येच्या एक किंवा अनेक पदारांमून घटत, त्या अवलंबी संख्येला त्या विकारी पदांच्या मध्य म्हणावे मध्य भार प्रसारचे असतात—बैजिक, वार्तिक, घातप्रकाशी आणि घातांकी.

१९१. लेखन पद्धति.—हा विषय महाराष्ट्र किंवा मराठी भाषेला अगदी अपरिचित आहे. कोणत्याहि विषयाची सामान्य लेखन पद्धति उरलेली असते.

बीजगणिताची लेखन पद्धति संस्कृत भाषेत निराळी आणि मराठीमध्ये निराळी आहे. परंतु सूक्ष्मज्ञ गणित हा विषय मराठीमधून लिहिलेला असा काही नाही तेव्हा लेखन पद्धति ही सुटीच नाही. यास्तव वाचकाच्या सोईला पडेल अशी लेखन पद्धति मी वापरली आहे. हिच्या बरेवाईटपणाची जबाबदारी मजवर आहे. त्या-विषयी इतर ग्रंथकारांच्या अनुमती घेऊन लेखन पद्धति प्रचारात आणावी असे मला कांयना आन नाही. तथापि विषयाची जाणीव चांगली व्हावी असा प्रयत्न केला आहे. हा लेखन पद्धति मी यथाप्रगती स्पष्ट करून दाखवीत आहे.

क्ष ही विकारी संख्या अगून हिचा संचय य ही संख्या आहे. या सत्रधाचे लेखन खाली लिहिल्याप्रमाणे—

$$य = सं (क्ष) \text{ किंवा } य = ३ (क्ष)$$

यातील स (क्ष) याचा अर्थ असा आहे की क्ष च्या संबंधाची जी काही पदे असतील या सर्वांची एकूणता करून आलेली संख्या. एकूणात जवळचा अर्थ बेगजेपेक्षा मित्र आहे. जसे—

$$अ = ७ + ३ + ५ + १ = १६ \text{ ही बेरीज आहे.}$$

$$आ = ९ - ३ + १ - ८ + ५ = ४ \text{ ही एकूणात आहे.}$$

स (क्ष) ह्या पदाचा अर्थ संक्षिप्त रीतीने लिहिलेला क्ष चा संचय हा आहे. प्रत्यक्ष संचय कसे असतात हे खाली लिहिलेल्याप्रमाणे—

य . क्ष ^१	किंवा	य = १ क्ष -- क्ष ^२
तसेंच	य = भुक्ष ;	य = २५ ^२ क्ष + १
आणि	य = अ ^{क्ष} ;	य = अ ^२ क्ष × ब ^{क्ष}
आणि	य = घा _अ क्ष ;	य = वा _इ क्ष ^३

ह्या आठ समीकरणांचे लेखन खालच्या एकाच समीकरणाने दाखविण्याचे साधन.

$$य = सं (क्ष) \text{ हे आहे.}$$

संचय जर अनेक विकारी पदांचा असेल तर सं (क्ष) ह्या संक्षिप्त लेखनातील कमाच्या आत क्ष च्या जागा ती विकारी पदे लिहावी जसे—

$$य = सं (क्ष, व, ज)$$

सं (क्ष) ह्या लेखनाचे वाचन 'संचय क्ष' असे वाचावे. तसेंच सं (क्ष, व, ज) ह्याचे वाचन संचय क्ष व ज असे वाचावे.

१९२. विकारी संख्येची किंमत स्थीर नाही ती चल आहे. हें चलन वृद्धि ह्या एकाच शब्दाने दाखविण्याने ठरविले आहे. पण विकारी संख्येची किंमत नुसती वृद्धीच पावत असते असे नाही, ती किंमत कमीही होते, म्हणजे चलन वाढ आणि घट अशा दोन प्रकारचे असतें तें चलन आम्ही वृद्धि ह्या एकाच शब्दाने दाखवितो. ह्याचरून वृद्धि म्हणजे वाढ असाच वृद्धि शब्दाचा अर्थ न घेता घनर्ण भेदेकरून दोन प्रकारचा मानिला आहे. एक (घन) वृद्धि आणि दुसरा (ऋण) — वृद्धि. घन वृद्धीचा अर्थ वाढ हा उघड आहे, पण ऋण वृद्धीचा अर्थ घट किंवा क्षय असा समजावा.

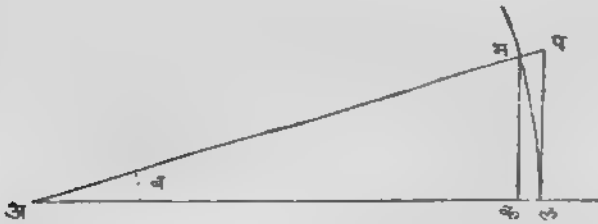
१९३. विवक्षित चल पदाची मर्यादा किंमत—विकारी संख्येची किंमत, ज्या संख्येच्या अनि सन्निय असेल, ती संख्या घेऊन जी त्या विवक्षित पदाची किंमत येईल, तिच्या त्या विवक्षित पदाची मर्यादित किंमत म्हणतात.

उदाहरण $\frac{२५}{५} = ५$ हें चल पद आहे ह्याची मर्यादित किंमत २ पासून ३ पर्यंत आहे. २ पेक्षा कमी होत नाही आणि ३ पेक्षा जास्त होत नाही. ही किंमत ५ ही संख्या अनंत (∞) असेल म्हणजे अत्यंत मोठ्या संख्येकून मोठी असेल तेव्हा वरच्या पदाची किंमत २ असते आणि ० असेल तेव्हा ३ असते. येथे अत्यंत लहान संख्येच्या लहान संख्येला शून्य म्हटले आहे.

रेषेसंबंधी विचार करिता 'अत्यंत लहान रेषेपेक्षा लहान रेषा' तिच्या रेषा म्हणता येईल व बिंदूही म्हणता येईल. त्याप्रमाणेच आवधी आणि क्षण व पिंड आणि परमाणु ही शब्दांची युग्मे आहेत. त्याप्रमाणेच सचय आणि सूक्ष्मांश हे युग्म आहे.

१९४. काही चल पदांच्या किंमती नियमित असतात. त्यांपैकी महत्त्वाची चार पदे खाली दिली आहेत :—

$$(१) (मर्यादा व = ०) \frac{भुज}{ब} = १$$



अक हा एक कोन आहे. आप मध्ये म हा एक बिंदु घेतला अल वर मक लंब केला. आणि अ मध्य करून अम त्रिज्येनें मल कंस काढला. तसेच ल बिंदूतून अलवर का लंब केला. मक मल पल ह्या तीन रेषास अम त्रिज्येन भागिले, अम = अल आहे. (वर्तुळाच्या त्रिज्या म्हणून).

$$\frac{\text{मक}}{\text{अम}} = \text{भुज्या व}, \quad \frac{\text{अक}}{\text{अम}} = \text{कोभुज्या व}$$

$$\frac{\text{मल}}{\text{अम}} = \frac{\text{मल कंस}}{\text{त्रिज्या}} = \text{व कोनाचे वृत्तपरिमाण},$$

$$\frac{\text{पल}}{\text{अल}} = \text{स्पर्श रेषा व}.$$

आतां

$$\frac{\text{भुव}}{\text{व}} = \frac{\text{मक}}{\text{मल}}; \quad \text{कोभुव} = \frac{\text{अक}}{\text{अम}}$$

$$\frac{\text{व}}{\text{स्पर्श}} = \frac{\text{पल}}{\text{अल}}.$$

म बिंदु मल कर्णानुसृत ल वटे आला तर वरच्या समीकरणांमध्ये काही बदल होत नाही अर्थात् म बिंदु जर ल बिंदूस मिळाला तर मक = मल. पल आणि अक = अम. म्हणून व ची किंमत जेव्हां ० असेल तेव्हां.

$$\frac{\text{भुव}}{\text{व}} = १, \quad \frac{\text{व}}{\text{स्पर्श}} = १, \quad \text{कोभुव} = १.$$

$$(२) \quad (\text{मर्यादा क्ष} = १) \quad \frac{\text{क्ष}^n - १}{\text{क्ष} - १} = \text{न}.$$

क्ष = १ + ज. ही किंमत क्षच्या ठिकाणीं लिहिली तर

$$(\text{मर्यादा क्ष} = १) \quad \frac{\text{क्ष}^n - १}{\text{क्ष} - १} \quad (\text{मर्यादा ज} = ०) \quad \frac{(१+ज)^n - १}{ज}.$$

लेख २१ मधील समीकरणांत अ च्या जागी ज लिहिला तर—

$$(१ + ज)^न - १ = न ज + \frac{न(न-१)}{१.२} ज^२ + \dots \dots \dots$$

ह्या समीकरणांस ज नें भागिले तर

$$\frac{(१ + ज)^न - १}{ज} = न + \frac{न(न-१)}{१.२} ज + \dots \dots \dots$$

न

ह्या समीकरणातील ज ची किमान, जेव्हा क्ष ची किमान १ ह्या संख्येच्या मर्यादेच्या मांडिले तेव्हा ज = ० होईल. या घेता येते तर वरच्या समीकरणाची किमान न होते

$$(३) (मर्यादा क्ष = \infty) \left(१ + \frac{१}{क्ष}\right)^क्ष = e$$

ह्या सिद्धांताने सिद्धता लेख ३७ मध्ये दिली आहे. तेथे जे शेवटी समीकरण $(१ + \frac{१}{क्ष})^क्ष = e$ दिले आहे त्यात न च्या जागे क्ष लिहिल्या म्हणजे जी श्रेणी घेते ती e संख्या होय.

$$(४) (मर्यादा क्ष = ०) \frac{क्ष - १}{क्ष} = घा.अ$$

ह्या सिद्धांताची सिद्धता लेख ३९ मध्ये दिली आहे.

शून्य आणि शून्यलब्धि

१९५. शून्य म्हणजे दोन समान संख्यांची वजावाकी.

जसे अ - अ तर क्ष - अ = ० परंतु ज्याची वजावाकी शून्य आहे त्या संख्या समान आहेत, ह्या म्हणण्याची समानता मागेक्ष असते. याचा अर्थ असा की, ती वजावाकी अत्यंत सूक्ष्म असते आणि ही सूक्ष्मता आपल्या कल्पनेनेच ठरविली जाते. सर्व समान संख्या पूर्णतेने समान असत नाहीत त्यामध्ये किंचित अंतर असते, त्या अति सूक्ष्म संख्येला शून्य असे म्हणतात. त्या सूक्ष्म संख्येला एथे सूक्ष्माक्ष असे म्हटले आहे. क्ष - अ = ० ह्यातील क्ष ही संख्या अ पेक्षा सूक्ष्माक्ष या संख्येने लहान मांडी असेल, ती ज ह्या संख्येने मोठी आहे असे म्हणून गणित करिता, आणि ज ही संख्या क्ष ह्या विचारी संख्येची वृद्धि किती पट अक्षवीपदाची वृद्धि आहे हे ठरवितो ह्याची कुठिल खाली दाखविल्याप्रमाणे—

$$य = सं(क्ष) = क्ष^२.$$

क्ष ची किंमत क्ष $\cdot \Delta$ क्ष क्षाची तर य ची किंमत य $\div \Delta$ य अशी होते. तेव्हा

$$य = क्ष^३$$

$$य + \Delta य = (क्ष + \Delta क्ष)^३$$

$$\Delta य = क्ष^३ + २ \Delta क्ष. क्ष + (\Delta क्ष)^३ - क्ष^३$$

$$\frac{\Delta य}{\Delta क्ष} = २ क्ष + (\Delta क्ष)$$

($\Delta क्ष$) ही क्ष ची वृद्धि आहे आणि ($\Delta य$) ही य ची वृद्धि आहे. एवढे ($\Delta क्ष$) ही क्ष ची वृद्धि अत्यंत सूक्ष्म मानिली तर ($\Delta क्ष$) हे पद ० होईल म्हणजे

$$\frac{\Delta य}{\Delta क्ष} = २ क्ष.$$

$\Delta क्ष$ ही क्षची वृद्धि अत्यंत सूक्ष्म मानिली तेव्हा $\Delta क्ष$ ह्या पदाचा सूक्ष्मांश क्ष अंग नाव जाई. तसेच $\Delta य$ या पदाचा सूक्ष्मांश य अंग नाव जाई. आणि त्यांचे लेवन

$$\text{सूक्ष्मांश य} = \text{सूय}$$

$$\text{आणि सूक्ष्मांश क्ष} = \text{सूक्ष}$$

असे लिहिण्याचे ठरविले आहे. तसेच याच्या मागाकारास आणि त्याबरोबर असलेल्या किंमतीस सूक्ष्मांश गुणोत्तर किंवा सूक्ष्मांश गुण म्हणतात. वरच्या उदाहरणांतील सूक्ष्मांश गुणोत्तर किंवा सूक्ष्मांश गुण

$$य = क्ष^३ \text{ तर } \frac{\text{सूय}}{\text{सूक्ष}} = २ क्ष$$

असा आहे.

१९५ वरच्या लेखातील विचारावरून पाहता शून्य शब्दाचे अर्थ आम्ही दोन स्वीकारले आहेत. एक शून्य म्हणजे काही नाही, परिमेयता हिचा अभाव आणि दुसरा अंगा की, जी संख्या आपणाला सूक्ष्म आहे असे वाटते तिच्यापेक्षाही सूक्ष्म अशी संख्या. हिला सूक्ष्मांश असे म्हणतो. वरच्या लेखात 'सूक्ष्मांश गुण' हा शब्द आला आहे, त्याची कृति अशी आहे की, य च्या सूक्ष्मांश.म क्ष च्या सूक्ष्मांशाचे मागणे, म्हणजे शून्याचा भागाकार, 'शून्यव्यव' ही आहे. आणि सूक्ष्मांश गुण ह्यास 'शून्यलब्धिगुण' हे नांव प्राप्त होते.

सूक्ष्मांश गुणासंबंधी कांहीं प्रस्थापित सिद्धांत

१६७. य स (क्ष) आणि या सं (क्ष + ज) ह्यांनील ज हा क्ष चा सूक्ष्मांश आहे तेव्हां सूक्ष्मांशगुण

या बरोबर $\frac{या-य}{ज}$ हें पद आहे. म्हणजे

$$\frac{सूक्ष}{सूक्ष} = \frac{या-य}{ज}$$

कोणत्याही मंच्याचा सूक्ष्मांशगुण किंवा नामभेदानें शून्यलब्धिगुण किंवा शुभता 'लब्धिगुण' कमा तयार करावा त्याची सर्वसामान्य कृति अशी व्ही, क्ष ह्या विकारी पदाची किमत अल्पांशयुक्त घेऊन जो मंचय येईल त्यातून क्ष ची मर्यादित म्हणजे अल्पांशविरहित पदाच्या किमतीनें जो मंचय येतो तो वजा करावा आणि राहिलेल्या बाकीस क्ष च्या अल्पांशाने भागावें. आलेल्या भागाकाराने अल्पांश शून्य मानावा म्हणजे सूक्ष्मांशगुण किंवा लब्धिगुण होतो.

१६८. (१) कोणत्याही मंच्यातील स्थिर संख्येचा सूक्ष्मांशगुण शून्य असतो लक्षणावरून पाहता स्थीर संख्येत फरक होत नाही म्हणून

$$\frac{सूक्ष}{सूक्ष} = \frac{या-य}{ज} = \frac{०}{ज} = ०$$

१६९. (२) एखादा मंचय आणि स्थीर संख्या याच्या गुणाकाराचा सूक्ष्मांशगुण, त्या मंच्याचा सूक्ष्मांशगुण आणि ती स्थीर संख्या याच्या गुणाकाराबरोबर असतो.

य व हा क्ष चा मंचय आहे, त्यात थ ही स्थीर संख्या आहे, तर ह्या मंच्याचा सूक्ष्मांशगुण शोधूं.

$$य = थव = सं (क्ष) \times थ$$

तेव्हां $\frac{सूक्ष}{सूक्ष}(थव) = थ \frac{सूक्ष}{सूक्ष}$ असे सिद्ध करावयाचें.

$$या = थ (व + \Delta व) = सं (क्ष + \Delta) \times थ$$

$$\frac{या-य}{ज} = \frac{थ \Delta व}{ज} = थ \frac{सूक्ष}{सूक्ष}$$

२००. (३) ज्या संचयान अनेक पदे एकाच विकारी पदाची आहेत, तर त्या संचयाचा सूक्ष्मांशगुण हा, प्रत्येक विकारी पद हा क्ष ह्या विकारी पदाचा संचय समजून त्याच सूक्ष्मांशगुण काढून जी वेरीज घेईल तिच्या बरोबर असतो.

$$य = व + ह + ल + \dots$$

$$\text{आणि } व = सं (क्ष), ह = ऋ (क्ष), ल = छ (क्ष) + \dots$$

$$\text{तसेच } या = वा + हा + ला + \dots$$

$$या - य = (वा - व) + (हा - ह) + (ला - ल) + \dots$$

ह्या सर्वांस ज ने भागिले तर

$$\frac{या - य}{ज} = \frac{वा - व}{ज} + \frac{हा - ह}{ज} + \frac{ला - ल}{ज} + \dots$$

ऋण पदाचा सूक्ष्मांशगुण ऋण असतो.

२०१. (४) दोन संख्यांच्या गुणाकाराचा सूक्ष्मांशगुण हा प्रत्येक संख्यांच्या सूक्ष्मांशगुणास तशीच संचयाने गुणून जे गुणाकार येईल त्या गुणाकाराच्या बरोबर असतो.

$$य \cdot व = ह,$$

$$\text{आणि } व = सं (क्ष) \text{ तसेच } ह = सं (क्ष)$$

$$या - य = वा \times हा - व ह$$

$$= वा \times हा - वा \times ह + वा.ह - व.ह$$

$$= वा (हा - ह) + ह (वा - व)$$

हा जी निमत जेव्हा मर्यादित जाईल तेव्हा, म्हणजे ज हा क्ष चा सूक्ष्मांश होईल तेव्हा वा = व म्हणून

$$\frac{या - य}{ज} = व \frac{हा - ह}{ज} + ह \frac{वा - व}{ज}$$

म्हणजे

$$\frac{या - य}{ज} = व \frac{हा - ह}{ज} + ह \frac{वा - व}{ज}$$

२०२. बरचें समीकरण व \times ह भागिले तर

$$\frac{या - य}{व} = \frac{हा - ह}{व} + ह \frac{वा - व}{व}$$

य वरोवर अनेक संचयाच्या गुणाकार अमेल तर त्याचा सूक्ष्मांशगुण वरच्या समीकरणावरून सहज साध्य होतो तो असा—

$$य = व \times ल \times ज \text{ अमेल तर } ल \times ज = ह \text{ माना.}$$

तर वरच्या सिद्धांताप्रमाणे

$$\frac{१}{ह} \cdot \frac{गुह}{सूक्ष} = \frac{१}{ल} \cdot \frac{गुल}{सूक्ष} + \frac{१}{ज} \cdot \frac{गुज}{सूक्ष}$$

ही किमत वरच्या समीकरणात ठेविली म्हणजे

$$\frac{१}{य} \cdot \frac{सुय}{सूक्ष} = \frac{१}{व} \cdot \frac{सुव}{सूक्ष} + \frac{१}{ल} \cdot \frac{सुल}{सूक्ष} + \frac{१}{ज} \cdot \frac{सुज}{सूक्ष}$$

२०३. दोन संचयाच्या भागाकाराचा सूक्ष्मांशगुण हा

$$\frac{\text{भाजक}}{\text{भाजकाचा सू. गुण}} - \frac{\text{भाज्य}}{\text{भाजकाचा वर्ग}}$$

ह्यावरोवर असतो.

$$य = \frac{व}{ह} \text{ तर } या = \frac{वा}{हा}$$

$$\begin{aligned} या - य &= \frac{वा}{हा} - \frac{व}{ह} = \frac{वाह - हाव}{हाह} \\ &= \frac{वाह - वह - वहा + वह}{हाह} \end{aligned}$$

$$\frac{या-य}{ज} = \left\{ \frac{ह(वा-व)}{ज} - \frac{व(हा-ह)}{ज} \right\} \div हाह$$

क्ष ची विभन जेव्हा मर्यादला जाईल तेव्हा म्हणजे ज हा क्ष चा सूक्ष्मांश होईल तेव्हा हा = ह होईल. म्हणून

$$\frac{\text{सुय}}{\text{सूक्ष}} = \frac{\frac{सुव}{ह} - व \cdot \frac{गुह}{सूक्ष}}{ह}$$

२०४. विविध अन्नंवी पद ज्या विकारी पदाच्या संचयाने बनले आहे, ते विकारी पद अन्य विकारी पदाचा संचय अमता त्या विविध अन्नंवी पदाचा त्याच्या विकारी पदान्वयी सूक्ष्मांशगुण काढावयाचा.

$$य = सं (व). \text{ आणि } व = २३ (क्ष)$$

असें अ. हे तर $\frac{सुय}{सूक्ष}$ हा सूक्ष्मांशगुण शोधावयाचा.

येथे य चा अल्पांश \triangle य, व चा अल्पांश \triangle व आणि क्ष चा अल्पांश \triangle क्ष हा आहे तेव्हा

$$\frac{\triangle य}{\triangle क्ष} = \frac{\triangle य}{\triangle व} \times \frac{\triangle व}{\triangle क्ष}$$

अल्पांश हे सूक्ष्मांश केले तर

$$\frac{\text{सूय}}{\text{सूक्ष}} = \frac{\text{सूय}}{\text{सूव}} \times \frac{\text{सूव}}{\text{सूक्ष}}$$

२०५. अवलंबी पद आणि विकारी पद यांचा सूक्ष्मांशगुण, आणि विकारीपद ते अवलंबी करून आलेला सूक्ष्मांशगुण याचा गुणाकार १ असतो. म्हणजे

$$\frac{\text{सूय}}{\text{सूक्ष}} \times \frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूय}} = १$$

वरच्या लेखातील समीकरण खाली लिहिले आहे, त्यात य च्या जागी क्ष ठेविल्या तर

$$\frac{\text{सूय}}{\text{सूक्ष}} = \frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूक्ष}} = १$$

म्हणून

$$\frac{\text{सूय}}{\text{सूक्ष}} = \frac{\text{सूय}}{\text{सूव}} \times \frac{\text{सूव}}{\text{सूक्ष}}$$

ह्या समीकरणाचे स्वरूप

$$१ = \frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूव}} \times \frac{\text{सूव}}{\text{सूक्ष}}$$

$$\text{किंवा} \quad \frac{\text{सूव}}{\text{सूक्ष}} = \frac{१}{\frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूव}}}$$

व च्या जागी य लिहिला तर

$$\frac{\text{सूय}}{\text{सूक्ष}} \times \frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूय}} = १$$

संस्मरणीय द्वायलब्धिगुण

२०६. पूर्वी मागितलेच आहे की, सवय चार प्रकारचे आहेत. वैज्ञिक, तार्किक, घातप्रकाशी आणि घातानी. लेख १७० (३). ह्यांपैकी प्रत्येक प्रकारच्या सवयला द्वायलब्धिगुण विदेश प्रकारच्या असतो ते प्रकार ठरविलेले आहेत. यामुळे लब्धिगुण शोधण्याला विशेष आयाम करावे लागत नाहीत. ह्या विषयातील मुख्य

तायें संचयाचा शून्यलब्धिगुण शोधणे हें आहं परंतु ते फार मुलभ आहे, हे खालच्या विचारावरून तेव्हाच कळून येईल. चार प्रकारचे संचय कराने घेऊन त्याचे शून्यलब्धिगुण म्हणजेच सूक्ष्मांशगुण कराने काढून दाखविले आहे.

कोणताही मध्य अंगो न्याचा शून्यलब्धिगुण कराने काढता याची वृत्ति वाली आठवणीकरिता पुन्हा लिहिली आहे :

$$व = सं (क्ष)$$

$$\text{तर } \frac{\text{सूत्र}}{\text{सूक्ष}} = [\text{मर्यादा ज} = ०] \frac{स(क्ष + ज) - स(क्ष)}{ज}$$

हे शून्यलब्धिगुणाच्या कृतीचे सामान्य लेखन आहे.

२०७. वैजिक शून्यलब्धिगुण—

क्ष^न या संचयाचा सूक्ष्मांशगुण.

$$व = सं (क्ष) = क्ष^न$$

$$वा = सं (क्ष + ज) = (क्ष + ज)^न$$

$$= क्ष^न \left\{ १ + \frac{ज}{क्ष} \right\}^न$$

ह्याचैनी करमांन द्विपद गतीचा घातविस्तार लेख २१ प्रमाणे केला तर—
(ह्या घात विस्तारात ज मर्यादेच्या वर्गापर्यंत म्हणजे ज पॉवर जी पदे घेतली त्यांपेक्षा जास्त पदांची आवश्यकता नाही कारण क्ष ची किंमत मर्यादेच्या गेली म्हणजे ज ची किंमत शून्य होई अर्थात ज्या पदाने ज मर्यादा असले ते पद शून्य होऊन लुप्त होतील.

म्हणून

$$वा = क्ष^न \left\{ १ + न \left(\frac{ज}{क्ष} \right) + \frac{न(न-१)}{१ \cdot २} \left(\frac{ज}{क्ष} \right)^२ + \dots \right\}$$

$$वा - व = क्ष^न \left[\frac{न-१}{न क्ष} + \frac{न(न-१)}{१ \cdot २} \frac{न-२}{क्ष} \times \frac{ज}{क्ष} + \dots - व \right]$$

$$= \frac{न-१}{न क्ष} + \frac{न(न-१)}{१ \cdot २} \frac{न-२}{क्ष} \frac{ज}{क्ष} + \dots$$

$$\frac{वा - व}{ज} = \frac{न-१}{न क्ष} + \frac{न(न-१)}{१ \cdot २} \frac{न-२}{क्ष} \times ज$$

ज ची किमत मर्यादिला नेली तर $ज = ०$ आणि $\frac{वा - व}{ज}$ ह्या बरोबर शून्य-
लब्धिगुण म्हणजेच मूळमांशगुण. तेव्हा

$$\frac{सूव}{सूअ} = नक्ष - १.$$

२०८. घातप्रकाशी मूल्यलब्धिगुण. अक्ष ह्या सचयाचा मूळमांशगुण.

$$व = सं (क्ष) = अक्ष$$

$$वा = सं (क्ष + ज) = अक्ष + ज = अक्ष \times अज$$

$$वा - व = अक्ष \times अज - अक्ष = अक्ष (अज - १)$$

$$\frac{वा - व}{ज} = \frac{अक्ष}{अक्ष} \cdot \frac{अज - १}{ज}$$

परंतु $\frac{अज - १}{ज}$ ह्या पदाची किमत लेख ३९ प्रमाणे घा_e ही आहे.

$$\text{मूलगुण} \quad \frac{सूव}{सूअ} = अक्ष घा_e अ.$$

ह्या सचयाचे स्वरूप $e^{\text{क्ष}}$ असें असेल तर

$$व = e^{\text{क्ष}}$$

$$\frac{सूव}{सूअ} = e^{\text{क्ष}} घा_e e = e^{\text{क्ष}} [घा_e e = १].$$

२०९. घातारी मूल्यलब्धिगुण. घाअक्ष ह्या सचयाचा मूळमांशगुण.

$$व = सं (क्ष) = घाअक्ष$$

$$वा = सं (क्ष + ज) = घाअक्ष (क्ष + ज)$$

$$वा - व = घाअक्ष (क्ष + ज) - घाअक्ष$$

$$= \frac{घाअक्ष (क्ष + ज)}{घाअक्ष क्ष} = घाअक्ष \left(\frac{क्ष + ज}{क्ष} \right)$$

$$\frac{वा - व}{ज} = \frac{१}{ज} घाअक्ष \left(१ + \frac{ज}{क्ष} \right)$$

एथे $\frac{\text{क्ष}}{\text{ज}}$ — ज मर्या मानिली आणि ज = ० अशी क्ष ची मर्यादा झाली तर
ज = अनंत यामुळे

$$\begin{aligned}\frac{\text{वा} - \text{व}}{\text{ज}} &= \frac{१}{\text{ज}} \text{घा.अ.} \left(१ + \frac{१}{\text{ज}} \right) \\ &= \frac{\text{ज}}{\text{क्ष}} \text{घा.अ.} \left(१ + \frac{१}{\text{ज}} \right) \\ &= \frac{१}{\text{क्ष}} \text{घा.अ.} \left(१ + \frac{१}{\text{ज}} \right) \text{ज}\end{aligned}$$

(घाताकांश गुणित्याने, तो घातांक ज्या मध्येचा असेल तिचा त्या गुणक संख्ये-
इतका घात होतो.)

एथे $\left(१ + \frac{१}{\text{ज}} \right)$ ह्या मध्येच्या घाताकांश ज ने गुणिले आहे म्हणून तो घातांक
 $\left(१ + \frac{१}{\text{ज}} \right) \text{ज}$ ह्या मध्येचा होतो परंतु $\left(१ + \frac{१}{\text{ज}} \right) \text{ज}$ ह्या संख्येतील ज जर अनंत
असेल तर तिची किंमत e होई, असे लेख २३ मध्ये सिद्ध केले आहे
म्हणून

$$\frac{\text{सूत्र}}{\text{सूक्ष}} = \frac{१}{\text{क्ष}} \text{घा.अ.} e.$$

ह्या संचयाचे स्वरूप घा.क्ष असे असले तर

$$\frac{\text{सूत्र}}{\text{सूक्ष}} = \frac{१}{\text{क्ष}} \text{घा.अ.} e \cdot \frac{१}{\text{क्ष}} [x^e e - १].$$

२१०. यांत्रिक शून्यस्थिगुण. भुजगात्र गुणानुराचे सूटमात्रगुण.

भुजज्या क्ष ह्या संचयाचा सूटमात्रगुण

$$\text{व} = \text{स (क्ष)} = \text{भुक्ष},$$

$$\text{वा} = \text{सं (क्ष + ज)} = \text{भु (क्ष + ज)},$$

$$\text{वा} - \text{व} = \text{भु (क्ष + ज)} - \text{भुक्ष},$$

$$= \text{भु} \frac{\text{ज}}{\text{क्ष}} \text{को भु (क्ष + } \frac{\text{ज}}{\text{क्ष}}) \quad [\text{र. ६८, समी. १०}].$$

$$\frac{\text{वा} - \text{व}}{\text{ज}} = \frac{\text{भु} \frac{\text{ज}}{\text{क्ष}}}{\text{ज}} \text{को भु (क्ष + } \frac{\text{ज}}{\text{क्ष}})$$

क्ष ची किमत मयदिला गेली म्हणजे $ज = ०$ अर्थात $\frac{ज}{२} = ०$

$$\text{आणि } \frac{\frac{ज}{२}}{ज} = १ \text{ म्हणून}$$

$$\frac{सूव}{सूक्ष} = \text{कोभुक्ष.}$$

२११. कोमुज्या क्ष ह्या संचयाचा सूक्षमाशुण.

$$व = सं (क्ष) = \text{कोभुक्ष,}$$

$$वा = सं (क्ष + ज) = \text{कोभु (क्ष + ज)}$$

$$वा - व = \text{कोभु (क्ष + ज) - कोभुक्ष}$$

$$= - २ \frac{ज}{२} \text{ कोभु (क्ष + } \frac{ज}{२} \text{)} \quad [\text{ले. ६२, समी. १२}]$$

$$\frac{वा - व}{ज} = २ \frac{\frac{ज}{२}}{ज} \cdot \text{कोभु (क्ष + } \frac{ज}{२} \text{)} \quad \left[\frac{\text{कोभु}}{व} = १ \right]$$

$$\frac{सूव}{सूक्ष} = - \text{कोभु.}$$

२१२. स्पर्शरेषा क्ष ह्या संचयाचा सूक्षमाशुण.

$$व = सं (क्ष) = \text{स्पर्शक्ष}$$

$$वा = सं (क्ष + ज) = \text{स्पर्श (क्ष + ज)}$$

$$वा - व = \text{स्पर्श (क्ष + ज) - स्पर्शक्ष} = \frac{\text{कोभु}}{\text{कोभु (क्ष + ज) कोभुक्ष}}$$

$$\frac{वा - व}{ज} = \frac{\text{कोभु}}{ज} \times \frac{१}{\text{कोभु (क्ष + ज) कोभुक्ष}}$$

$$\frac{सूव}{सूक्ष} = \frac{१}{\text{कोभुक्ष.}}$$

२१३. कोस्पर्शरेषा क्ष ह्या संचयाचा सूक्ष्मांशगुण.

$$व = सं (क्ष) = कोस् क्ष$$

$$वा = सं (क्ष + ज) = कोस्प (क्ष + ज)$$

$$\frac{वा - व}{ज} = \frac{१}{ज} \left\{ कोस्प (क्ष + ज) - कोस्प क्ष \right\} =$$

$$\frac{- भुज}{ज} \frac{१}{मु (क्ष + ज) भुक्ष}$$

$$\frac{सुव}{सुक्ष} = - \frac{१}{भुक्ष}$$

२१४. छेदनरेषा क्ष ह्या संचयाचा सूक्ष्मांशगुण.

$$व = सं (क्ष) = छे क्ष = \frac{१}{कोभुक्ष},$$

लेख २०३ प्रमाणे भागाकाराचा सूक्ष्मांशगुण,

$$\frac{सुव}{सुक्ष} = \frac{कोभुक्ष \times ० - १ \times (- भुक्ष)}{कोभुक्ष} = \frac{भुक्ष}{कोभुक्ष}.$$

२१५. कोछेदनरेषा क्ष ह्या संचयाचा सूक्ष्मांशगुण.

$$व = सं (क्ष) = कोछेक्ष = \frac{१}{भुक्ष},$$

लेख २०३ प्रमाणे भागाकाराचा सूक्ष्मांशगुण.

$$\frac{सुव}{सुक्ष} = \frac{भुक्ष \times ० - १ \times कोभुक्ष}{भुक्ष} = - \frac{कोभुक्ष}{भुक्ष}.$$

२१६. वार्षिक शून्य र्श अंशगुण. वृत्त परिमाणाचे सूक्ष्मांशगुण.

कोनाचे मापन अशाद्वारे. आणि वृत्त परिमाणाने वर्गितान. कोनाचे घर्ग असे आहेत की एका कोनाचा दुसऱ्या कोनाशी जो मध्य अंगेल तो तिसऱ्या कोनात असत नाहीं. म्हणून त्यांचे मध्य मज्यादी गुणोत्तराचेच द्वारा ठरले जातात. यासाठी कोनाचे दर्शन किंवा उल्लेखन भुजज्यादिकानी करावे लागते. म्हणजे ३० अशाचा कोन किंवा $\frac{\pi}{6}$ वृत्त परिमाणाचा कोन त्याच्या भुजज्येने उल्लेखित जातो. तीस अंग, किंवा $\frac{\pi}{6}$ वृत्त या कोनाची भुजज्या ३ आहे. म्हणून हा कोन, 'ज्याची भुजज्या ३

आहे तो कोन' अशा भाषेने उल्लेखिला जातो. त्याचे लेखन $\text{मु}^{-1}\frac{1}{2}$ असे लिहिण्याचा संकेत आहे. या भाषेने $\text{मु}^{-1}\text{क्ष}$ किंवा कोमु $^{-1}\text{क्ष}$ अथवा $\text{स्प}^{-1}\text{क्ष}$ हे उल्लेख कोनाचे आहेत पण यात क्ष ही मर्यादा असा किंवा वृत्त याची नाही. ती त्या कोनाची भुज्या किंवा कोभुज्या किंवा स्पर्शरेषा असेल. ज्या गुणोत्तराची असेल त्या गुणोत्तराच्या नावावर -१ हे किंवा लिहावे असा संकेत आहे. $\text{मु}^{-1}\text{क्ष}$ हा उल्लेख 'मु उणा एक क्ष' असा वाचणे.

२१७. $\text{मु}^{-1}\text{क्ष}$ ह्या संचयाचा सूक्ष्मांशगुण.

$$व = सं (क्ष) = \text{मु}^{-1}\text{क्ष}.$$

क्ष ज्याची भुज्या आहे तो कोन ज वृत्त परिमाणाचा आहे.

म्हणजे $\text{क्ष} = \text{भुज}$ असे घेऊं.

एथे आपण ज हे विवारी पद घेऊ आणि क्ष हे अवलंबी पद म्हणू. तेव्हा $\frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूत्र}} = \text{कोभुज}$ असें वर सिद्ध केलें आहे.

प्रस्तुत कार्यांत क्ष ज्याची भुज्या आहे तो कोन हेच विवारी पद आहे. म्हणून $\text{क्ष} = सं (व) = \text{मुव}$

$$\text{म्हणून } \frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूत्र}} = \text{कोभुज}$$

$$\text{पण कोभुज} = \sqrt{1 - \text{भुव}} = \sqrt{1 - \text{क्ष}}$$

म्हणून

$$\frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूत्र}} = \sqrt{1 - \text{क्ष}}$$

परंतु आपणाम $\frac{\text{मुव}}{\text{सूत्र}}$ हा सूक्ष्मांशगुण पाहिजे तो आपणाम लेख २०५ च्या आधारे आपिता येतो. कारण

$$\frac{\text{मुव}}{\text{सूत्र}} = \frac{1}{\frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूत्र}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{क्ष}}}$$

२१८. कोमु^{-१}क्ष ह्या संचयाचा सूक्ष्मांशगुण—
वरच्या लेखांतील कृतीप्रमाणे

$$\begin{aligned} \text{क्ष} &= \text{कोभुव} ; \frac{\text{सूक्ष}}{\text{सुव}} = - \text{भुव} \\ \frac{\text{सुव}}{\text{सूक्ष}} &= \frac{1}{\frac{\text{सूक्ष}}{\text{सुव}}} = - \frac{1}{\text{भुव}} = - \frac{1}{\sqrt{1 - \text{क्ष}^2}}. \end{aligned}$$

२१९. स्प^{-१}क्ष ह्या संचयाचा सूक्ष्मांशगुण—

$$\begin{aligned} \text{क्ष} &= \text{स्प व आणि } \frac{\text{सूक्ष}}{\text{सुव}} = \frac{1}{\text{कोभुव}} = 1 + \text{स्प}^2 \text{क्ष} \\ \frac{\text{सुव}}{\text{सूक्ष}} &= \text{कोभुव} = \frac{1}{1 + \text{क्ष}^2}. \end{aligned}$$

२२०. छेदनरेषा^{-१}क्ष ह्या संचयाचा सूक्ष्मांशगुण—

$$\begin{aligned} \text{क्ष} &= \text{छेदन रेखा व ; } \frac{\text{सूक्ष}}{\text{सुव}} = \frac{\text{भुव}}{\text{कोभुव}} = \text{छेव स्पव} \\ \frac{\text{सुव}}{\text{सूक्ष}} &= \frac{\text{कोभुव}}{\text{भुव}} = \frac{1}{\text{क्ष} \sqrt{\text{क्ष}^2 - 1}}. \end{aligned}$$

२२१. कोस्प^{-१}क्ष ह्या संचयाचा सूक्ष्मांशगुण—

$$\begin{aligned} \text{क्ष} &= \text{कोस्प व, } \frac{\text{सूक्ष}}{\text{सुव}} = - \frac{?}{\text{भुव}} \\ \frac{\text{सुव}}{\text{सूक्ष}} &= - \text{भुव} = - \frac{\text{भुव}}{\text{भुव} + \text{कोभुव}} \\ &= - \frac{1}{1 + \text{कोस्प}^2 \text{व}} = - \frac{1}{1 + \text{क्ष}^2}. \end{aligned}$$

२२२. कोछेदन रेषा^{-१}क्ष ह्या संचयाचा सूक्ष्मांशगुण—

$$\begin{aligned} \text{क्ष} &= \text{को छेदन रेखा व ; } \frac{\text{सूक्ष}}{\text{सुव}} = - \frac{\text{कोभुव}}{\text{भुव}} \\ \frac{\text{सुव}}{\text{सूक्ष}} &= - \frac{\text{भुव}}{\text{भुव}} = - \frac{1}{\text{को छे व. कोस्प व}} \\ &= - \frac{1}{\text{क्ष} \sqrt{\text{क्ष}^2 - 1}}. \end{aligned}$$

सूक्ष्मांशगुण परंपरा

२२२. एखाद्या संचयाचा सूक्ष्मांशगुण तयार केला तर त्या सूक्ष्मांशगुणाचा सूक्ष्मांशगुण करण्याची आवश्यकता असते. सूक्ष्मांशगुणाचा जो सूक्ष्मांशगुण त्यास द्वितीय सूक्ष्मांशगुण म्हणतात. द्वितीयसूक्ष्मांशगुणाचा जो सूक्ष्मांशगुण त्यास तृतीय सूक्ष्मांशगुण म्हणतात. ह्याप्रमाणे सूक्ष्मांशगुणाची परंपरा असते. सूक्ष्मांशगुण द्वितीय, तृतीय, चतुर्थ यांचे लेखन खाली लिहिल्याप्रमाणे करतात —

प्रथम सूक्ष्मांशगुण व = सं (क्ष) ह्या संचयाचा $\frac{\text{सूव}}{\text{सूक्ष}}$ असा लिहितात. परंतु हे तुमचे माथेनिक चिन्ह आहे. ह्याने दर्शविलेली किंमत क्ष ची वैजिक वगेरे पदे यांनी समजते. ह्याचप्रमाणे द्वितीय सूक्ष्मांशगुणाचे आम्हास चिन्हच ठरवावयाचे आहे. $\frac{\text{सूव}}{\text{सूक्ष}}$ ह्या चिन्हाचे आम्ही दोन भाग करितो. पहिला भाग $\frac{\text{सू}}{\text{सूक्ष}}$ हा आणि दुसरा भाग व. आता, द्वितीय सूक्ष्मांशगुण लिहावयाचा तेव्हां व च्या जागी $\frac{\text{सूव}}{\text{सूक्ष}}$

हे चिन्ह लिहिल्याने त्याने द्वितीय सूक्ष्मांशगुणाची जाणीव होईल. म्हणून

$\frac{\text{सू}}{\text{सूक्ष}} - \left(\frac{\text{सूव}}{\text{सूक्ष}} \right)$ ह्या चिन्हाने सूक्ष्मांशगुण दाखविता. पण ह्याने मुद्धा लेखन मीकर्य येत नाही. कारण तृतीय सूक्ष्मांशगुण $\frac{\text{सू}}{\text{सूक्ष}} \left\{ \frac{\text{सू}}{\text{सूक्ष}} \left(\frac{\text{सूव}}{\text{सूक्ष}} \right) \right\}$ असा लिहावा लागेल. ही आपत्ति टाळण्याकरिता पुढे लिहिलेली सोय केली आहे. द्वितीय

सूक्ष्मांशगुण $\frac{\text{सू}}{\text{सूक्ष}} \left(\frac{\text{सूव}}{\text{सूक्ष}} \right)$ असा हे ह्यातील कम काढून टाकल्या तर अंशस्थानची सू सू ही दोन अक्षरे एक ठिकाणी येतात त्याच्या स्थानी सू २ लिहू, आणि छेदस्थानी सूक्ष. सूक्ष अशी दोन पदे येतात त्याचे लेखन सूक्ष असे लिहू म्हणजे द्वितीय सूक्ष्मांशगुण $\frac{\text{सूव}}{\text{सूक्ष}}$ असा होतो. हे त्याचे लेखन सोयीचे आहे. तृतीय सूक्ष्मांशगुण

$\frac{\text{सूव}}{\text{सूक्ष}}$ असा लिहिता येतो. ह्याप्रमाणेच ह्या तो सूक्ष्मांशगुण लिहिता येतो. ह्या लेखनाचे वाचन सामान्यरूपे तृतीय सूक्ष्मांशगुण असें असून तृतीय सूव भागिले सूक्ष घन असेही करता येते.

२२४. खाली एक-दोन सूक्ष्मांश परंपरेची उदाहरणे दाखविली आहेत :—

(१) य = क्ष^न ह्याची सूक्ष्मांश परंपरा लिहा.

$$\frac{\text{सू०य}}{\text{सूक्ष}} = \text{न क्ष}^{n-1} \quad \frac{\text{सू०२य}}{\text{सूक्ष}^2} = \text{न (न-१) क्ष}^{n-2}$$

$$\frac{\text{सू०३य}}{\text{सूक्ष}^3} = \text{न (न-१) (न-२) क्ष}^{n-3}$$

(२) व = भु (अक्ष + व) तर सूक्ष्मांशगुण परंपरा शोधा.

$$\frac{\text{सू०व}}{\text{सूक्ष}} = + \text{अ कोभु (अक्ष + व)}$$

$$\frac{\text{सू०२व}}{\text{सूक्ष}^2} = - \text{अ}^2\text{भु (अक्ष + व)}.$$

$$\frac{\text{सू०३व}}{\text{सूक्ष}^3} = - \text{अ}^3\text{कोभु (अक्ष + व)}.$$

$$\frac{\text{सू०४व}}{\text{सूक्ष}^4} = + \text{अ}^4\text{भु (अक्ष + व)}.$$

$$(३) व = \text{स्पक्ष} \quad \frac{\text{सू०व}}{\text{सूक्ष}} = १ + व^१$$

$$\frac{\text{सू०व}}{\text{सूक्ष}} - \frac{?}{\text{कोभुक्ष}} = \frac{\text{कोभुक्ष} - \text{अक्ष}}{\text{कोभुक्ष}} = १ + \text{स्पक्ष}$$

$$\begin{aligned} \text{आतां } \frac{\text{सू०}}{\text{सूक्ष}} (\text{स्पक्ष}) &= \frac{\text{सू०}}{\text{सूक्ष}} (\text{स्पक्ष} \times \text{स्पक्ष}) \\ &= २ \text{स्पक्ष} \frac{\text{सू०}}{\text{सूक्ष}} (\text{स्पक्ष}) \quad [\text{ले. २०१ (४)}] \end{aligned}$$

$$\frac{\text{सू०२व}}{\text{सूक्ष}^2} = २ व (१ + व^१) = २ व + २ व^२$$

$$\text{समेव } \frac{\text{सू}}{\text{सूक्ष}} (२ \text{ स्पक्ष} + २ \text{ स्पक्ष})$$

$$= \frac{\text{सू}}{\text{सूक्ष}} (२ \text{ स्पक्ष}) + \frac{\text{सू}}{\text{सूक्ष}} (२ \text{ स्पक्ष})$$

$$= २ \frac{\text{सूव}}{\text{सूक्ष}} + \frac{\text{सू}}{\text{सूक्ष}} (२ \text{ स्पक्ष} \times \text{स्पक्ष})$$

$$= २ (१ + व^३) + २ व^३ (१ + व^३) + २ व (१ + व^३) \times २ व$$

$$\frac{\text{सू३व}}{\text{सूक्ष}^३} = २ (१ + ४ व^३ + ३ व^४).$$

$$(४) व = e^{\text{अक्ष}} \quad \frac{\text{सूव}}{\text{सूक्ष}} = \text{अ}e^{\text{अक्ष}} = \text{अव}$$

$$\frac{\text{सू२व}}{\text{सूक्ष}^२} = \text{अ}^२e^{\text{अक्ष}} = \text{अ}^२व$$

$$\frac{\text{सू३व}}{\text{सूक्ष}^३} = \text{अ}^३e^{\text{अक्ष}} = \text{अ}^३व$$

$$\frac{\text{सू४व}}{\text{सूक्ष}^४} = \text{अ}^४e^{\text{अक्ष}} = \text{अ}^४व$$

$$(५) व = \text{घाक्ष}$$

$$\frac{\text{सूव}}{\text{सूक्ष}} = \frac{१}{\text{क्ष}} \quad \frac{\text{सू२व}}{\text{सूक्ष}^२} = -\frac{१}{\text{क्ष}^२}$$

$$\frac{\text{सू३व}}{\text{सूक्ष}^३} = \frac{१ \cdot २}{\text{क्ष}^३} \quad \frac{\text{सू४व}}{\text{सूक्ष}^४} = \frac{१ \cdot २ \cdot ३}{\text{क्ष}^४}$$

सचय-स्पष्टीकरण

२२५. अवलक्षी पदावरोवर विकारी पदाचा सचय आहे, विकारी पदाची किंमत जर आपणाला समजली तर त्या किमतीवरून त्या सचयाची किंमत किती असेल हे आपणाम शोचावयाचे आहे. ह्या कार्याला संचयाचे स्पष्टीकरण असे म्हणावे.

जसे स्पष्ट व एवे दा हे वृत्तपरिमाण आपणाला माहित आहे, तर ह्या क्षचा किमतीने व की किमंत शोधणे याचा मुख्यस्पष्टीकरण म्हणावे. तसेच व की किमंत माहित आहे त्यावरून क्षची किमंत शोधणे याचाहि सचय स्पष्टीकरण म्हणावे. हे कार्य, वीजगणितानील घाताकाचे सिद्धांत घातप्रकाशक सिद्धांत त्रिकोण मितोतील काही सिद्धांत याच्या सहाय्याने असत. वरिता येतें. ते सूक्ष्मांश गणिताने पूर्ण (चका ते) करिता येवे. हे कार्य वरणपत्रे काही सिद्धांत ठरलेले आहेत. त्याचे उपपादन खाली केले आहे.

२२६ प्रत्येक अवलंबी पद विकारी व काही स्थीर मर्या यांनी निर्माण झाले आहे. ते, विकारी पदाचा एक घात, वर्ग, घन इत्यादिकांना काही स्थीर गुणक यांनी गुणून झाले आहे. त्याची मांडणी खाली लिहिल्याप्रमाणे घेऊ समजा व हे अवलंबी पद क्षचा सचय आहे.

म्हणजे $v = s(\text{क्ष})$

याचा उल्लेख असा

$v = \text{७} + \text{८} \text{क्ष} + \text{२} \text{क्ष}^२ + \text{३} \text{क्ष}^३ + \text{४} \text{क्ष}^४ + \text{५} \text{क्ष}^५ + \text{६} \text{क्ष}^६ + \text{७} \text{क्ष}^७ + \text{८} \text{क्ष}^८ + \text{९} \text{क्ष}^९ + \text{१०} \text{क्ष}^{१०} + \text{११} \text{क्ष}^{११} + \text{१२} \text{क्ष}^{१२} + \text{१३} \text{क्ष}^{१३} + \text{१४} \text{क्ष}^{१४} + \text{१५} \text{क्ष}^{१५} + \text{१६} \text{क्ष}^{१६} + \text{१७} \text{क्ष}^{१७} + \text{१८} \text{क्ष}^{१८} + \text{१९} \text{क्ष}^{१९} + \text{२०} \text{क्ष}^{२०} + \text{२१} \text{क्ष}^{२१} + \text{२२} \text{क्ष}^{२२} + \text{२३} \text{क्ष}^{२३} + \text{२४} \text{क्ष}^{२४} + \text{२५} \text{क्ष}^{२५} + \text{२६} \text{क्ष}^{२६} + \text{२७} \text{क्ष}^{२७} + \text{२८} \text{क्ष}^{२८} + \text{२९} \text{क्ष}^{२९} + \text{३०} \text{क्ष}^{३०}$

$$\frac{v}{\text{क्ष}} = ७ + २ \text{क्ष} + ३ \text{क्ष}^२ + ४ \text{क्ष}^३$$

$$\frac{v^२}{\text{क्ष}^२} = २४ + २३ \text{क्ष} + ३४ \text{क्ष}^२$$

$$\frac{v^३}{\text{क्ष}^३} = १२० + २३६ \text{क्ष} + २३४ \text{क्ष}^२$$

$$\frac{v^४}{\text{क्ष}^४} = २४० + २३४० \text{क्ष} + २३४० \text{क्ष}^२$$

ह्या सूक्ष्मांशगुण परंपरेमध्ये प्रत्येक विकारी पद क्ष=० मानिले तर प्रत्येक सूक्ष्मांशगुणाची किमंत खाली लिहिल्याप्रमाणे येईल. लेखन सौकर्याकरिता व,

$$\frac{v}{\text{क्ष}}, \frac{v^२}{\text{क्ष}^२}, \frac{v^३}{\text{क्ष}^३}, \frac{v^४}{\text{क्ष}^४}, \text{इत्यादि पदांची निर्देश व, व, व, व, इत्यादि}$$

अक्षरांनी करितो.

तेव्हां व_१ = अ; व_२ = छ; व_३ = २ झ; म्हणून झ = $\frac{१२}{१२}$

व_३ = २३ उ म्हणून उ = $\frac{१२}{२३}$

व_४ = २३४ ञ म्हणून ञ = $\frac{१२}{२३४}$

अ, छ, झ, उ, ञ ह्यांच्या किमती प्रथम दिलेल्या समीकरणाने मिळल्या

तेव्हां

$$व = व_१ + व_२ + व_३ + व_४ + \dots$$

१२ १२ १२ १२

ह्या समीकरणाची मिळताच्या योजनेने व ह्या कोणत्याही मर्यादा किंमत क्ष ह्या विकारी पदाच्या घातावरून तयार होते.

२२७ कोन आणि भुज्यावि गुणोत्तरे ह्या दोन्हांची एक जखन जखना गुणव्यानी किंमत किती हे ठरविण्याची अन्यन आवश्यकता जखन हे वर्य वर्य समीकरणां जखन घेत तयार जखन दितानह् जखन घेत ह्या पापये अनेक मिळान पापया गणितान आहत्त. विरममयामुळे त्याचे उद्घाटन येथे केले नाही.

कोन आणि भुज्यावि गुणोत्तरे

२२८ विरचित कोनाचे भुज्या, त्या कोनाच्या वृत्तपरिमाणाने दाखविणे.

कोनाचे वृत्तपरिमाण म्हणजे या कोन ज्या वृत्तावरून मांडला आहे त्या वृत्ताच्या लांबीला, तो कोन ज्या वृत्ताच्या आहे त्या वृत्ताच्या किंमतीने भागल्या भागाकार होय. हा भागाकार केवळ मर्यादक जखना. हे वृत्तपरिमाण व ह्या अक्षगने दाखविण्याचे ठरविले आहे. हा व मर्यादा आपणाय जखन आहे असे समजून त्या कोनाची भुज्या किती अह हे आपणाच्या मांडावयाचे आहे. म्हणजे भुज्याचे किंमत, व ह्या मर्यादेच्या पटीने किंवा हिस्साने दाखवा व, व इत्यादि कोणत्याही प्रागच्या पटीने किंवा हिस्साने दाखवावी आहे. न दाखविता येण शक्य आहे. ते स्वरूप खाली दिल्याप्रमाणे :—

गुण = अ + छ + झ + उ + ञ + ...

ह्या समीकरणातील अ, छ, झ इत्यादि गुणक भुज्या व ह्या अनुक्रमे असले म्हणजे आपणाला भुज्याची किंमत सापडेल.

२०२. अरुणा समीपस्थानील अ ए अ गुणक गणित गिद्धानी घोषणा
प्राप्त. ते मार्ग अनेक आहेत. पण कोणत्याही मार्गाने जांच वेळी तरी अ ए अ
ह्या गुणकांच्या किमती एक येतात.

प्रथम लेव २०६ मध्ये जो सिद्धांत आहे त्यास आपण एम् चा सिद्धांत म्हणू.
त्याने वरच्या गुणाच्या म्हणजे अ ए अ इत्यादिकांच्या किमती शोधू तेव्हा

$$व \quad भुव ; \quad \frac{\text{सू३व}}{\text{सू१}} = - \text{कोभुव} ;$$

$$\frac{\text{गूव}}{\text{गू१}} = \text{कोभुव} , \quad \frac{\text{सू६व}}{\text{सू३}} = \cdot \cdot \text{भुव} ;$$

$$\frac{\text{सू२व}}{\text{सू१}} = - \text{भुव} ; \quad \frac{\text{सू५व}}{\text{सू३}} = + \text{कोभुव} ;$$

इत्यादि इत्यादि.

एम् च्या गिद्धानामध्ये अ ए अ चा किमती व, व, व, इत्यादि स्फात पाडिल्या
आहेत. आणि व, व, व, इत्यादिकांच्या किमती व, $\frac{\text{सू३व}}{\text{सू१}}$, $\frac{\text{गू२व}}{\text{गू१}}$ या स्फात ठरत
असे मार्गाने आहे आणि त्या ज्या ठरतात की विकारी पद ० असले त्या स्थितीतल्या
ध्याध्या म्हणजे ठरतात. येथे आपण विवारी पद व घेतले आहे तेव्हा अ ए अ
किमती खाली लिहिल्याप्रमाणे :—

$$\text{अ} = व, = व = \text{भुव} ; \quad व = ० \quad \text{म्ह. अ} = ०$$

$$\text{ए} = व, = \frac{\text{सू३व}}{\text{सू१}} = \text{कोभुव} \quad व = ० \quad \text{म्ह. ए} = १$$

$$\text{अ} = व, = = - \text{भुव} \quad \text{अ} = ०$$

$$\text{उ} = व, = = - \text{कोभुव} \quad \text{उ} = - १$$

$$\text{ई} = व, = = + \text{भुव} \quad \text{ई} = ०$$

$$\text{अ} = व, = = + \text{कोभुव} \quad \text{अ} = + १$$

$$\text{हय इत्यादि} \quad \text{इत्यादि}$$

ह्या किमती एम् च्या समीकरणात लिहिल्या तर

$$\text{भुव} = व - \frac{१}{१ \cdot २ \cdot ३} व^३ + \frac{१}{१ \cdot २ \cdot ३ \cdot ४ \cdot ५} व^५ + \dots$$

२३०. वरच्या मिदनाची मिदना अन्य प्रकारे वरिता येते ती मिदना खाली केली आहे.

लेख २२८ मधील सर्मीकरण खाली घेतो. हे सर्मीकरण स्वयमिद्व आहे कारण सर्व संख्या अव्यक्त असून असें असणें शक्य आहे.

$$\begin{aligned}\text{भुव} &= \text{ॲ} + \text{६.व} + \text{४.व}^2 + \text{३.व}^3 + \text{६.व}^4 + \text{४.व}^5 \\ \text{भु}(-\text{व}) &= \text{ॲ} - \text{६.व} + \text{४.व}^2 - \text{३.व}^3 + \text{६.व}^4 - \text{४.व}^5\end{aligned}$$

दोन्ही सर्मीकरणांची वजाबाकी केली तर

$$\begin{aligned}\text{भुव} - \text{भु}(-\text{व}) &= २ \text{६.व} + २ \text{३.व}^3 + २ \text{.व}^5 + २ \text{६.व}^7 + \dots \\ \text{पण } \text{भु}(-\text{व}) - (-\text{भुव}) &= \text{भुव} - \text{भु}(-\text{व}) = २ \text{भुव, अर्थात्} \\ \text{भुव} + \text{भुव} &= २ \text{भुव} = २ \text{६.व} + २ \text{३.व}^3 + २ \text{४.व}^5 + \dots \\ \text{भुव} &= \text{६.व} + \text{३.व}^3 + \text{४.व}^5 + \text{६.व}^7 + \dots \quad (\text{अ})\end{aligned}$$

ह्या सर्मीकरणाच्या दोन्ही पेट्याचे सूक्ष्मांशगुण काढिले. हे गुण समान येतील. कारण एकाचे विहारी पक्षाचे दोन समान गचय आहेत. तेव्हा

$$\frac{\text{सू}(\text{भुव})}{\text{सूव}} = \text{कोभुव}; \text{ आणि } \frac{\text{सू}(\text{६.व})}{\text{सूव}} = \text{६};$$

$$\frac{\text{सू}(\text{३.व}^3)}{\text{सूव}} = ३ \text{ ३.व}^3; \quad \frac{\text{सू}(\text{४.व}^5)}{\text{सूव}} = ५ \text{ ४.व}^5$$

ह्यावरून

$$\text{कोभुव} = \text{६} + ३ \text{ ३.व}^3 + ५ \text{ ४.व}^5 + \dots$$

ह्या सर्मीकरणाच्या दोन्ही पेट्याचे सूक्ष्मांशगुण काढिले तर

$$-\text{भुव} = + २.३. \text{ ३.व} + ४.५. \text{ ४.व}^3 + ६.७. \text{ ६.व}^5$$

$$\text{किंवा } \text{भुव} = - २.३. \text{ ३.व} - ४.५. \text{ ४.व}^3 - ६.७. \text{ ६.व}^5 - \dots \quad (\text{क})$$

(अ) आणि (क) हे सर्मीकरणे समान आहेत कारण दोन्ही भुव ह्या वरीवर आहेत. आणि ह्या दोन्ही व च्या घातावळ्या आहेत. म्हणून व च्या समान घाताचे गुण समान असलेच पाहिजे. म्हणून (लेख ३५)

$$२.३. \text{ ३.व} = \text{६}; \quad \text{३.व} = - \frac{\text{६}}{२.३};$$

$$- ४.५. \text{ ४.व}^3 = \text{३}; \quad \text{४.व}^3 = - \frac{\text{३}}{४.५} = + \frac{\text{६}}{२.३.४.५}$$

$$- ६.७. \text{ ६.व}^5 = \text{४}; \quad \text{६.व}^5 = - \frac{\text{४}}{६.७} = - \frac{\text{६}}{२.३.४.५.६.७}$$

१ × २ × ३ × ४ × ५ × ६ × ७ × ८ × ९ × १० म्हणजे १ पासून ते पर्यंत क्रमिक संख्यांचा गुणाकार याला अवयवीं न म्हणतात. १, २, ३ हे अवयवीं ३ आणि १, २, ३, ४, ५ हे अवयवीं ५ यांचे लेखन । ह्या चिन्हांचे लिहितात, जसे १, २, ३ = ६; १, २, ३, ४ = २४ इत्यादि. ए उ म ह्यांच्या किमती अ समीकरणाने लिहिल्या तर

$$\text{भुव} = \text{एव} = \frac{\text{ए}}{१३} व' = \frac{\text{ए}}{१७} व'' =$$

$$\frac{\text{मुव}}{व} = \text{ए} = \frac{\text{ए}}{१३} व' + \frac{\text{ए}}{१७} व''$$

ह्या समीकरणाला व चा किंमत ० मानली तर $\frac{\text{भुव}}{व} = १$ म्हणजेच ए = १

आहे. तेव्हा $\text{भुव} = व - \frac{व'}{१३} + \frac{व'}{१७} - \frac{व''}{१७}$ इत्यादि.

२३१. विविध कोनांची कोनभुज्या, त्या कोनाच्या वृत्तपरिमाणाने दाखविणे

वरच्या दोन लेखांत अशा भुव चं, किंमत व ह्या वृत्तपरिमाणाने दाखविता येते असं सिद्ध केले त्याच पद्धतीने कोभुव चं किंमत ठरविता येते. तथापि त्याही पेक्षा अत्यंत सुलभ अर्थां रीति आहे ती, भुव = व $\frac{व'}{१३}$ ह्या समीकरणाने सूक्ष्मांशगुण काढिले असता कोभुव ची किंमत येते ती किंमत अशी—

$$\text{कोभुव} = १ - \frac{व'}{१३} + \frac{व''}{१७} - \frac{व'''}{१७} + \dots$$

२३२. वर ज भुव आणि कोभुव यात्रिपरीचे सिद्धांत सिद्ध केले ते अनेक प्रकारच्या सिद्धांतांनी अनेक रीतींनी सिद्ध होतात त्या सर्व प्रकारच्या सिद्धांतां येथे देऊन ग्रंथविस्तार करण्याची आवश्यकता नाही. यांतच ते सिद्धांत मुख्यतः रीतीने सिद्ध करून देण्याची योजना मी येथे ठरविली आहे. ज्या निष्ठांतांची ग्रंथगतीच्या गणितात आवश्यकता आहे असेच सिद्धांत मी येथे सिद्ध करित आहे

२३३. विविध कोनांचे वृत्तपरिमाण, त्या कोनाच्या भुज्याने दाखविणे

ह्या कोनांचे वृत्तपरिमाण व आहे, आणि भुव = अ आहे. ह्यावरून व = भुव म्हणून क्ष च्या घातावळीने व ची किंमत ठरवावयाची.

$$व = \text{भुव}^{-१} \text{क्ष} = \text{ए} - \text{एव} + \text{अक्ष} - \text{उक्ष} + \text{ईक्ष} + \dots \text{(अ)}$$

२३६. वर मिद्ध केलेला भु'क्ष या पदाचा मिद्धात घ्या. त्यात क्ष ही भुजज्या आहे. ही भुजज्या $\frac{1}{2}$ आहे असे घेऊं. $\frac{1}{2}$ ही भुजज्या ३० अंश ह्या कोनाची आहे. आणि ३० अंश कोनाचें वृत्तपरिमाण $\frac{\pi}{6}$ आहे. म्हणजे

$$\text{भु'क्ष} = \frac{\pi}{6}, \text{ आणि क्ष} = \frac{1}{2}.$$

आता

$$\text{भु'क्ष} = \text{क्ष} + \frac{1}{2} \frac{\text{क्ष}^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\text{क्ष}^3}{6} + \dots \dots \dots$$

ह्यातील क्ष च्या ठिकाणी $\frac{1}{2}$ आणि भु'क्ष च्या ठिकाणी $\frac{\pi}{6}$ ठिठिले तर

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{6} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ &= 0.5 + \frac{1}{8} (0.125) + \frac{3}{64} (0.03125) + \frac{15}{1024} (0.00390625) \\ &\quad + \frac{31}{16384} \times (0.0009765625) + \frac{63}{262144} \times (0.00006103515625) \\ &\quad + \dots \dots \dots \end{aligned}$$

ह्याप्रमाणे बराचसा पडे ठाडिल्याने $\frac{\pi}{6}$ चा किंमत कळते.

२३७. वरच्या लेखांतील कृतोने $\frac{\pi}{6}$ ची किंमत काढण्यात पदसंख्या आसत

व्याची लागते. स्प'क्ष ह्या पदाच्या मिद्धांतानें $\frac{\pi}{6}$ ची किंमत अग्न आयामानें तयार होते. ता प्रमाण असा. ज्याची स्प'क्षेया $\frac{1}{2}$ आहे असा एक अ वात आहे. म्हणजे स्प'क्ष = $\frac{1}{2}$ आहे. पण

$$\text{स्प'क्ष} = \frac{2 \text{ स्प'क्ष}}{1 - \text{स्प'क्ष}} = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{2}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{3};$$

$$\text{स्प'क्ष} = \frac{2 \text{ स्प'क्ष}}{1 - \text{स्प'क्ष}} = \frac{2 \times \frac{8}{3}}{1 - \frac{8}{3}} = \frac{16}{3}{\frac{1}{3}} = \frac{16}{2} = 8;$$

$$\text{स्प'क्ष} = \text{स्प'क्ष} = 8;$$

$$\text{स्प'क्ष} = \frac{\pi}{6} = \frac{\text{स्प'क्ष} - 1}{\text{स्प'क्ष} + 1} = \frac{\frac{8}{3} - 1}{\frac{8}{3} + 1} = \frac{5}{11};$$

तेव्हा $v = \frac{\pi}{\rho} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot$ म्हणून

$$\frac{\pi}{\rho} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{1}{2\pi} \cdot$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^4 - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} \right)^6 + \dots \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{32} \left(\frac{1}{2} \right)^4 - \dots \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{8} (0.0001) + \frac{1}{32} (0.00000001) - \dots \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ 0.00010000 - \frac{1}{8} (0.0000000001) \dots \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ 0.00010000 - 0.0000000001 \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ 0.00010000 - 0.0000000001 \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ 0.00010000 - 0.0000000001 \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \times 0.00010000 = 0.00010000 \\ &= 0.00010000 \end{aligned}$$

आणि

$$\pi = 3.1415926535$$

ह्याची आणखी सूक्ष्म किंमत $1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^4$ ही पदे घेतल्यास खाली लिहिल्याप्रमाणे येते.

$$\pi = 3.1415926535$$

२३८. विवक्षित सख्येचे e ह्या पायावरील घातांक ठरविण्याचे सिद्धांत सूक्ष्मांगगणित म्हणजेच गून्थलिय गणित ह्याने सहज सिद्ध होतात. ती गिद्धता खाली दाखविली आहे.

घातांक $e (1 - x)$ ह्याची किंमत x वा घातांकाने ठरवावयाची.

घा $e (1 + x) = 1 + ex + \frac{e^2 x^2}{2!} + \frac{e^3 x^3}{3!} + \dots$
दोन्ही पेट्यांचे सूक्ष्मांश गुण काढिले तर,
$$\frac{e (1 + x)}{1 + x} = \frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

दोन्ही ममीकरणातील क्षच्या समान घातांचे गुण समान आहेत.

$$x = 0 \text{ असेल तर, घा } e (1) = 0 \text{ म्हणून } 1 = 0.$$

$$+ ex = + 1; + 2x^2 = - 1; x^3 = - \frac{1}{2};$$

$$+ 3x^3 = + 1, x^4 = + \frac{1}{2}; + 4x^4 = - 1, x^5 = - \frac{1}{2}.$$

$$\text{घा } e (1 + x) = x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{24} x^4 + \dots (1)$$

ह्यातील क्ष जर ऋण असेल म्हणजे — क्ष असेल तर
 घा $e (१ - क्ष) = - क्ष - \frac{१}{२} क्ष^२ - \frac{१}{३} क्ष^३ - \frac{१}{४} क्ष^४ -$ इत्यादि,
 (२)

२३९. घातप्रकाशक दाशत भुजज्या आणि कोभुजज्या.

लेख २२९, २३०, २३१ मध्ये भुक्ष आणि कोभुक्ष याच्या किमती क्ष च्या घाता-
 वळीने दाखविल्या आहेत आणि e चा क्ष घात हा ही क्ष च्या घातावळीने दाखविता
 येतो. ह्यावरून e ह्या सखेचा घात करून भुजज्याक्ष ची किमत साधिता येते,
 आणि कोभुक्षची, स्पक्ष ची किमतीही साधिता येते. तो प्रकार खाली दाखवीत आहे

एक गूढ सख्या आहे. ती अशी आहे की तिचा वर्ग केला असता—१ ही
 सख्या येते. सख्या धन असा किंवा ऋण असो तिचा वर्ग धनच येतो कारण
 $(-१) \times (-१) = +१$ आणि $(+१) \times (+१) = +१$.
 पण जिचा वर्ग उणा येतो ती सख्या काल्पनिकच समजली पाहिजे तीच सख्या आपण
 $\sqrt{(-१)}$ अशी दाखवू शकतो. हिचाहि आम्हाला आमच्या गणित सिद्धांतात
 उपयोग करून घेता येतो. ती असा की, एखाद्या समीकरणाने दोन्ही पेटघात काही
 गूढ सख्या व काही गूढ नाहीत अशा सख्या असतील त्या समीकरणाची दोन
 समीकरणे बनतात. जसे

$\sqrt{(-१)} \times क + \sqrt{(-१)} ब + ड = अ + ई + \sqrt{(-१)} फ$
 असे समीकरण असेल तर

$$ड = अ + ई (१)$$

आणि $\sqrt{(-१)} क + \sqrt{(-१)} ब = \sqrt{(-१)} फ$
 (२)

किंवा $\sqrt{(-१)}$ याने दुसऱ्या समीकरणास भाजिले तर

$$क + ब = फ (३)$$

लेखन सांवर्याकरिता $\sqrt{(-१)}$ ही सख्या τ ह्या निहाणे दाखविले. ह्या
 चिन्हांचे वाचन ग अक्षराचेच करितो. तेव्हा

$$\{\sqrt{(-१)}\}^१ = \tau^१ = -१$$

$$\{\sqrt{(-१)}\}^२ = \tau^२ = -\sqrt{(-१)} = -\tau$$

$$\{\sqrt{(-१)}\}^३ = \tau^३ = +१$$

$$\{\sqrt{(-१)}\}^४ = \tau^४ = -\sqrt{(-१)} = -\tau$$

२४०. e ह्या मध्येचा $+x$ आणि $-x$ असा दोन प्रकारचा घात करून त्याचा घात विस्तार केला तर त्या दोन श्रेण्या खाली दाखविल्याप्रमाणे होतील :—

$$e^{+x} = 1 + x + \frac{1}{1!} x^2 + \frac{1}{2!} x^3 + \frac{1}{3!} x^4 + \dots \quad (१)$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{1!} x^2 - \frac{1}{2!} x^3 + \frac{1}{3!} x^4 - \dots \quad (२)$$

दोन समीकरणाची बेरीज केली आणि त्यांत x चे x^2 या गुढ सख्याच्या किमती लिहिल्या तर

$$\frac{1}{2} (e^{+x} + e^{-x}) = 1 + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 + \frac{1}{6!} x^6 + \dots$$

परंतु $1 + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 + \frac{1}{6!} x^6$ ही श्रेणी कोभुज्येची आहे, जेव्हा $2x$ पहा. म्हणून

$$\text{कोभुज्य} = \frac{1}{2} (e^{+x} + e^{-x}).$$

समीकरण (१) मध्ये (२) वजा केलें तर

$$\frac{1}{2} (e^{+x} - e^{-x}) = x + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 + \frac{1}{7!} x^7 + \dots$$

x ह्या गुढ सख्येने समीकरणाच्या दोन्ही पेट्यास भागिले आणि त्यात x चे ह्यांगत किंती अवयवे $-1, 1, 1, 1$ इत्यादि ह्या ठेविल्या तेव्हा

$$\frac{1}{2x} (e^{+x} - e^{-x}) = 1 + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 + \frac{1}{6!} x^6 + \dots$$

परंतु उजव्या पेट्यातील श्रेणी भुज्येची आहे. (देख २२०, २३०). म्हणून

$$\text{भुज्य} = \frac{1}{2x} (e^{+x} - e^{-x}).$$

२४१. घातप्रकाशक दक्षित स्पर्शरेषा

$$\begin{aligned} \text{स्पर्श} &= \frac{\text{भुज्य}}{\text{कोभुज्य}} = \frac{\frac{1}{2x} (e^{+x} - e^{-x})}{\frac{1}{2} (e^{+x} + e^{-x})} \\ &= \frac{1}{x} \frac{e^{+x} - e^{-x}}{e^{+x} + e^{-x}}. \end{aligned}$$

$$\text{अर्थात् } \frac{1 + r \text{ रक्ष}}{1 - r \text{ रक्ष}} - \frac{e^{r \text{ रक्ष}}}{e^{-r \text{ रक्ष}}} = e^{2r \text{ रक्ष}}$$

२४२. वरच्या धानप्रकाशकी गुज्र्या नैनुज्र्या आणि स्पर्शरेषा याच्या गणक्याने अनेक मूलागुलीच्या मिदनाची मिदना करिता येते. विस्तार मर्यास्तव ते मिदना आणि त्याची मिदनाही येवे दंत नाही, पण नेहमी उपयोगान येणारी दोन समीकरणे खाली मिद करून दाखविन आहे. पूर्वी जी समीकरणे लेख २४०, २४१, २४६ यामध्ये मिद केली ती निरतिगळ्या ओक मीनीनी सिद्ध होताना तशीच या पद्धतीनेही सिद्ध होतात.

$$२४३. \text{ मू क्ष} = \text{न मू} (\text{क्ष} + \text{अ})$$

ह्या समीकरणातील न आणि अ ह्या दोन मर्या वरून आहेत, त्यानी क्ष ह्या मूलपरिमाणाची किमत ठरवावयाची आहे.

ह्या समीकरणाच्या दोन्ही पेट्यात भज्र्या आहेत. त्याची धानप्रकाशक दर्शी स्वरूपे केली. ती खाली दिल्याप्रमाणे:—

$$\text{मू क्ष} = \sum_{i=1}^n (e^{r_i \text{ क्ष}} - e^{-r_i \text{ क्ष}})$$

$$\text{आणि न मू} (\text{क्ष} + \text{अ}) = \sum_{i=1}^n \{ e^{r_i (\text{क्ष} + \text{अ})} - e^{-r_i (\text{क्ष} + \text{अ})} \}$$

तेव्हा

$$(e^{r \text{ क्ष}} - e^{-r \text{ क्ष}}) = \text{न} \{ e^{r (\text{क्ष} + \text{अ})} - e^{-r (\text{क्ष} + \text{अ})} \}.$$

ह्या समीकरणाचा $e^{-r \text{ क्ष}}$ ह्या पदाने भाग दे किवा $\frac{1}{e^{r \text{ क्ष}}}$ चा पदाने भागिले;

$$[e^{-r \text{ क्ष}} = \frac{1}{e^{r \text{ क्ष}}}] \text{ लेख १४ पहा.}$$

$$e^{2r \text{ क्ष}} - 1 = \text{न} [e^{r (2 \text{ क्ष} + \text{अ})} - e^{-r \text{ अ}}]$$

स्थलांतर केल्याने

$$e^{रक्ष} - n e^{र(रक्ष+अ)} = 1 - n e^{-अ}$$

$$e^{रक्ष} - n e^{रक्ष} \times e^{अ} = 1 - n e^{-अ}$$

$$e^{रक्ष} (1 - n e^{अ}) = (1 - n e^{-अ})$$

$$e^{रक्ष} = \frac{1 - n e^{-अ}}{1 - n e^{अ}}$$

ह्या समीकरणाच्या दोन्ही पेट्यांने e ह्या पायावरील घातांक काढिते आणि त्या घाताकांचे समाकरण केले तर

$$रक्ष = घा e (1 - n e^{-अ}) - घा e (1 - n e^{+अ})$$

जेव्हा २३८ समाकरण (२) मधील क्षच्या जागी $n e^{-अ}$ हे पद ठेविले तर

$$+ घा e (1 - n e^{-अ}) = - n e^{-अ} - \frac{1}{2} n^2 e^{-२अ} - \frac{1}{3} n^3 e^{-३अ} \dots \dots \dots$$

आणि क्षच्या जागी $n e^{अ}$ हे पद ठेविले तर

$$- घा e (1 - n e^{अ}) = + n^{अ} + \frac{1}{2} n^2 e^{२अ} + \frac{1}{3} n^3 e^{३अ} \dots \dots \dots$$

तेव्हा रक्षच्या बरोबर असलेल्या घाताकाच्या दोन पदांतील घात विसारात जी पदे आहेत ती n च्या घातावलीने लिहिली तर खालचे समीकरण तयार होते.

$$रक्ष = n (e^{अ} - e^{-अ}) + \frac{n^२}{२} (e^{२अ} - e^{-२अ}) + \frac{n^३}{३} (e^{३अ} - e^{-३अ}) + \dots \dots \dots$$

ह्या समीकरणातील उजवीकटच्या तीन पदाना किंवा अधिक पदे घेतल्यास त्यांना २२ ह्या गूढ संख्येने भागिले तर

$$\frac{n}{२२} (e^{अ} - e^{-अ}) = न भु अ; \frac{n^२}{२ \times २२} (e^{२अ} - e^{-२अ});$$

$$- \frac{n^३}{२} भु २ अ$$

ह्या प्रमाणेच पुढील पदांची स्वरूपे होतात. म्हणून

$$क्ष = नभुअ + \frac{n^2}{2} भुरअ + \frac{n^3}{3} भु३अ + \frac{n^4}{4} भु४अ + \dots \dots \dots (१)$$

२८४. स्पक्ष न स्प य आहे. तर क्ष ह्या वृत्तपरिमाणाची किंमत य किंवा य च्या पटाच्या भुज्येने ठरवायची. क्ष आणि य यांच्या स्पर्शरेषेच्या घातप्रकाश ही किमतींचे समीकरण लिहिजे. स्पर्शरेषेचा घात प्रकाशही किमतीं ऐ. २४१ मध्ये दाखविल्या आहेत. त्याप्रमाणे.

$$२स्पक्ष = २नस्पय$$

$$\frac{e^{२क्ष} - e^{-२क्ष}}{e^{क्ष} - e^{-क्ष}} = न \frac{e^{२य} - e^{-२य}}{e^{य} - e^{-य}}$$

असा छेदास $e^{२क्ष}$ आणि $e^{२य}$ यांनी गुणिले तेव्हां

$$\frac{e^{२क्ष} - १}{e^{२क्ष} + १} = न \frac{e^{२य} - १}{e^{२य} + १}$$

दोन्ही पेट्यांत १ ही संख्या मिळविली तेव्हां

$$\frac{२e^{२क्ष}}{e^{२क्ष} + १} = \frac{e^{२य} + न e^{२य} + १ - य}{e^{२य} + १} \dots \dots (अ)$$

दोन्ही पेट्यांत १ संख्या वजा केली तेव्हां—

$$\frac{२}{e^{२क्ष} + १} = \frac{e^{२य} - न e^{२य} - १ + न}{e^{२य} + १} \dots \dots (ब)$$

(अ) ह्या समीकरणाम (ब) ह्या समीकरणाने भागिले तेव्हां—

$$e^{२क्ष} = \frac{(१ + न) e^{२य} + १ - न}{(१ - न) e^{२य} + १ + न}$$

१ न — (१ + न) म अमें मानून उक्त्या पेटघातीक न च्या जागी म आणिला तेव्हां—

$$e^{रक्ष} = \frac{(१ + न) e^{रग्य} + (१ + न) म}{(१ + न) म e^{रग्य} + (१ + न)}$$

सर्व समीकरण (१ + न) ने भागिले

$$e^{रक्ष} = \frac{e^{रग्य} + म}{म e^{रग्य} + १}$$

$$= e^{रग्य} \times \frac{१ + म e^{-रग्य}}{१ + म e^{रग्य}} ; [e^{-रक्ष} = \frac{१}{e^{रक्ष}}]$$

दोन्ही पेटघाचे घातांक काढिले तर

$$रक्ष = रग्य + घा e^{(१ + म e^{-रग्य})} - घा e^{(१ + म e^{रग्य})}$$

ज्या २२८ समीकरण (१) मधील क्ष च्या जागी म $e^{-रग्य}$ हे पद आणि म $e^{रग्य}$ हे पद लिहिले तेव्हां—

$$रक्ष = रग्य - म (e^{रग्य} - e^{-रग्य}) + \frac{म^२}{२} (e^{४रग्य} - e^{-४रग्य}) -$$

मग २२ ह्या गूढ मध्येने भागिले तर उक्त्यासुद्ध्या पदांचे स्वरूप खाली लिहिल्याप्रमाणे होते

$$म \frac{१}{२२} (e^{रग्य} - e^{-रग्य}) = म भु २ य ; \frac{म^२}{२} \frac{१}{२२} (e^{४रग्य} - e^{-४रग्य})$$

$$= \frac{म^२}{२} भु ४ य$$

म्हणून

$$क्ष = य - म भु २ य + \frac{म^२}{२} भु ४ य - \frac{म^३}{३} भु ६ य + \dots (२)$$

संकलन

२४२. भाज्य, भाजक आणि भागाकार ही त्रयी त्रिचारागन आणा. याशी सदृश मच्चयात्ता किंवा श्रवत्यत्री पदाच्या मूधमाश, विकारीपदाच्या मूधमाश आणि मूधमाशामुग हो त्रयी आहे. भाजक आणि भागाकार यांचा गुणकार केला तर

तो भाज्याबरोबर असतो, तद्वन् विकारीपदाचा सूक्ष्मांश आणि सूक्ष्मांशगुण यांपासून अवलंबी पदाचा सूक्ष्मांश शोधिता येतो. मात्र तो गुणाकाराने सापडत नाही. कारण सूक्ष्मांश गूण्य रूप असता आणि गूण्याने कोणत्याही मध्येल्या गुणिहें तरी गुणाकार गूण्य येतो. यामुळे सूक्ष्मांशगुण हा अवलंबी पदापासून ज्या कृतीने उत्पन्न झाला आहे त्याच्या उलट कृति सूक्ष्मांशगुणाशी तेथी असता अवलंबी पद प्राप्त होते.

२४६. व ह अवलंबी पद आहे. याची किंमत अक्ष^न + क आहे. आणि क्ष हे विकारी पद आहे तेव्हा

$$\frac{\text{सुव}}{\text{सुक्ष}} = \text{नअक्ष} \quad \text{न-१} = \text{वक्ष म}$$

$$\text{यांमध्ये} \quad \text{व} = \text{नअ}, \text{ न} = \text{म} + १, \text{ आणि अ} = \frac{\text{व}}{\text{न}} = \frac{\text{व}}{\text{म} + १}$$

ह्यावरून $\text{नअक्ष}^{\text{न-१}}$ ह्या सूक्ष्मांशगुणाचे अवलंबी पद

$$\text{म्हणजे} \quad \text{वक्ष}^{\text{म}} \text{ ह्या सूक्ष्मांशगुणाचे अवलंबी पद} \frac{\text{व}}{\text{म} + १} \cdot \text{क्ष}^{\text{म} + १} ; ३.$$

ह आहे. ह्यावरून सूक्ष्मांशगुणावरून अवलंबी पद साधावयाचे असता कृति करावी ती अशी—“विकारी पदाचा घातप्रकाश ३ एकाने वाढवा, आणि तशा वाढविलेल्या घातप्रकाशकाने विकारी पदास भागा.”

२४७ बरच्या लेखात जी कृति मागिल्ली आहे तिला सकलन असे म्हणावे. सूक्ष्मांशगुणावरून अवलंबी पद शोधून काढणे याला सकलन म्हटले आहे. सूक्ष्मांशगुणांमध्ये विकारी पदाचे सचय एक अथवा अनेक असतात त्यापैकी एकाच सचयाचा म्हणजे अक्ष^न व ह्याचा विचार बरच्या लेखात केला, तसाच विचार सुक्ष, घाताक्ष आणि अक्ष^{क्ष} ह्या सचयांचे ही सकलन काय येने याचाही करावयास पाहिजे आहे. परंतु सोसुक्ष हा सुव याबरोबर आहे तर व सुक्ष हे आपणाम कळते, तसेच $\frac{१}{\text{क्ष}}$

हा सूक्ष्मांशगुण आहे याचे संकलन काय तर त्याचे सकलन घा^{क्ष} हे आहे. माध्या भागाकारात अमुक भाग येलेलं हे अनुमानाने आपण पाहतो त्याप्रमाणेच ह कृत्य आहे. माराश, विवक्षित सूक्ष्मांशगुणाबरोबर असलेल्या एक किंवा अनेक असलेल्या पदांचे सकलन त्या सूक्ष्मांशगुणाबरोबर असलेल्या पदाच्या स्वरूपावरून कल्पनेनेच समजावे लागते. आपल्या कल्पनेला जे सकलन येईल असे वाटते त्याचा सूक्ष्मांशगुण करावा तो विवक्षित सूक्ष्मांशगुणाबरोबर असल्यास सकलन बरोबर आहे असे समजावे.

२४८. संकलनाचे लेखन.—संकलनाचे लेखन लिहिण्याच्या अनेक पद्धती आहेत. पण माझ्या विचाराने आलेली लेखनपद्धति खाली दाखवित आहे. सकलन याचा अर्थ चांगल्या रीतीने एकत्र करणे असा आहे. सूक्ष्मांश म्हणजे परमाणू, तेव्हा अनंत

परमाणूचे एकीकरण करणे त्यास सकलन म्हणावे. सकलन यास परमाणूचे पिंडीकरण असेही म्हणता येईल. याचे निव्वन दावाविधान, स ह्या आद्याक्षराचा उपयोग करता आला असता पण हे अक्षर सचय शब्दाचे जागी योजिले आहे म्हणून मोडी लिपितील \bar{U} हे अक्षर योजिले आहे. \bar{U} ह्या अक्षरापुढे कम कम्बन त्या कमात ज्या सूक्ष्माशुणाचे सकलन करावयाचे त्या बरोबर असलेली पदे लिहून त्यापुढे बिकारी पदाचा सूक्ष्माशु जसे सूक्ष असे लिहावे असे मी योजिले आहे. जसे

$$\frac{\text{सूव}}{\text{सूव}} = \frac{\text{त}}{\text{ज}} \text{ याचे सकलन } \bar{U} \left(\frac{\text{त}}{\text{ज}} \right) \text{ सूव असे लिहावयाचे. व - म (क्ष) - क्ष}$$

$$\text{याचा सूक्ष्माशुण } \frac{\text{सूव}}{\text{सूक्ष}} = ३ \text{ क्ष असा आहे तेव्हा}$$

$$\bar{U} (३ \text{ क्ष}) \text{ सूक्ष} = \text{क्ष}$$

तसेंच

$$\text{क} = \text{व} + \text{व}^१ \text{ असेल तर}$$

सूक्ष्माशु गुण

$$\frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूव}} = १ : २५$$

याचे सकलन

$$\text{व} + \text{व} + \text{व} \text{ हे आहे}$$

२४०. सूक्ष्माशुणाबरोबर जा रानी असेल, त्यात जर अनेक पदे असतील तर प्रत्येक पदाचे सकलन करून आलेली बरीज त्या सूक्ष्माशुच्या सकलनाबरोबर असते. सचयाचा सूक्ष्माशुण काढिताना, त्या सचयात जो स्त्रीर पदे असतात त्याचा योग होत असतो. ती पदे सकलनात घ्यावी लागतात, परंतु ती पदे सचयाच्या पूर्वे परिचयानेच समजतात.

२५०. सूक्ष्माशु समीकरण हा एक सूक्ष्माशु गणिताचा भाग आहे. ज्योतिर्गणिताने त्याची अनेक अउचर्णाच्या ठिकाणी योजना करावी लागते. परंतु ती विषय विस्तृत आणि खोल विचाराचा आहे. तेवढ्यासाठी तो विचार व त्या समीकरणाचे स्पष्टीकरण ज्या क्षणी त्याची जरूर वाटेल तेथे करण्याचे योजिले आहे.

२५१. सूक्ष्माशु गणिताचा विचार करिताना सूक्ष्मतेचा विचार करावा लागतो. परंतु सूक्ष्मता हा शब्द सापेक्ष आहे. द्याकडाचे वजनाचा विचार करिता त्यात पडी, मण याचा हिशेब असतो. त्या प्रसंगी नोळे माझे गुजा याचा हिशेब घालावा लागतो. ५० खडी, १०० खडी असा माजर्णाने मणाचा हिशेब तसता. अर्थात शेगाची किंमत मूढा काही नाही असेच समजतो. त्याप्रमाणेच माझे आणि गुजरा. याबद्दल आमची अपेक्षा असेल त्याप्रमाणे सूक्ष्मतेचा विचार करिताना तिची मर्यादा ठरवावी लागते. बरेचसा विचाराने गरीबच्या सव्येने गरीबाच्या डोक्याचे वजन मागतांना खडापर्यंतच आमच्या सूक्ष्मतेची मर्यादा होते. सगळीं परिहारा ह्या सूक्ष्मतेला पहिल्या पदवीचा

सूक्ष्मता म्हणून पण त्यात सूक्ष्मता मर्यापर्वत नेणे असेल तर ती द्वितीय पदवीची सूक्ष्मता होय. ह्याचप्रमाणे त्रैगर्वत ३ री, ताल्ल मापर्वत ४ री इत्यादि सूक्ष्मतेच्या पदव्या मानाव्या लागतात.

२५२. विचारागणण्याचे चित्र काढायलाच असता प्रथम त्या विचाराचा आगमडा तो तयार करतो, नंतर त्याची सुधारणा करीत करीत अखेर चित्र तयार करतो. खगोलस्थ पदार्थांच्या गतिस्थितीचा विचार करिताना अशाच कृति करावी लागते. पूर्व कालाच्या विद्वान गणकानी ग्रहां मध्ये ज्या मोजमापा केल्या त्या आरभी स्थूल मानल्या असून त्यात सुधारणा होत गेली आहे. एखाद्या परिमेष भागाची मोजणी प्रथम स्थूल मानून करिताना ती किमंत खरी आहे असे मानून त्या परिमेष भागाचा दुसऱ्या ज्या भागाशी मध्य असेल त्याची मोजणी करिताना आणि त्या मोजणीच्या आधारे उलट पूर्वपरिमेषाची मोजणी करिताना. ही मोजणी पूर्वमोजणी पेक्षा सुद्धम झाली तर ती बरोबर मानून पुन्हा पूर्वप्रमाणे त्रिवा अन्य गतीने तिची ही सूक्ष्मता साधिता येते.

२५३. अनेक प्रसंगी परिमेष मापनाचा विचार वर सांगितल्याप्रमाणे पदवी पदवीनेच करावा लागतो प्रस्तुत ग्रंथान ही पद्धति सर्वेष्ट पृष्टे योजिली आहे. वान आणि चन्द्र त्रिज्या म्हणजे त्या ह्याच्या मापना ह्या पदव्याच याजितल्या आहेत. जी सगल्या एक परिमाणांच्या मूळारे ८१. जवळ जगेल तो नव्या पाहण्या पदवीची आहे असे स्वीकारले आहे. त्रिज्या वसतिवृत्त असलेली सगल्या दुसऱ्या पदवीची, घन जवळ जगलेली सगल्या तिसऱ्या पदवीचा सगल्या, हा प्रमाणे पदव्यांना वम स्वीकारला आहे.

२५४. अनेक पदात्मक कोनाची भुजज्या आणि कोभुजज्या.

इच्छितेला कोन अनेक पदात्मक आहे, म्हणजे त्या कोनाचे अनेक भाग आहेत, तर त्या कोनाचा भुजज्या आणि कोभुजज्या, त्या भागाच्या भुजज्या आणि कोभुजज्या यांनी ठरवावयाच्या आहेत. कोनाची भुजज्यादि गुणोत्तर ही भावसमस्यात्मक असतात, आणि कोनाचे वृत्तपरिमाण हेहि भावसमस्यात्मक असते. ह्यावरून भुजज्यादि गुणोत्तर हे वृत्तपरिमाण आहे असे मानिता येते. ह्या कल्पनेप्रमाणे नमुक्ष ही एक भावसमस्या आहे म्हणून भु (नमुक्ष) असे मानता येते. ह्या कल्पनेप्रमाणे—

३ - अ . प भु न व . द भु म व
न भु क व . च भु र व

(१) ह्या मध्ये व हे एका कोनाचे वृत्तपरिमाण आहे, व त्या बरोबर पुढील पदाचे एकीकरण करून आलेली सगल्या आहे. तेव्हा व कोनाची भुजज्या किंवा कोभुजज्या ही, पुढील प्रत्येक पदार्था भुजज्या आणि कोभुजज्या यांनी ठरवावयाची आहे.

(२) अहे एका कोनाचें वृत्तपरिमाण आहे.

(३) पभुनव ही व कोनाच्या (म्हणजे व ज्याचे वृत्तपरिमाण आहे त्या कोनाच्या) न पाटीची भुज्या असून प हा तिच्या गुणक आहे. प हा गुणक पहिल्या पदवीचा आहे. म्हणजे प ची विशेष सख्यात्मक किंमत $\frac{1}{2}$ जवळ आहे.

(४) द भुमव वरच्याप्रमाणेच कोनाच्या न पाटीची भुज्या असून तिच्या द हा गुणक आहे. व तो दुसऱ्या पदवीचा आहे. द ची किंमत सुमार $\frac{1}{3}$ च्या जवळ आहे.

(५) व (६) वरच्याप्रमाणेच न भुमव आणि न भुमव याच स्पर्शस्पर्श आहेत. न हा गुणक तिसऱ्या पदवीचा $\frac{1}{4}$ च्या जवळ आहे आणि न हा चवथ्या पदवीचा गुणक $\frac{1}{5}$ ह्या संख्येजवळ आहे असे समजावे.

२५५. वरचे गणीकरण सी गणनी लिखितवाप्रमाणे लिहितां—

व अ प द न न

रेखत सी ह्यचिह्ना आणि विस्तार टाळण्याकरिता पद न च ही अक्षरे पभुनव त्यादि-
काची निदर्शक आहेत. म्हणजे प हे अक्षर पभुनव असे आहे असे समजावे, तसेच
द म्हणजे द भुमव आहे इत्यादि. जेव्हा असून प मध्ये आणखीही विशेष अर्थ सी भारला
आहे. तो अगा की प हे पहिल्या पदवीचे एकच पद असून तो पहिल्या पदवीच्या जेव्हा
पदाचा समुदाय आहे त्याचप्रमाणे द हा दुसऱ्या पदवीचा समुदाय, न हा तिसऱ्या
पदवीचा समुदाय, च हा चवथ्या पदवीचा समुदाय आहे. ह्या सर्व पदांचे दोन भाग
केले आहेत. एका भागात अ हे वृत्तपरिमाण आणि दुसऱ्या भागात, पद त च ही पदे
याचे एकीकरण करून आलेली सख्या जित्या सी स असे नोंदवता ती. तेव्हा

$$व = अ + स$$

$$भुष = भु (अ + स)$$

$$= भुअ को भुस + को भुअ भुस. [ल. ५९ (१)]$$

स हे वृत्तपरिमाण आहे, याची भुज्या आणि कोभुज्या स च्या घातावळींनी
समजते. लेख २३०, २३१ पहा.

म्हणजे

$$भुस = स - \frac{1}{2} स^2 + \frac{1}{24} स^4 - \dots$$

$$\text{आणि कोभुस} = १ - \frac{1}{2} स^2 + \frac{1}{24} स^4 - \dots$$

ह्यामधील ग हे पद पहिल्या पदवीचे आहे, स दुसऱ्या पदवीचे, ह्याचप्रमाणे स^२
तिसऱ्या पदवीचे आणि स^४ चवथ्या पदवीचे आहे प्रस्तुत ग्रंथाच सूक्ष्मतेची मर्याद

ब्रह्म्या पदवीपर्यंत स्वीकारली आहे, म्हणून स' हे पद पांचव्या पदवीचे म्हणून विचाराने घेण्याचे कारण नाही. भुम आणि कोभुम यांच्या किमती ब्रह्म्या भय च्या समीकरणांत लिहिल्या तेव्हा

$$\text{भुघ} = (१ - \frac{१}{३} \text{स}^३ + \frac{१}{३} \text{स}') \text{भुअ} + (\text{स} - \frac{१}{३} \text{स}') \text{कोभुअ.}$$

२५६. ब्रह्म्या समीकरणाने म' हे पद वापरणे आहे ते वाढून त्याच्या बरोबरीची सग्या त्या समीकरणाने देवून समीकरण तयार करायचे आहे. ती तिस्या साली दाखविता. त्यात सूक्ष्मतेची मर्यादा चवथ्या पदवीपर्यंत असल्यामुळे प' च्या चतुर्थापाशा जास्त सूक्ष्म पदवी अंगेक्षा नाही. तसेच द', प' त आणि प' द या अंशा जास्त सूक्ष्म पदे घ्यावयाची नाहीत :—

$$\begin{aligned} \text{म} &= \text{प} + \text{द} + \text{त} + \text{च} \\ \frac{१}{३} \text{म}' &= \frac{१}{३} \text{प}' + \frac{१}{३} \text{द}' + \frac{१}{३} \text{त}' + \frac{१}{३} \text{च}', \text{ पद, पत,} \\ \frac{१}{३} \text{म}^३ &= \frac{१}{३} \text{प}^३ + \frac{१}{३} \text{प}' \text{द}, \\ \frac{१}{३} \text{म}' &= \frac{१}{३} \text{प}' \end{aligned}$$

ह्यावरून

$$\begin{aligned} \text{भुम} &= \text{प} + \text{द} + \text{त} + \text{च} - \frac{१}{३} \text{प}' - \frac{१}{३} \text{प}' \text{द}; \\ \text{कोभुस} &= १ - \frac{१}{३} \text{प}^३ - \frac{१}{३} \text{द}' - \text{पद} - \text{पत} + \frac{१}{३} \text{प}'. \end{aligned}$$

आतां

$$\text{भुघ} = \text{भुअ कोभुस} + \text{कोभुअ भुस.}$$

म्हणून

$$\text{भुघ} = \begin{cases} (१ - \frac{१}{३} \text{प}^३ - \frac{१}{३} \text{द}' - \text{पद} - \text{पत} + \frac{१}{३} \text{प}') \text{भुअ} \\ + (\text{प} + \text{द} + \text{त} + \text{च} - \frac{१}{३} \text{प}' - \frac{१}{३} \text{प}' \text{द}) \text{कोभुअ} \dots \dots (१) \end{cases}$$

हेचप्रमाणेच को भुघ ची किंमत ठरविता येते. ती अशी :

$$\text{कोभुघ} = \text{कोभुअ कोभुस} - \text{भुअ भुस.}$$

म्हणून

$$\text{कोभुघ} = \begin{cases} (१ - \frac{१}{३} \text{प}^३ - \frac{१}{३} \text{द}' - \text{पद} - \text{पत} + \frac{१}{३} \text{प}') \text{कोभुअ} \\ - (\text{प} + \text{द} + \text{त} + \text{च} - \frac{१}{३} \text{प}' - \frac{१}{३} \text{प}' \text{द}) \text{भुअ} \dots (२) \end{cases}$$

२५७. ब्रह्म्या समीकरणाने प' द' त' च' हीं पदे मध्ये दाखविली आहेत. त्याची वास्तव स्वरूपे घेऊन ती समीकरणे लिहावयाची आहेत परंतु तातूचीं भज्ज्या कोभुज्या किंवा भुज्या कोभुज्या याच वर्ग वातादि घान कशा प्रकारचे

होतात याची माहिती करून देणारी समीकरणे प्रथम मिळू नयेली पाहिजेत. त्यापैकी काही समीकरणे पूर्वी मिळू नयेलेली आहेत. तथापि ती सर्व एका ठिकाणी लिहितां. तथापि लेख ५० ते ६६ पुन्हा पहा.

$$\text{भुक्ष} \times \text{कोभुय} = + \frac{2}{3} \text{भु} (\text{क्ष} + \text{य}) + \frac{1}{3} \text{भु} (\text{क्ष} - \text{य}) \quad (१)$$

$$\text{कोभुक्ष} \div \text{भुय} = \frac{2}{3} \text{भु} (\text{क्ष} + \text{य}) - \frac{1}{3} \text{भु} (\text{क्ष} - \text{य}) \quad (२)$$

$$\text{कोभुक्ष} \times \text{कोभुय} = \frac{1}{3} \text{कोभु} (\text{क्ष} + \text{य}) + \frac{1}{3} \text{कोभु} (\text{क्ष} - \text{य}) \quad (३)$$

$$\text{भुक्ष} \div \text{भुय} = - \frac{2}{3} \text{कोभु} (\text{क्ष} + \text{य}) + \frac{1}{3} \text{कोभु} (\text{क्ष} - \text{य}) \quad (४)$$

ह्या चार समीकरणांच्या सहाय्याने भुज्या आणि कोभुज्या यांच्या घाताच्या किमती ठरवितां येतात. त्या अशा

$$\text{भु}^३ \text{क्ष} - \text{भु}^३ \text{क्ष} = \text{भु}^३ \text{क्ष} - \frac{1}{3} \text{कोभु} (\text{क्ष} - \text{क्ष}) = \frac{2}{3} \text{कोभु} (\text{क्ष} - \text{क्ष})$$

$$\text{कोभु} (\text{क्ष} - \text{क्ष}) = \text{कोभु} (०) = ०$$

$$\text{म्हणून } \text{भु}^३ \text{क्ष} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \text{कोभु}^२ \text{क्ष},$$

$$\text{कोभु}^३ \text{क्ष} = \text{कोभु} \text{क्ष} \times \text{कोभु}^२ \text{क्ष} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \text{कोभु}^२ \text{क्ष},$$

$$\text{भु}^३ \text{क्ष} = \text{भु}^३ \text{क्ष} - \text{भु}^३ \text{क्ष} \quad \left(\because \frac{1}{3} \text{कोभु}^२ \text{क्ष} \right) \quad \text{भु}^३ \text{क्ष}$$

$$= \frac{1}{3} \text{भु}^३ \text{क्ष} - \frac{1}{3} \text{कोभु}^२ \text{क्ष} \quad \text{भु}^३ \text{क्ष}$$

$$= \frac{1}{3} \text{भु}^३ \text{क्ष} - \frac{1}{3} (\text{भु}^३ \text{क्ष} - \frac{1}{3} \text{भु}^३ \text{क्ष})$$

$$= + \frac{2}{3} \text{भु}^३ \text{क्ष} - \frac{1}{9} \text{भु}^३ \text{क्ष}$$

$$\text{आणि कोभु}^३ \text{क्ष} = + \frac{2}{3} \text{कोभु}^३ \text{क्ष} + \frac{1}{9} \text{कोभु}^३ \text{क्ष}$$

ह्याप्रमाणेच चतुर्थां, पंचघात इत्यादिकांच्या किमती काढिता येतात. त्या किमती काढून खाली लिहिल्या आहेत :—

$$\text{भु}^३ \text{क्ष} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \text{कोभु}^२ \text{क्ष}$$

$$\text{भु}^३ \text{क्ष} = \frac{1}{3} \text{भु}^३ \text{क्ष} - \frac{1}{3} \text{भु}^३ \text{क्ष}$$

$$\text{भु}^३ \text{क्ष} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \text{कोभु}^२ \text{क्ष} = - \frac{1}{3} \text{कोभु}^२ \text{क्ष}$$

$$\text{भु}^३ \text{क्ष} = \frac{1}{3} \text{भु}^३ \text{क्ष} - \frac{1}{3} \text{भु}^३ \text{क्ष} = - \frac{1}{3} \text{भु}^३ \text{क्ष}$$

$$\text{भु}^३ \text{क्ष} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \text{कोभु}^२ \text{क्ष} + \frac{1}{3} \text{कोभु}^२ \text{क्ष} - \frac{1}{3} \text{कोभु}^२ \text{क्ष}$$

$$\text{कोभु}^३ \text{क्ष} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \text{कोभु}^२ \text{क्ष}$$

$$\text{कोभु}^३ \text{क्ष} = \frac{1}{3} \text{कोभु}^३ \text{क्ष} - \frac{1}{3} \text{कोभु}^३ \text{क्ष}$$

$$\text{कोभु}^३ \text{क्ष} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \text{कोभु}^२ \text{क्ष} = \frac{1}{3} \text{कोभु}^२ \text{क्ष}$$

$$\text{कोभु}^३ \text{क्ष} = \frac{1}{3} \text{कोभु}^३ \text{क्ष} + \frac{1}{3} \text{कोभु}^३ \text{क्ष} - \frac{1}{3} \text{कोभु}^३ \text{क्ष}$$

$$\text{कोभु}^३ \text{क्ष} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \text{कोभु}^२ \text{क्ष} = \frac{1}{3} \text{कोभु}^२ \text{क्ष} = \frac{1}{3} \text{कोभु}^२ \text{क्ष}.$$

२५८. लेख २५६ मधील समीकरणाने जी गयुक्त पदे आली आहेत त्याचे स्पष्टीकरण करितो.

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2}p^1 &= -\frac{1}{2}p^1\mu^1\text{नव} = -\frac{1}{2}p^1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\text{कोभुरनव}\right) \\
 &\quad -\frac{1}{2}p^1\quad \frac{1}{2}p^1\text{कोभुरनव} \\
 -\frac{1}{2}d^1 &= -\frac{1}{2}d^1\mu^1\text{मव} = -\frac{1}{2}d^1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\text{कोभुरमव}\right) \\
 &= -\frac{1}{2}d^1 + \frac{1}{2}d^1\text{कोभुरमव} \\
 -\text{पद} &= -\text{पद}\mu^1\text{मव}\mu^1\text{नव} \\
 &= -\text{पद}\left\{-\frac{1}{2}\text{कोभु (म+न) व} + \frac{1}{2}\text{कोभु (म-न) व}\right\} \\
 &\quad + \frac{1}{2}\text{पदकोभु (म+न) व} - \frac{1}{2}\text{पदकोभु (म-न) व} \\
 -\text{पत} &= +\frac{1}{2}\text{पतकोभु (क+न) व} - \frac{1}{2}\text{पतकोभु (क-न) व} \\
 \frac{1}{2}p^1\quad \frac{1}{2}p^1\mu^1\text{नव} &\quad \frac{1}{2}p^1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\text{कोभुरनव}\right) \quad \frac{1}{2}\text{कोभुरनव} \\
 &= \frac{1}{2}p^1 - \frac{1}{2}p^1\text{कोभुरनव} + \frac{1}{2}p^1\text{कोभुरनव}
 \end{aligned}$$

ह्यावरून को भु म ची पदे एकत्र करून खाली दिलेली आहेत:—

$$\text{वाभुस} \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}p^1\quad \frac{1}{2}d^1\quad \frac{1}{2}p^1\right) \left(\frac{1}{2}p^1 - \frac{1}{2}p^1\right) \text{नाभुरनव} \\ & + \frac{1}{2}\text{पदकोभु (म+न) व} - \frac{1}{2}\text{पदकोभु (म-न) व} \\ & + \frac{1}{2}\text{पतकोभु (क+न) व} - \frac{1}{2}\text{पतकोभु (क-न) व} \\ & - \frac{1}{2}d^1\text{कोभुरमव} - \frac{1}{2}p^1\text{कोभुरनव} \end{aligned} \right.$$

२५९. वरच्या लेखाने जशी को भु न ची किमती मिळवेली तशी मजगती न ची किमती येथे मिळव करितो. त्या किमतीत दात गयुक्त पदे आहेत त्याचे स्पष्टीकरण खाली दिल्याप्रमाणे:—

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}p^1 &= -\frac{1}{2}p^1\mu^1\text{नव} = -\frac{1}{2}p^1\left(\frac{1}{2}\mu^1\text{नव} - \frac{1}{2}\mu^1\text{नव}\right) \\
 &= -\frac{1}{2}p^1\mu^1\text{नव} + \frac{1}{2}p^1\mu^1\text{नव} \\
 -\frac{1}{2}p^1d^1 &= -\frac{1}{2}p^1\mu^1\text{नव} \times d^1\mu^1\text{नव} \\
 &= -\frac{1}{2}p^1d^1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\text{कोभुरनव}\right)\mu^1\text{मव} \\
 &\quad -\frac{1}{2}p^1d^1\mu^1\text{मव} - \frac{1}{2}p^1d^1\mu^1\text{नव}\mu^1\text{मव} \\
 &= -\frac{1}{2}p^1d^1\mu^1\text{मव} + \frac{1}{2}p^1d^1\mu^1\text{(म-नव) व} \\
 -\frac{1}{2}p^1d^1\mu^1\text{(म-नव) व}
 \end{aligned}$$

तेव्हा

$$\text{भु म} \left\{ \begin{aligned} & -\text{पभुनव} \quad d^1\mu^1\text{मव} \quad \text{नभुनव} \\ & + \text{वभुगव} - \frac{1}{2}p^1\mu^1\text{नव} + \frac{1}{2}p^1\mu^1\text{नव} \\ & - \frac{1}{2}d^1\text{दभ (म-न) व} \quad \frac{1}{2}d^1\text{दभ (म-न) व} \\ & - \frac{1}{2}p^1d^1\mu^1\text{मव} \end{aligned} \right.$$

२६०. लेख २५६ मध्ये भुज ची किमत मर्याकरण (१) मध्ये जी दिली आहे तिच्यात पदाची स्वप्नो सामान्य जशी लिहिली आहेत, त्याचे स्पष्टीकरण सामान्यत्वे करूनच खाली दिले आहे :—

भुज च्या किमतीत अ कानाची भुज्या आणि कोभुज्या याच्या किमती आहेत. त्यात अ कोन प्रत्यक्ष आहे आणि म कोन हा इतर कानाचा प्रतिनिधि आहे. त्याची भुज्या आणि कोभुज्या जर दिली आहे त्यावरून घ कानाची भुज्या आणि कोभुज्या याची स्वरूपे खाली दिली आहेत.

भुज = भुअ कोभुस + काभुअ भुस

भुज आणि कोभुस तसेच कोभुज आणि भुस हे दोन्ही गुणाकार करून आकली सर्व पदे एकत्र लिहिली आहेत.

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned}
 & (१ - \frac{१}{२} \text{प}^३ - \frac{१}{२} \text{द}^३ + \frac{१}{२} \text{प}^४) \text{भुअ} \\
 & : \frac{१}{२} \text{पभु} (\text{नव} + \text{अ}) + \frac{१}{२} \text{पभु} (\text{नव} - \text{अ}) \\
 & + \frac{१}{२} \text{पभु} (२ \text{नव} + \text{अ}) + \frac{१}{२} \text{पभु} (२ \text{नव} - \text{अ}) \\
 & + \frac{१}{२} \text{दभु} (\text{मव} + \text{अ}) + \frac{१}{२} \text{दभु} (\text{मव} - \text{अ}) \\
 & : \frac{१}{२} \text{पदभु} \{ (\text{म} - \text{न}) \text{व} + \text{अ} \} - \frac{१}{२} \text{पदभु} \{ (\text{म} - \text{न}) \text{व} - \text{अ} \} \\
 & - \frac{१}{२} \text{पदभु} \{ (\text{म} - \text{न}) \text{व} + \text{अ} \} + \frac{१}{२} \text{पदभु} \{ (\text{म} - \text{न}) \text{व} - \text{अ} \} \\
 & + \frac{१}{२} \text{तभु} (\text{कव} + \text{अ}) + \frac{१}{२} \text{तभु} (\text{कव} - \text{अ}) \\
 & - \frac{१}{२} \text{प}^३ \text{भु} (\text{नव} + \text{अ}) - \frac{१}{२} \text{प}^३ \text{भु} (\text{नव} - \text{अ}) \\
 & + \frac{१}{२} \text{प}^३ \text{भु} (२ \text{नव} + \text{अ}) + \frac{१}{२} \text{प}^३ \text{भु} (२ \text{नव} - \text{अ}) \\
 & + \frac{१}{२} \text{चभु} (\text{गव} + \text{अ}) + \frac{१}{२} \text{चभु} (\text{गव} - \text{अ}) \\
 & - \frac{१}{२} \text{प}^३ \text{भु} (२ \text{नव} + \text{अ}) - \frac{१}{२} \text{प}^३ \text{भु} (२ \text{नव} - \text{अ}) \\
 & + \frac{१}{२} \text{प}^३ \text{भु} (४ \text{नव} + \text{अ}) - \frac{१}{२} \text{प}^३ \text{भु} (४ \text{नव} - \text{अ}) \\
 & - \frac{१}{२} \text{पतभु} \{ (\text{क} + \text{न}) \text{व} - \text{अ} \} + \frac{१}{२} \text{पतभु} \{ (\text{क} + \text{न}) \text{व} - \text{अ} \} \\
 & - \frac{१}{२} \text{पतभु} \{ (\text{क} - \text{न}) \text{व} + \text{अ} \} + \frac{१}{२} \text{पतभु} \{ (\text{क} - \text{न}) \text{व} - \text{अ} \} \\
 & - \frac{१}{२} \text{प}^३ \text{दभु} (\text{मव} + \text{अ}) - \frac{१}{२} \text{प}^३ \text{दभु} (\text{मव} - \text{अ}) \\
 & : \frac{१}{२} \text{प}^३ \text{दभु} \{ (\text{म} - २ \text{न}) \text{व} + \text{अ} \} \\
 & + \frac{१}{२} \text{प}^३ \text{दभु} \{ (\text{म} + २ \text{न}) \text{व} - \text{अ} \} \\
 & - \frac{१}{२} \text{प}^३ \text{दभु} \{ (\text{म} - २ \text{न}) \text{व} + \text{अ} \} \\
 & - \frac{१}{२} \text{प}^३ \text{दभु} \{ (\text{म} - २ \text{न}) \text{व} - \text{अ} \} \\
 & + \frac{१}{२} \text{दभु} (२ \text{मव} + \text{अ}) - \frac{१}{२} \text{दभु} (२ \text{मव} - \text{अ})
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

२६१. कोभूष ची गारगी. वरुणप्रमाणे कोभूष ची किमन खादी लिहिली आहे.

कोभूष - कोभूअ कोभूस भूअ भूस

कोभूअकोभूस आणि भूअभूस हे दोन्ही गुणाकार करून आलेली गर्व पदे त्याची एकत्र लिहिली आहेत.

(१ - ३ प^३ - ३ द^३ + ३ प^३) कोभूअ

(- ३ प + ३ द^३) [कोभू (न व - अ) - कोभू (न व + अ)]

(- ३ द - ३ प^३ द) [कोभू (म व - अ) - कोभू (म व + अ)]

(+ ३ प^३ - ३ द^३ प^३) [कोभू (२ न - अ) - कोभू (२ न + अ)]

- ३ द^३ प^३ [कोभू (३ न व - अ) - कोभू (३ न व + अ)]

+ ३ प^३ द [कोभू { (म - न) व - अ } - कोभू { (म - न) व + अ }]

- ३ प^३ द [कोभू { (म - न) व - अ } - कोभू { (म - न) व + अ }]

+ ३ प^३ न [कोभू { (क - न) व - अ } - कोभू { (क - न) व + अ }]

- ३ प^३ न [कोभू { (क - न) व - अ } - कोभू { (क - न) व + अ }]

- ३ त [कोभू (क व - अ) - कोभू (क व + अ)]

- ३ च [कोभू (ग व - अ) - कोभू (ग व + अ)]

+ ३ द^३ [कोभू (२ म व - अ) + कोभू (२ म व + अ)]

+ ३ द^३ प^३ [कोभू (४ न व - अ) + कोभू (४ न व + अ)]

- ३ द^३ प^३ द [कोभू { (म + २ न) व - अ }]

- कोभू { (म + २ न) व + अ }].

+ ३ द^३ प^३ द [कोभू { (म - २ न) व - अ }]

+ कोभू { (म - २ न) व + अ }].

२६२. ग्रहगणितान्न वरुणा दोन समीकरणेची विशेष आवश्यकता असते म्हणून ती दोन्ही पक्षे मित्र करून लिहिल्या जात. एतच्छा अज्ञान राशीची मोजणी सूक्ष्मतेच्या पदवी पदवीने करिता येते हा सूक्ष्माय गणिताचा भाग आहे म्हणून ही समीकरणे पक्षे दिशी आहेत. व्याप्रमाणेच त्याचे दार्शनिकतेच्या दृष्ट्याचे समीकरण केवळ पदवीच्या क्रमानेच मिळू केले आहे ते समीकरण असे—

य = क्ष + पभुनक्ष + दभुसक्ष + तमुक्ष + चभुगक्ष +

हे समीकरण सामान्य स्वरूपाचे आहे. ह्यामध्ये अ हे विकारी पद असून य हे अवलंबी पद आहे. व्याख्याय प न वर्गरे मर्या आहेत त्या स्थीर संख्या आहेत.

ग्रहगणितान् आपणान् ह्या समीकरणाची अशी आवश्यकता उत्पन्न होते की, ह्या प्रमाणे निम्न अमेरच्या समीकरणापामून क्ष हे अव्यक्त पद समजून आणि य हे व्यक्त पद समजून यच्या महाव्याने क्ष ची किंमत तयार करावयाची. मूक्षमागणितानाच्या सहाय्याने अमली समीकरणे सोडविण्याच्या रीति इंग्लिश ग्रंथात अनेक आहेत. परंतु ह्या रीति निम्न कल्पनास मूक्षमागणिताने उत्तम ज्ञान असले पाहिजे. त्या गणित पद्धतीचा मार्ग मृदुल व जवळचा आहे. परंतु महाराष्ट्र भाषेत इतक्या उच्च प्रतीच्या गणितावर ग्रंथ झाले नव्हत्यामुळे, दीर्घ विस्तार झालेला पत्करून उपपत्तीचा दृष्टि निचिनी ही न टाकता वरचा मित्राने निम्न करीत आहे.

२६३. समीकरणाचे मूळ स्वरूप—

$$य = क्ष + प भु न क्ष + द भु म क्ष + \dots\dots$$

ह्यातील क्ष ची किंमत आपणास पाहिजे आहे म्हणून

$$क्ष = य - प भु न क्ष - द भु म क्ष - \dots\dots (अ)$$

मूक्षमतेचा विचार बाजूस ठेवून प्रथम

$$क्ष = य - प भु न क्ष.$$

असे मानू. ह्याला न ने गुणून त्याची भुज्या करू

$$भु न क्ष = भु (न य - प न भु न क्ष)$$

$$प भु न क्ष = प भु (न य - प न भु न क्ष) = प भु न य - प^२ न भु न क्ष \text{ को भु न क्ष}$$

प्रथम आपण क्ष ची किंमत पहिल्या पदवी पत्रेनच काढू म्हणून प^२ न भु न क्ष हे दुसऱ्या पदवीचे पद सोडून दिले तेव्हा.

$$प भु न क्ष = प भु न य \dots\dots$$

ही किंमत समीकरण (अ) मध्ये टाकिली तेव्हा

$$क्ष = य - प भु न य \quad [\text{पहिली पदवी}] \quad (प)$$

२६४. क्ष ची किंमत पहिल्या पदवीची आपणाला समजली. आता क्ष ची दुसऱ्या पदवीची किंमत शोवं.

$$क्ष = य - प भु न य.$$

ह्या समीकरणाला न ने गुणून त्याची भुज्या करूं.

$$न क्ष = न य - प न भु न य$$

$$भु न क्ष = भु (न य - प न भु न य)$$

$$= भु न य \text{ को भु } (प न भु न य) - \text{को भु न य भु } (प न भु न य).$$

भुज्या आणि कोभुज्या वृत्तपरिमाणाच्या घातावलीने मांडता येताना जसे
भु क्ष = क्ष - १/२ क्ष^२, आणि को भु क्ष = १ - १/२ क्ष^२ ह्याप्रमाणे

$$\text{को भु } (प न भु न य) = १ - १/२ प^२ न^२ भु^२ न य + \dots\dots$$

$$\text{आणि भु } (प न भु न य) = प न भु न य - \dots\dots$$

आपणाला दुसऱ्या पदवीची पदे पाहिजे आहेत, आणि आपण भु न क्ष ची किंमत मित्र वरील आहेत भु न क्ष त्या प हा गुणक पाहल्या पदवीचा आहे म्हणून $\frac{1}{2}$ पं^१ हें पद सोडून दिले तेव्हा

$$\text{पभुनक्ष} = \text{पभुनय} \times 1 - \text{कोभुनय} \times \text{पनभुनय.}$$

$$- \text{पभुनक्ष} = - \text{पभुनय} + \text{पं}^1 \text{न} \times \text{भुनय} \times \text{कोभुनय.}$$

$$= - \text{पभुनय} + \frac{1}{2} \text{पं}^1 \text{न भुनय} \dots\dots\dots (१)$$

आता

$$\text{दभुमक्ष} = \text{दभुम} \{ \text{म}(\text{य} - \text{पनभुनय}) \}$$

$$= \text{दभुमय} \times 1 - \text{द को भुनय} \times \text{पनभुनय.}$$

प द या गुणकाने युक्त पद निसऱ्या पदवीच होते. म्हणून ने सोडून दिले तेव्हा

$$- \text{दभुमक्ष} = - \text{दभुमय.} \dots\dots\dots (२)$$

अ समीकरणांत (१) (२) ही पदे लिहिली तेव्हा

$$\text{क्ष} - \text{य} - \text{पभुनय} + \frac{1}{2} \text{पं}^1 \text{नभुनय} = \text{दभुमय.} \quad (\text{दुगरी पदवी}) \quad (४)$$

२०१. आता आपणाला क्ष च्या किमतीतील निसऱ्या पदवीपर्यंत पदे मांडावयाची आहेत. ह्याकरिता.

$$\text{क्ष} = \text{य} - \text{पभुनक्ष} - \text{दभुमक्ष} - \text{पभुनक्ष} - \quad (अ)$$

ह्या समीकरणात उजवीकडच्या पेश्यात क्ष चा ठिकाणी क्ष ची य च्या रूपाने निघालेली किंमत ठेवावयाची.

प्रथम पभुनक्षची किंमत तयार करूं.

$$\text{नक्ष} = \text{नय} - \text{पनभुनय} + \frac{1}{2} \text{पं}^1 \text{नभुनय} - \text{दभुमय.}$$

$$= \text{नय} - \text{स} \quad \text{असें मानिले तर.}$$

भुनक्ष = भु (नय - य) - भुनक्षकोभुन - कोभुनयभुन ह्या समीकरणातील स ची किंमत घेऊन येणारी पदे दुसऱ्या पदवी पर्यंत पाहिजे आहेत, म्हणून

$$\text{कोभुम} \quad \text{कोभु} (\text{पनभुनय} - \frac{1}{2} \text{पं}^1 \text{नभुनय} - \text{दभुमय})$$

$$= \frac{1}{2} \text{पं}^1 \text{नभुनय}$$

$$\text{भुस} = \text{पनभुनय} - \frac{1}{2} \text{पं}^1 \text{नभुनय} + \text{दभुमय}$$

तेव्हा.

$$\text{पभुनक्ष} = \text{प} (1 - \frac{1}{2} \text{पं}^1 \text{नभुनय}) \text{भुनय}$$

$$- \text{पं}^1 \text{नभुनय कोभुनय} + \frac{1}{2} \text{पं}^1 \text{नभुनय} \times \text{कोभुनय}$$

$$- \text{पदभुमय} \times \text{कोभुनय}$$

— पभुनक्ष - — पभुनय :- ३ प'न' भुनय + ३ प'न' भुनय
 ३ प'न' भुनय ३ प'न' भुनय
 + ३ पदनभु (म + न) य + ३ पदनभु (म - न) य

ह्या समीकरणान् भुनय ह पद आहे याची किमत लेख २५७ प्रमाणे
 ३ भुनय — ३ भुनय ही आहे दिवा गुणक ३ प'न' हा आहे. ह्याने गुणून
 ३ प'न' भुनय — ३ प'न' भुनय ह्या दोन्ही पदान् ३ प'न' भुनय आणि
 — ३ प'न' भुनय ही एकत्र केली तेव्हा ३ प'न' भुनय आणि — ३ प'न' भुनय
 हीं पदे तयार होतात तेव्हां.

— पभुनक्ष = — पभुनय + ३ प'न' भुनय + ३ प'न' भुनय
 — ३ प'न' भुनय —
 + ३ पदनभु (म + न) य + ३ पदनभु (म - न) य

आता भुनक्षची किमत पाहिजे. (१)

मक्ष — मय — पमभुनय.

भुनक्ष ला द हा द्वितीय पदवीचा गुणक आहे म्हणून मक्ष वरीलरीच्या पदान् पहिल्या
 पदवीपेक्षा जास्त गुणमनेची जरूर नाही म्हणून पमभुनय हे एकच पद पुरे आहे तेव्हा
 भुनक्ष — भु (मय — पमभुनय)

— भुमयकोभु (पमभुनय) — कोभुमयभु (पमभुनय).

— भुमय — ३ पमभु (म + न) य + ३ पमभु (म - न) य

तेव्हां.

— दभुनक्ष = — दभुनय + ३ पदनभु (म + न) य — ३ पदनभु (म - न) य
 (२)

आता

— तभुकक्ष — — तभुकय (३)

(१) (२) (३) ह्या किमती एकत्र केल्या

तेव्हां

क्ष = { य — पभुनय — दभुनय ३ प'न' भुनय
 — तभुकय + ३ प'न' भुनय — ३ प'न' भुनय
 ३ पद (म + न) भु (म - न) य ३ पद (म - न) भु (म - न) य
 (तिसरी पदवी) (त)

२६६. उच्चिल्ले समीकरण निसर्ग्या पदवी पर्यंत सोडविले आहे. आता ते
 समीकरण चवथ्या पदवी पर्यंत सोडवावयाचे आहे.

(त) समीकरणाच्या न नें गुणून त्याची भुज्या तिसऱ्या पदवी पर्यंत करावयाची

नक्ष = नय — स

भुनक्ष = - भु (नय - स) - भुनय कोभुस + कोभुनयभुस

भुस = पन भुनय + दन भुमय — $\frac{1}{2}$ प^१न^१भुर नय
 + तन भुकय | $\frac{2}{3}$ प^१न^१भुर नय — $\frac{2}{3}$ प^१न^१भुनय
 — $\frac{1}{2}$ पदन (म + न) भु (म + न)
 + $\frac{1}{2}$ पदन (म — न) भु (म — न) य.
 — $\frac{1}{2}$ प^१न^१ ($\frac{2}{3}$ भुनय — $\frac{1}{3}$ भुर नय)

प को भुनयभुस + $\frac{1}{2}$ प^१न^१भुर नय + $\frac{1}{2}$ पदन भु (म + न) य
 + $\frac{1}{2}$ पदन भु (म — न) य — $\frac{1}{2}$ प^१न^१भुर नय
 — $\frac{1}{2}$ प^१न^१भुनय + $\frac{1}{2}$ पतन भु (क + न) य
 + $\frac{1}{2}$ पतन भु (क — न) य + $\frac{1}{2}$ प^१न^१भुनय
 + $\frac{1}{2}$ प^१न^१भुर नय — $\frac{1}{2}$ प^१न^१भुर नय
 — $\frac{1}{2}$ पदन (म + न) भु (म + न)
 — $\frac{1}{2}$ पदन (म + न) भुमय.
 + $\frac{1}{2}$ पदन (म — न) भुमय
 + $\frac{1}{2}$ पदन (म — न) भु (म — न) य.
 — $\frac{1}{2}$ प^१न^१भुर नय + $\frac{1}{2}$ प^१न^१भुनय
 + $\frac{1}{2}$ प^१न^१भुर नय (१ व)

को भुस = १ — $\frac{1}{2}$ स^१

कोणत्याही अनेक पदात्मक राशीचा वर्ग हा ; प्रत्येक पदाचा वर्ग आणि प्रत्येक दोन पदाच्या गुणाकाराची दुप्पट याच्या बेरजेबरोबर असतो. तेव्हा

$\frac{1}{2}$ स^१ $\frac{1}{2}$ प^१न^१ भु^१ नय + पदन^१ भु मय भुनय — $\frac{1}{2}$ प^१न^१ भुर नय भुनय.

कोभुस = १ — $\frac{1}{2}$ प^१न^१ + $\frac{1}{2}$ प^१न^१ कोभुर नय
 — $\frac{1}{2}$ पदन^१ कोभु (म — न) य
 + $\frac{1}{2}$ पदन^१ कोभु (म + न) य.
 — $\frac{1}{2}$ प^१न^१ कोभुर नय + $\frac{1}{2}$ प^१न^१ कोभु नय

ह्या समीकरणास — पभुनय यांनी गुणिलें तेव्हा

$$\begin{aligned}
 - \text{पभुनय कोभुस} &= - \text{पभुनय} + \frac{1}{2} \text{प}^2 \text{न}^2 \text{भुनय} \\
 &- \frac{1}{2} \text{प}^2 \text{न}^2 \text{भुनय} + \frac{1}{2} \text{प}^2 \text{न}^2 \text{भुनय} \\
 &+ \frac{1}{2} \text{प}^2 \text{द} \text{न}^2 \text{भुमय} - \frac{1}{2} \text{प}^2 \text{द} \text{न}^2 \text{भु} (\text{म} + 2\text{न}) \text{य} \\
 &- \frac{1}{2} \text{प}^2 \text{द} \text{न}^2 \text{भु} (\text{म} + 2\text{न}) \text{य} + \frac{1}{2} \text{प}^2 \text{द} \text{न}^2 \text{भुमय} \\
 &+ \frac{1}{2} \text{प}^2 \text{न}^2 \text{भुनय} - \frac{1}{2} \text{प}^2 \text{न}^2 \text{भुरनय} \\
 &- \frac{1}{2} \text{प}^2 \text{न}^2 \text{भुरनय} \dots\dots (१ अ)
 \end{aligned}$$

$$\text{मक्ष} = \text{मय} - \text{स}$$

$$- \text{भुमक्ष} = - \text{भु} (\text{मय} - \text{स}) = - \text{भुमय कोभुय} + \text{स भुमयभुम.}$$

$$\begin{aligned}
 \text{कोभुस} &= १ - \frac{1}{2} \text{स}^2 = १ - \frac{1}{2} \text{प}^2 \text{म}^2 \text{भुनय} \\
 &= १ - \frac{1}{2} \text{प}^2 \text{म}^2 + \frac{1}{2} \text{प}^2 \text{म}^2 \text{कोभुरनय}
 \end{aligned}$$

ह्या समीकरणास — दभुमय यांनी गुणिलें, तेव्हा

$$\begin{aligned}
 - \text{दभुमक्ष} &= - \text{दभुमय} + \frac{1}{2} \text{प}^2 \text{द} \text{म}^2 \text{भुमय} \\
 &- \frac{1}{2} \text{प}^2 \text{द} \text{म}^2 \text{भु} (\text{म} + 2\text{न}) \text{य} \\
 &- \frac{1}{2} \text{प}^2 \text{द} \text{म}^2 \text{भु} (\text{म} - 2\text{न}) \text{य} \dots\dots (२ अ) \\
 \text{भुस} &= + \text{पमभुनय} + \text{दमभुमय} - \frac{1}{2} \text{प}^2 \text{मन} \text{भुरनय}
 \end{aligned}$$

ह्या समीकरणास + द कोभुमय यांनी गुणिलें, तेव्हा

$$\begin{aligned}
 + \text{दकोभुमयभुग} &= + \frac{1}{2} \text{प}^2 \text{दमभु} (\text{म} + \text{न}) \text{य} - \frac{1}{2} \text{प}^2 \text{दमभु} (\text{म} - \text{न}) \text{य} \\
 &+ \frac{1}{2} \text{प}^2 \text{दमभु} (\text{म} + \text{न}) \text{य} - \frac{1}{2} \text{प}^2 \text{दमनभु} (\text{म} + 2\text{न}) \text{य} \\
 &+ \frac{1}{2} \text{प}^2 \text{दमनभु} (\text{म} - 2\text{न}) \text{य} \\
 &\dots\dots\dots (२ ब)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{भुकक्ष} &= \text{भु} (\text{कय} - \text{पकभुनय}) \\
 &- \text{भुकय कोभु} (\text{पकभुनय}) - \text{कोभुकयभु} (\text{पकभुनय.}) \\
 &= \text{भुकय} - \text{कोभुकयपकभुनय} \\
 &= \text{भुकय} - \frac{1}{2} \text{पकभु} (\text{क} + \text{न}) \text{य} \\
 &+ \frac{1}{2} \text{पकभु} (\text{क} - \text{न}) \text{य.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 - \text{तमुक्ष} &= - \text{तभुकय} + \frac{1}{2} \text{पतकभु} (\text{क} + \text{न}) \text{य} \\
 &- \frac{1}{2} \text{पतकभु} (\text{क} - \text{न}) \text{य} \dots\dots\dots (३)
 \end{aligned}$$

— च भुगक्ष

— — च भु ग य

• • • • • (8)

यि - पभुनय - दभुमय + ३प^३नभुरनय

तभुक् य । १ प^१ न^२ भुनय ३ प^१ न^२ भुनय

† ३ पद (म । न) भु (म । न)

$\frac{3}{2}$ पद (म - न) भू (म - न) य.

— १५८१ भू२नय + १५८१ भू६नय

१- १६ दस भुमय

$\frac{1}{2} p^2 d$ (म + २न) $\frac{1}{2} b$ (म + २न) य

— १५३ (म - २३) १५३ (म - २३) य.

† १५५५ (क. १ न) भु (क. १ न)

इषत् (क-न) भु (क-न) य

$$+ \frac{1}{2} d_1 d_2 (m_1 + m_2) \mu_2 (m_1 - m_2) y$$

— $d_1 d_2 (m_1 - m_2)$ भु $(m_1 - m_2)$ य.

† ईद म भु (२ म) य - च भु ग य

[च व थि प द वी]

• •

प्रकरण नववें

वेग आणि वेगवृद्धि व त्यांची पृथःकरणे

२६७. ह्या प्रकरणांत गतिशास्त्राचे सिद्धान्त सिद्ध करून दाखविले आहेत. गति म्हणजे काय, तिचे मापन कसे करावे, परिमाण कोणते घ्यावे, इत्यादि विषयांचे उपपादन केले आहे. आकर्षणाच्या कार्याने पदार्थाच्या गतीवर परिणाम कम होतात व त्यायोगे पदार्थाचा गमन मार्ग कोणत्या आकाराचा होतो, त्या गमन मार्गाची दिशा कोणती होते हे येथे सोपपत्तिक वर्णिले आहे. पदार्थाचा गमनमार्ग पदार्थाचे चलन हे शब्द त्या पदार्थाच्या गुरुत्वमध्याला अनुसरून वापरले आहेत असे समजावे. पदार्थाचे अस्तित्व जर एकाच स्थानी असेल तर तो पदार्थ स्थीर आहे असे म्हणतात, एथे त्या पदार्थाचा गुरुत्वमध्य एकाच स्थानी आहे असे म्हणावे. यास्तव पदार्थाचे चलन किंवा गति त्याच्या गुरुत्वमध्याला अनुसरून वर्णिली असतात.

२६८. ज्या कारणाने स्थीर पदार्थास गति उत्पन्न होते, किंवा चल पदार्थाची गति वाढते अथवा कमी होते, त्या कारणाम प्रेरणा असे म्हणतात. गति म्हणजे चलन अथवा पदार्थाचे एका ठिकाणाहून दुसरे ठिकाणी जाणे. प्रेरणेने चल पदार्थाची गति नष्ट होते : किंवा त्याच्या गमनाची दिशा बदलते. प्रेरणेपासून उत्पन्न होणाऱ्या क्रियेचा अथवा कार्याचा शोध ज्या शास्त्रात केलेला असतो त्याला प्रेरणाशास्त्र म्हणतात. ह्या शास्त्राचे दोन भाग आहेत—(१) ज्या भागात स्थीर पदार्थावर प्रेरणेची स्थीर कार्ये कशी होतात ह्यांचा विचार असतो त्यास (स्थैर्योत्पादक प्रेरणाशास्त्र) म्हणतात ; आणि (२) ज्या भागांत, चल अथवा स्थीर पदार्थावर प्रेरणेची चल कार्ये कशी होतात ह्यांचा विचार असतो, त्याला 'गत्युत्पादक प्रेरणाशास्त्र' म्हणतात. प्रस्तुत ग्रंथाचा विषय ग्रह स्थान गणनेचा आहे. ग्रहाच्या गतीचे ज्ञान ज्ञाल्याशिवाय त्याच्या स्थानाचा निर्णय होत नाही म्हणून गतीचे मापन कसे करावे हा विषय गत्युत्पादक प्रेरणाशास्त्राचा आहे, त्याचे विवरण येथे करावयाचे आहे.

२६९. पदार्थातील बिंदूच्या स्थलांतराला 'गति' म्हणतात, आणि ती गति ज्या त्वरेची असेल त्या त्वरेला 'वेग' म्हणतात. जी गति विवक्षित कालात पदार्थाला (त्यातील बिंदूला) जास्त अंतर आक्रमण करावयास लावील त्या गतीचा वेग जास्त आहे असे म्हणावे, आणि कमी अंतर क्रमावयास लावील त्या गतीचा वेग कमी आहे असे म्हणावे. वेग दोन प्रकारचे आहेत—(१) समवेग आणि (२) विषमवेग. जो वेग कालाच्या प्रत्येक क्षणी नियमित परिमाणाचा असतो म्हणजे एका क्षणी एक तर दुसऱ्या क्षणी त्याहून भिन्न म्हणजे कमी किंवा जास्त असा नसतो त्या वेगास 'समवेग' म्हणतात ; आणि जो वेग कालाच्या प्रत्येक क्षणी जास्त किंवा कमी होतो त्याला 'विषमवेग' म्हणतात.

२७०. वाळाच्या एक परिमाणांत पदार्थां जें अंतर कमिले असेल, म्हणजे त्याचें जें स्थळान्तर झालें असेल त्या अंतराने, समवेग मापितात. दोन बिंदुमधील अंतर म्हणजे रेपा होय. वेग मापनाचें दर्शक रेपा होय. ज्याप्रमाणे उष्णता-मापक यंत्रात, किंवा भारमापक यंत्रात उष्णता किंवा हवेचा भार पारदस्तभाच्या उंचीने दाखवितात. एथे पारदस्तभाची उंची परिमेय नव्हे, तसेच काही अंशी वेग आणि अंतर याचा संबंध आहे. इंग्लिश ग्रंथकार कालाचा एक एक सेकंद हा मानितात आणि रेपेचा एक फूट मानितात. एक पदार्थ एका सेकंदांत १२ फूट चालतो, दुसऱ्या सेकंदातही १२ च फूट चालतो आणि ही त्याची चाल प्रतिक्षणें सारखी अशी आहे, असे जर असेल तर त्या पदार्थाचा वेग सम आहे आणि तो १२ फूट आहे, असें म्हणतात. पदार्थाचा वेग १२ फूट आहे. हे वाक्य शुद्ध आहे. पण पदार्थाचा वेग एका सेकंदात १२ फूट आहे असे वाक्य अशुद्ध होय. ह्या अशुद्ध वाक्याने अशी भावना उत्पन्न होणे की, $\frac{1}{2}$ सेकंदात त्या पदार्थाचा वेग ६ फूट आहे ती खरी नाही. सेकंदाचे नितीही तुकडे केले तरी प्रत्येक तुकड्यात त्या पदार्थाचा वेग १२ फूटच असतो. वेग आणि काल मापण्याचे एक ह्या शास्त्रांत फूट आणि सेकंद मानण्याचा सवने ठरलेला आहे. तथापि अति मोठ्या गतीचा वेग कालाच्या एक ह्या परिमाणान्तर म्हणजे एका सेकंदात फूटाने न दाखविता मील ह्या रेपा परिमाणाने दाखवितात. असे जारी आहेत तरी इच्छेप्रमाणे पण सूक्ष्म अशी दुसरी परिमाणे स्विकारली तर बघ्यात न्यूनत्व येणार नाही.

२७१. एका परिमाणु निर्धारित वेगाने चलत पाहत आहे, म्हणजे तो समान काल भागात समान अंतर करीत आहे. अर्थात् त्याचा वेग सम आहे. तो दर सेकंदात ग फूट चलत पाहत आहे म्हणजे त्याचा वेग ग फूट आहे. तो परिमाणु क सव्याक सेकंदात जे अंतर त्रमाल त्यास 'चाल' असे म्हणू. चाल ही च ह्या अक्षराने दाखवू तेव्हा वेग, चाल आणि चाल याचा एकमेकांशी असलेला संबंध चालच्या समीकरणाने दाखविला जातो :—

$$\begin{aligned} \text{चाल} &= \text{वेग} \times \text{काल} \\ \text{आणि} \quad \text{ग} &= \frac{\text{च}}{\text{क}} \end{aligned}$$

म्हणजे परिमाणूची चाल जितके फूट असेल त्या सव्याला त्या चालीस लागलेला काल क सेकंद, ह्या क सव्याने भागिले म्हणजे वेग येतो. ह्या रीतीने सम वेगाचे मापन करिता येतें. म्हणजे चाल दाखविणाऱ्या फूटास काल दाखविणाऱ्या सेकंदांनी भागिल्याने वेग येतो. हा सम वेग होय.

२७२. एथे वाचकांनी हे लक्षात ठेवावे की, वेग हे परिमेय नव्हे. ही भाव संख्या आहे. रुपयाला ४ पायली घाव्य मिळतें एथें ४ पायली भाव सांगितला, पण किमत

रुपया, आठ आणे, दोन रुपये वगैरे काही तरी किमतीने गुणिल्याशिवाय ते धान्य होत नाही. एक सेकंद संपून दुसरा सुरू होण्याचा जो क्षण, त्याला स्थिति आहे पण महत्त्व नाही. म्हणजे भूमितीत जसा बिंदु तसा चालू ह्या परिमेयात क्षण आहे. त्या क्षणी परमाणूच्या अंगी जी चळवळी शक्ति त्या दाबतीला वेग असं म्हणावयाचं. अर्थात त्या क्षणी वा परमाणू वेगाडतकें अंतर चालला नाही. परंतु त्या वेगानें तो एक सेकंदभर चालला तर त्या वेगाडतकें फूट चालेल. क्षणाला जर विचार नाही तर त्यात चळत होणेंच नाही. सम वेगान एका सेकंदातील चाल, आणि त्या सेकंदातल्या अनंत क्षणांपैकी प्रत्येक क्षणी असलेल्या वेग ही दोन्ही सारखीच असतात, म्हणून वेग व चाल यातील भिन्नत्व लक्ष्यांत येत नाही. यामाठी स्मरणात असावे की, वेग हा अंतर म्हणजे रेषा नव्हे, तथापि परमाणू त्या वेगाने एका सेकंदात नितकें अंतर आचरण करूं शकेल.

२७३. स्थीर वेगाचे मापन कसे करावे याचे विवरण वर केलें आहे. आता चाल वेग कसा मापवयाचा त्याचें विवरण करितो. चाल वेग हा प्रत्येक क्षणी सारखा नाही, त्याचें मापन कसे करावे ही अशक्यता वाटते. पण येथे असे मानिते आहे की, पदार्थाचा विविधन एकाद्या क्षणी जो वेग जसेल तो चालाच्या एका परिमाणाने सर्व क्षणी सारखा आहे.

वेग (चाल किंवा स्थीर) हा चालीच्या सूक्ष्मांशाचें कालाच्या सूक्ष्मांशाशी जे गुणोत्तर त्या गुणानुगुणवेधर असता. स्थीर वेगान ग — च अगते (कारण क — १ म्हणून ग = च × १) किंवा

$$ग = \frac{च}{क} = \frac{च}{१ \text{ सेकंद}}$$

कारण चाल ही एका सेकंदातील आहे. उजव्या पेट्यातील अपूर्णावाच्या अण छेदास न ह्या सख्येनें भागिले तर :

$$ग = \frac{च \div न}{१ \text{ सेकंद} \div न} = \frac{\frac{च}{न}}{\frac{१ \text{ सेकंद}}{न}}$$

ह्यातील न ही मध्य कोणतीही अमली तरी ग मध्ये काही बदल होत नाही. आता न ही संख्या अमर्याद मोठी मानिली तर

$$\frac{च}{न} = \text{चालीचा सूक्ष्मांश}$$

$$\frac{१ \text{ सेकंद}}{न} = \text{कालाचा सूक्ष्मांश}$$

सूक्ष्मांश गणिताच्या लेखनपद्धतिप्रमाणे

$$\frac{\text{सूच}}{\text{सूक}} = \text{वेग} = \text{ग.} \quad (१)$$

२७४. र्वार् वेगाचें मापन मापे आहे. चाल फुटात्मक घेऊन तिला सेकंदात्मक कालाने भागिले म्हणजे वेग येतो. वेग चल असला तर तो सप्रमाण पट्टीने ठरवावा लागतो. अशी कल्पना करू की कालाच्या अन्यक्षणी तो वेग ग, फूट हाता त्या क्षणानंतर कालाची वृद्धि Δ क इतकी झाली त्या क्षणी तो वेग ग, होतो, क कालाच्या अन्यक्षणी चाल च फूट आणि (क + Δ क) कालाच्या अन्यक्षणी (च + Δ च) फूट होतो. एव्हे Δ च ही चाल Δ क कालातली आहे. व ती कालाप्रमाणे वाढणारी आहे, त्याचप्रमाणे ठरले की, ग, वेगपेक्षां ग, वेग मोठा आहे.

Δ च ही चाल ग, Δ क पेक्षा लहान नाही आणि ग, Δ क पेक्षा मोठी नाही, Δ च हे गुणानंतर ग, पेक्षा लहान नाही आणि ग, पेक्षा मोठे नाही.

आता सूक्ष्मांश Δ क हा वास्तविक अतिसूक्ष्म अंग गानिशा तर Δ च चार्वाचा सूक्ष्मांश होईल आणि ग, व ग, हे वेग समान दार्याल अर्थात त्यामध्ये असेल्ल्या क कालाच्या अन्यक्षणीचा वेग ग हाईल त्याचरोबरीच हाईल. म्हणजे

$$ग_१ = ग = ग_२$$

$$\begin{array}{l} \text{आणि} \quad \frac{\Delta \text{ च}}{\Delta \text{ क}} \text{ हे गुणानंतर } \frac{\text{सूच}}{\text{सूक}} \text{ होईल म्हणून} \\ \frac{\text{सूच}}{\text{सूक}} = \text{वेग} = \text{ग} \end{array}$$

२७५. वेगाने दिशा आणि घनत्व, जड व हा पदार्थाचा सामावित्वक धर्म आहे तो धर्म असा की प्रत्येक पदार्थ कारणाशिवाय चलन पावत नाही. आणि चळ म्हणजे गतिमान पदार्थ वागणाजवळ स्थिर हात नाही म्हणजे पदार्थ हा गतिविषयी उदात्त असतो. त्याच्या कारणा गति दिशा तर तो गतिमान होतो, आणि तो गति कारण नाव केल्याशिवाय थांबत नाही.

परमाणु जर सगळ्या गतिने समन करील असेल तर त्याच्या गमनाची दिशा सर्व मार्गांत एकाच असेल परमाणूवर एकाच दिशा प्रेरणेचे कार्य घडेल तर त्या क्षणी त्याच्या जी गति उत्पन्न होईल, व ती ज्या दिशेची असेल त्याप्रमाणेच तो परमाणु त्याच गतिने व त्याच दिशेने सगळ्या समन करील परंतु त्यावर अन्य प्रेरणेचे कार्य घडत असेल तर आणि ते कार्य पूर्वीच्याच दिशेने घडेल तर त्या परमाणूची गति वाढेल किंवा कमी होईल परंतु दिशा भिन्न होणार नाही. परमाणूवर एकाच दिशा प्रेरणाची कार्ये घडत आहेत आणि त्या दोन्ही प्रेरणाच्या दिशा भिन्न आहेत, तर त्या

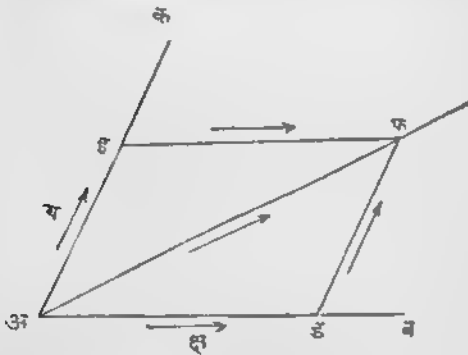
परमाणूचें गमन कोणत्या दिशेनें किती परिमाणाचे होईल हे ठरवितां येतें. प्रेरणा म्हणजे अचिंत हिच्याची तिजपासून उत्पन्न झालेला वेग समप्रमाणात असता, प्रेरणा आणि वेग ह्या दोहीला परिमाण आणि दिशा ह्यांची आवश्यकता असते. दोन प्रेरणांच्या संयोगाने जी प्रेरणा उत्पन्न होते तिला त्या दोन प्रेरणांची फलित प्रेरणा म्हणतात. प्रत्येक सरळ रेषा स्वतःची लांबी आणि दिशा यांनी युक्त असते, त्या-प्रमाणेच प्रेरणा आणि वेग ही दोन्हीही महत्त्व आणि दिशा यांनी युक्त असतात. या साम्यामुळे प्रेरणा किंवा वेग ही आम्हीं रेषानी दाखवितो.

२७६. एका परमाणूवर दोन प्रेरणा कार्य करितात, त्याची कार्ये एकाच सरळ रेषेत नाहींत, कांही कोनानें कार्य करतात. तर त्या परमाणूचें गमन कोणत्या दिशेनें आणि किती परिमाणाचे होईल हें ठरवावयाचें

उदाहरणार्थ, अ हा एक बिंदु आहे (परमाणूचें स्थान बिंदूनेच दाखवावें जातें) ह्यावर अत्र अक ह्या दोन दिशांनी क्ष आणि य ह्या दोन प्रेरणा कार्य करतात. तर त्या दोन प्रेरणांचे एकत्र कार्य किती परिमाणाचे होईल, व ते कोणत्या दिशेने होईल हें ठरवावयाचें ह्या एकत्र कार्यास फलित प्रेरणा म्हणतात.

एथे आपणाला प्रेरणेच्या कार्याचा विचार करावयाचा आहे; प्रेरणेचे कार्य म्हणजे त्या प्रेरणेपासून उत्पन्न होणारा वेग होय, वेगाचें लग्न प्रेरणेप्रमाणान्न सरळ रेषेनें करतात. सरळ रेषेने वेगाचें महत्त्व आणि दिशा कळते. वेग ज्या परिमाणाचा असेल तत्पारिमाण रेषा परिमाणाची रेषा तो वेग दाखविण्यास ध्यावी.

क्ष आणि य ह्या वेगांचे प्रमाण ३ : २ आहे तें त्यापासून उत्पन्न होणारे वेग ३ : २



ह्याच प्रमाणात असले पाहिजेत. अ बिंदूवर ह्या दोन प्रेरणा बरक कोनाने कार्य करतात म्हणजे क्ष प्रेरणा अत्र दिशेने आणि य प्रेरणा अत्र दिशेने कार्य करिते. तेव्हां एका काल विभागात अ बिंदु अत्र रेषेने अड इतका जाईल आणि अत्र रेषेने अड इतका जाईल अर्थात तो

अत्र दिशेने जाईल. एथे अशी कल्पना करा की, क्ष ह्या दोन प्रेरणांपैकी य प्रेरणा प्रथम स्तमित ठेवू, तेव्हा अ बिंदु क्ष प्रेरणेने ड स्थानी आला, नंतर क्ष प्रेरणा स्तमित ठेवू आणि य प्रेरणेचे कार्य सुरू करू. हें कार्य अत्र दिशेचें असल्यामुळे

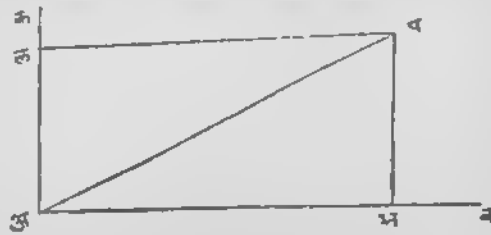
ड पासून अक दिशेशी समांतर दिशेनेच अ विदू जाईल आणि तो अई इतकाच जाईल. म्हणजे तो फ विदूत जाईल. अफ इफ विदू माघले तर अइ डफ आणि अड इफ म्हणून अइफड हा समांतर भुज चौकोन आहे, व अफ त्याचा कर्ण आहे.

जोपर्यंत प्रेरणांचे गुणोत्तर ३ : २ आहे तोपर्यंत कोणत्याही लहान किंवा मोठ्या काल विभागांत जो समांतर भुज चौकोन होईल त्याचा कर्ण अफ च्या बाहेर पडणार नाही. ह्यावरून असा सिद्धांत सिद्ध होतो की, एका "विदुवर दोन प्रेरणा काही कोनाचे कार्य करीत असतील तर त्या प्रेरणांच्या दिशात आणि त्या प्रेरणांच्या परिमाणाच्या प्रमाणात दोन सगळ रेखा घेऊन समांतर भुज चौकोन पुरा केला असता त्याच्या कर्णावरील त्या दोन प्रेरणांची फलित प्रेरणा असते, व कर्णाची जी दिशा तीच त्या फलित प्रेरणेची दिशा असते." ह्या सिद्धान्तांत जो समांतर भुज चौकोन वर्णिला आहे त्याला 'प्रेरणा समांतर भुज चौकोन' म्हणतात. तसेच वरच्या समांतर भुज चौकोनाच्या सिद्धांमध्ये अ विदुचे चलन अ पासून ड पर्यंत आणि ड पासून फ पर्यंत असे प्रत्येक प्रेरणेचे कार्य निरनिराळे घेतल्याने आलेल्या दोन रेखा आणि फलित प्रेरणा अफ ही तिसरी रेखा अशा तीन रेखांनी अडक त्रिकोण बनला आहे त्याला प्रेरणा-त्रिकोण म्हणतात. प्रेरणा त्रिकोणाचा सिद्धान्त असा आहे की, 'त्रिकोणाच्या तीन कोनांपैकी कोणत्याही कोनाची एक बाजू ही दुसऱ्या दोन बाजूंची फलित प्रेरणा असते.' वरच्या अडक त्रिकोणात अ कोन घेतल्यास अड आणि डफ ह्यांची फलित प्रेरणा अफ आहे; ड कोन घेतल्यास डफ आणि फअ ह्यांची फलित प्रेरणा डअ ही आहे. किंवा डअ आणि अफ ह्यांची फलित प्रेरणा डफ आहे.

२७७. विवक्षित वेगाचे पृथक्करण एकमेकींवर लव अशा दोन दिशात करावयाचे

अप ही रेखा ग वेगाची दिशा आणि महत्त्व दाखविते. तो वेग अब दिशेन किती होईल, म्हणजे किती परिमाणाचा विचा केवड्या महत्त्वाचा होईल, आणि अब वर लव अशा एक दिशेन किती परिमाणाचा म्हणजे किती महत्त्वाचा होईल हे ठरवावयाचे.

एथे अब ची दिशा दिलेली आहे, ती अप च्या दिशेशी पअब कोन करिते. म्हणजे पअब कोन दिलेला आहे. हा कोन ब ह्या अक्षराने दाखवूं.



आता आपणाम अप वेगाचे पृथक्करण करावयाचे आहे म्हणजे हा वेग ज्या दोन वेगांच्या संयोगाने झालेला आहे ते दोन वेग निरनिराळे करावयाचे आहेत. आणि त्या वेगांच्या दिशा एकमेकींवर लव असल्या पाहिजेत. त्यापैकी एका प्रेरणेची अब दिशा ज्ञात आहे.

तेव्हा वरच्या लेखाप्रमाणे वग वेगाचे पृथक्करण वड, वक रेयांच्या परिमाणाचे होईल. क्ष अक्षाशी समानर वड आहे, य अक्षाशी समानर वक आहे. गवड हा कोन क्ष अक्षाशी वग वेगाने केला आहे त्यास व डे नाव देऊ तेव्हा :

$$\text{लम} = \text{वड} = \text{वग} \times \text{कोमुब} = \text{ग कोमुब} \quad (१)$$

$$\text{नर} = \text{वक} = \text{वग} \times \text{कोमु} (९०^\circ - \text{व}) = \text{गमुब} \quad (२)$$

य विदूचे अन्योन्य लंब भुज (क्ष, य) हे आहेत.

$$\text{क्ष} = \text{अल} = \text{नव} \text{ आणि } \text{य} = \text{अन} = \text{लव.}$$

आता वड हा नव चा म्हणजे क्ष भुजाचा अंश आहे, नगाच वक हा लव चा म्हणजे य भुजाचा अंश आहे, आणि वग हा य विदूच्या चालीचा अंश आहे. वग हा चालीचा गृध्माश रात्रिदिश नर (कारण वेग हा चालीचा गृध्माश असतो) वड हा क्ष भुजाचा गृध्माश होईल आणि वक हा य भुजाचा गृध्माश होईल. तेव्हा त्रिकोणाभित्तीच्या लक्षणावरून—

$$\text{कोमुब} = \frac{\text{वड}}{\text{वग}} = \frac{\text{गृध्म}}{\text{सूच}}$$

$$\text{मुब} = \frac{\text{वक}}{\text{वग}} = \frac{\text{सूय}}{\text{सूच}}$$

ह्या किमती समीकरण (१) व (२) यांत ठेविल्या तेव्हा

$$\text{क्ष अक्षाच्या दिशेत वेग} = \text{ग कोमुब} = \text{ग} \frac{\text{गृध्म}}{\text{सूच}}$$

$$\text{य अक्षाच्या दिशेत वेग} = \text{ग मुब} = \text{ग} \frac{\text{सूय}}{\text{सूच}}$$

$$\text{परंतु वेग} = \text{ग} = \frac{\text{सूच}}{\text{सूक}} \text{ लेख २७३, २७४.}$$

म्हणून

$$\text{ग वेगाचे पृथक्करण अक्ष दिशेत} \quad \frac{\text{सूच}}{\text{सूक}} \times \frac{\text{गृध्म}}{\text{सूच}} = \frac{\text{गृध्म}}{\text{सूक}} \quad (१)$$

$$\text{ग वेगाचे पृथक्करण अक्ष दिशेत} \quad \frac{\text{सूच}}{\text{सूक}} \times \frac{\text{सूय}}{\text{सूच}} = \frac{\text{सूय}}{\text{सूक}} \quad (२)$$

२७१. पदार्थाच्या गतीसंबंधाने काही विज्ञान अनुमान आणि अनुभव यांची सिद्ध झालेले आहेत. त्याचा उपयोग प्रत्यक्ष प्रमाणासारखा जागोजाग करता लागतो. यासाठी ते सिद्धांत खाली देतो.

मिद्धानं (१) प्रत्येक परमाणु आपल्या स्थितिविषयी उदासीन असतो. ह्यातील 'स्थितिविषयी उदासीन' या शब्दाचा अर्थ असा की, जी स्थिति असेल तिचा त्याग न करणे. परमाणु स्थीर असेल तर ती स्थिरता न सोडणे. तसेच परमाणु गतियुक्त असेल तर त्या गतीचाही त्याग न करणे. इनकेच नव्हे तर त्या गतीत काहीमुद्धा फरक न करणे, म्हणजे कम जास्त न करणे आणि ज्या गतीत तो आहे त्या गतीची जी दिशा त्या दिशेतही बदल न करणे. अशा स्थितिविषयी उदासीन ह्या शब्दाचा अर्थ आहे.

मिद्धान (२) प्रेरणेने परमाणूच्या गतीत जो फरक होतो तो त्या प्रेरणेची प्रमाणात असतो. आणि तो फरक ती प्रेरणा ज्या दिशेने कार्य करीत असेल त्या दिशेचा असतो.

'प्रेरणेचे प्रमाण' ह्या दोन शब्दाचा जो अर्थ आहे त्यावरून असे दिसून येते की, प्रेरणेचे मापन करिता येते. प्रेरणा हे परिमेय आहे, अर्थात हे परिमेय मापनास परिमाण पाहिजे. याचे येथे दिग्दर्शन करितो.

अवकाश.—प्रत्येक पदार्थ काही तरी जागा व्यापितो, जी जागा व्यापितो निला त्या पदार्थाचा अवकाश म्हणतात. अवकाशाचे मापन घनफूट, घनइंच अशा घन-परिमाणांनी करितात.

घनता किंवा दाढ्य —निरनिराळे पदार्थ एक एक घनफूट घेतले तर त्यात काही पदार्थांचे परमाणु जास्त तर काहींचे कमी असतात. यास्तव विवक्षित पदार्थांची घनता एक मानून त्याच्याशी तुलनेने इतर पदार्थांची घनता अमुक परिमाणे असे ठरविलेले आहे.

प्रकृत्यश.—प्रकृत्यशाची मोजणी वजनाने होते. विवक्षित पदार्थांच्या घनतेचा एक आणि अवकाशाचा एक यांनी युक्त जो प्रकृत्यशाचा भाग त्याला प्रकृत्यशाचा एक म्हणतात.

प्रेरणा.—प्रेरणा म्हणजे परमाणूला गतिमान करणारे कार्य. प्रेरणेचे परिमाण असे आहे की, कालाच्या ठराविक अशा एक परिमाणाने, प्रकृत्यशाच्या एक परिमित पदार्थास, अत्राचा एक इतके चलन जी प्रेरणा देईल त्याला प्रेरणेचा एक म्हणावे.

प्रत्येक प्रेरणा, नेहमी निच्याशी समान आणि विरुद्ध अशा प्रेरणेचा प्रतिकार करणारी असते. (एथे प्रेरणा हा शब्द तिच्या कार्याच्या अर्थी घोजिला आहे.)

परमाणूंचे वकरेपेने गमन

२८०. एक परमाणु सरळ रेषेने स्थीर अथवा चल वेगाने गमन करीत आहे. याप्रमाणे गमन करीत असता एकदम त्याला आकर्षण करणारा पदार्थ, त्याच्या गमनाची जी सरळ रेषा आहे तिला सोडून तिच्या बाहेर उत्पन्न झाला तर त्या पदार्थाची प्रेरणा त्या परमाणूवर कार्य करू लागेल. पण ह्या कार्याने त्या परमाणूची जी सरळ

रेपेने जाण्याची क्रिया ती सोडावी लागून प्रतिक्षणी त्या आकर्षक पदार्थाकडे जाण्याची क्रिया करावी लागेल. ही क्रिया प्रतिक्षणी घडत असल्यामुळे त्या परमाणूस गमनाचा सरळ रेखात्मक मार्ग सोडून वक्ररेपेने गमन करावे लागते. त्या आकर्षक पदार्थाच्या प्रेरणेचे कार्य, आकर्षक पदार्थ आणि गमन करणारा परमाणू यांमधील अंतर सतत सारखे राहील असे असेल तर त्या परमाणूचा गमन मार्ग वर्तुळाकार होईल. आकर्षक पदार्थाच्या प्रेरणेची दिशा आणि गमन करणाऱ्या परमाणूची दिशा, परमाणूच्या स्थान-भेदे कडून भिन्न भिन्न होऊ शकतात. त्यामुळे प्रेरणेचे कार्य भिन्न भिन्न होऊ शकते, दान्ही दिशामध्ये काटकोन असून तो सतत राहणारा असेल तर गमन मार्ग वर्तुळ होतो, तिर्यक्कोण असेल तर गमनमार्ग निरनिराळ्या वक्ररेपाचे होतात. ह्या वक्र-रेपात्मक गमन मार्गाचा विचार आपणाला करावयाचा आहे.

२८१. एक विदु एका पातळीत वक्ररेपेने गमन करित आहे, त्याच्या विवक्षित क्षणीच्या वेगाचे पृथक्करण चलत्रिज्या आणि तिर्यक्कलब अशा दोन दिशांत करावयाचे.

तपन हा एका परमाणूचा वक्ररेपात्मक गमन मार्ग आहे. त्यात प हा परमाणू आहे, प परमाणू म्हणजे विदु आहे, प विदूचे (क्ष, य) हे भुज कोटी आहेत, अक्ष आणि अय हे त्या भुज कोटीचे अक्ष आहेत. हे अक्ष असे स्वीकारले आहेत की, अक्ष अय ह्या अक्षाचा प्रस्थापित विदु अ आहे तो असा ठरविला आहे की, प परमाणूवर जी आकर्षक प्रेरणा आहे त्या प्रेरणेचे कार्य अ विदूतून घडत आहे अर्थात अप ही प परमाणूच्या तपन ह्या वक्ररेपात्मक गमन मार्गाची चलत्रिज्या आहे. ती र अक्षराने दाखविली आहे. पअ चलत्रिज्येने अक्ष अक्षाशी प अक्ष - ब कोन केला आहे. पअ चलत्रिज्या म्हणजे र, आणि ब कोन ही प विदूची अक्षीय निर्णायक आहेत आणि अक्ष रेपा हाच त्या निर्णायकाचा अक्ष आहे. प विदूयामून अक्षवर पम लव केला. तेव्हा

$$\text{क्ष} = \text{अम आणि य} = \text{पम}$$

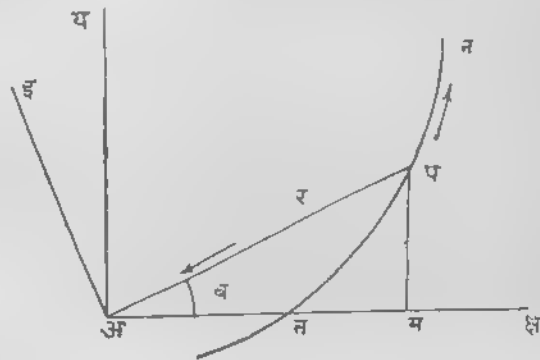
तसेच

$$\text{क्ष} = \text{र कोसुव}$$

$$\text{य} = \text{र सुव}$$

ह्या प्र मा णे
अन्योन्य लंब भुज
निर्णायकें (क्ष, य)
आणि अक्षीय
निर्णायकें (र, ब)
यांचा अन्योन्यसंबंध
पूर्वी ठरविला आहे.

विवक्षित कालाच्या क्षणी प चा वेग ग आहे.



विवक्षित ग वेगाचें पृथःकरण अन्योन्य लंब भुजाशी समांतर दिशांत कशा स्वरूपात येते तें लेख २७८ मध्ये दाखविले आहे, ती दोन्ही समीकरणें खाली लिहिली आहेत :—

$$\text{ग वेगाचें पृथःकरण अक्ष दिशेंत} = \frac{\text{सूक्ष्म}}{\text{सूक्ष्म}} \dots\dots\dots (१)$$

$$\text{ग वेगाचें पृथःकरण अय दिशेंत} = \frac{\text{सूक्ष्म}}{\text{सूक्ष्म}} \dots\dots\dots (२)$$

ही पृथःकरणे लंबभुज क्ष य याच्या दिशेंतली आहेत ती त्याच दिशेंत पण (र, ब) च्या स्वरूपाची करू. काल हे विकारीपद असे क्ष य ह्या संचयाचें आहे तसे ते र, ब चेही आहे. आणि

$$\text{क्ष} \quad \text{अम} = \text{र कोभुज} \dots\dots\dots (१)$$

$$\text{य} = \text{पम} \quad \text{र भुज} \dots\dots\dots (२)$$

ह्या दोन्ही समीकरणाचे कालानुवर्ती सूक्ष्मांशगुण काढिले. ते असे—
र आणि ब हे दोन्ही कालाचे संचय आहेत म्हणजे कालाच्या एक परिमाणात जो वेग त्याचे संचय आहेत.

दोन संचयाच्या गुणाकाराचा सूक्ष्मांशगुण लेख २०१ (४) मध्ये जी रीति लिहिली आहे त्याप्रमाणें काढितां येतो. ती रीति अशी—

दोन संचयाच्या गुणाकाराचा सूक्ष्मांशगुण हा, प्रत्येक संचयाच्या सूक्ष्मांश गुणास तदिवर संचयाने गुणून जे गुणाकार येतील त्या गुणाकाराच्या वेरजेबरोबर असतो.

ह्या रीतीप्रमाणे क्ष चा सूक्ष्मांशगुण हा, क्ष — र × कोभुज आहे म्हणून र च्या सूक्ष्मांशगुणास कोभुजने गुणावयाचे आणि कोभुजच्या सूक्ष्मांश गुणास र नें गुणावयाचे व दोन्ही गुणाकारांची बेरीज करावयाची.

$$\frac{\text{सू (कोभुज)}}{\text{सूक्ष्म}} = \text{— भुज, ह्यातील ब कचा संचय आहे,}$$

म्हणून

$$\frac{\text{सू (कोभुज)}}{\text{सूक्ष्म}} \dots \frac{\text{सू (कोभुज)}}{\text{सूक्ष्म}} \times \frac{\text{सूक्ष्म}}{\text{सूक्ष्म}} = \text{— भुज} \frac{\text{सूक्ष्म}}{\text{सूक्ष्म}}$$

आणि

$$\text{र} \times \frac{\text{सू (कोभुज)}}{\text{सूक्ष्म}} = \text{— रभुज} \frac{\text{सूक्ष्म}}{\text{सूक्ष्म}}$$

तेव्हा

$$\frac{\text{सूक्ष्म}}{\text{सूक्ष्म}} = \text{कोभुज} \frac{\text{सूक्ष्म}}{\text{सूक्ष्म}} - \text{रभुज} \frac{\text{सूक्ष्म}}{\text{सूक्ष्म}} \dots\dots\dots (३)$$

तसेच

$$\frac{\text{सूक्ष्म}}{\text{सूक्ष्म}} = \text{भुज} \frac{\text{सूक्ष्म}}{\text{सूक्ष्म}} + \text{र कोभुज} \frac{\text{सूक्ष्म}}{\text{सूक्ष्म}} \dots\dots\dots (४)$$

२८२. प विदूच्या वेगाचे पृथःकरण अक्षीय निर्णायकाच्या किंमतीने निघाले आहे. पण ते पृथक वेग अक्ष अय यांच्या दिशातील म्हणजे त्या दिशाशी समांतर दिशातील आहेत, ते आपणाम चलत्रिज्येच्या दिशेतील व तिजवर लब असलेल्या दिशातील आणावयाचे आहेत. वेगाचे एकमेकीवर लब दिशेत पृथःकरण करावयाचे असता त्या वेगाम पृथग्भूत दिशांच्या कोनाच्या कोभुज्येने गुणिल्याने पृथःकरण होते. चलत्रिज्येची दिशा क्ष अक्षाशी व अशाचा किंवा व वृत्तपरिमाणाचा कोन करिते आणि चलत्रिज्येवर लब दिशा म्हणजे अई दिशा क्षअई कोन करिते म्हणजे (९०° | ब) एवढा कोन करिते याच्या कोभुज्येने अक्ष दिशेतील वेगाम गुणिले म्हणजे त्याचे पृथःकरण चलत्रिज्येच्या दिशेत आणि तिजवर लब अया दिशेत

होईल. अक्ष दिशेतील वेग $\frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूक}}$ हा आहे, लेख २८१ समीकरण (१). तेव्हा

$$\text{चलत्रिज्येशी समांतर दिशेत वेग} = \text{कोभुज} \frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूक}} \dots\dots (५)$$

$$\text{चलत्रिज्येवर लब दिशेत वेग} = - \text{सुब} \frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूक}} \dots\dots (६)$$

२८३. वर क्ष अक्षाशी समांतर असलेल्या वेगाचे इष्ट दिशात पृथःकरण केले त्याप्रमाणेच य अक्षाशी समांतर असलेल्या वेगाचे त्याच दिशेत पृथःकरण करावयाचे आहे. यास्तव त्या इष्ट दिशा य अक्षाशी जे कोन करतील त्याच्या कोभुज्यानीं $\frac{\text{सूय}}{\text{सूक}}$ या वेगस गुणावयाचे. य अक्षाची दिशा अय ही चलत्रिज्येशी पअय कोन करिते म्हणजे (९०° — व) कोन करिते, या कोनाची कोभुज्या म्हणजे व कोनाची भुज्या होय. म्हणून भुज $\frac{\text{सूय}}{\text{सूक}}$ हा चलत्रिज्येशीं समांतर असा अय दिशेतील वेगाचा पृथग्भूत भाग होय. चलत्रिज्येवर लब दिशा अई ही अय अक्षाशी ईअय कोन करिते, पण हा कोन व कोनावरोबर आहे. म्हणून कोभुज $\frac{\text{सूय}}{\text{सूक}}$ हा चलत्रिज्येवर लब असणाऱ्या दिशेतील $\frac{\text{सूय}}{\text{सूक}}$ ह्या वेगाचा पृथग्भूत भाग आहे. म्हणजे

$$\text{चलत्रिज्येशी समांतर दिशेत वेग} = \text{भुज} \frac{\text{सूय}}{\text{सूक}} \dots (७)$$

$$\text{चलत्रिज्येवर लब दिशेत वेग} = \text{कोभुज} \frac{\text{सूय}}{\text{सूक}} \dots (८)$$

वरच्या लेखातील समीकरण (५) व (६) ह्या समीकरणांत क्ष अक्षाशी समांतर अशा वेगाचे पृथग्भाग ते समीकरण (७) व (८) ह्यांतील क्ष अक्षाशी समांतर अशा पृथग्भागांत अनुक्रमे मिळविले तेव्हां

$$\text{चलत्रिज्येशी समांतर वेग} = \text{कोभुव} \frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूक}} + \text{भुव} \frac{\text{सूय}}{\text{सूक}} \dots\dots\dots (९)$$

$$\text{चलत्रिज्येवर लंब दिशेंत वेग} = - \text{भुव} \frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूक}} + \text{कोभुव} \frac{\text{सूय}}{\text{सूक}} \dots\dots (१०)$$

ह्या समीकरणांत जो $\frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूक}}$ आणि $\frac{\text{सूय}}{\text{सूक}}$ ही दोन पदे आहेत, त्याच्या जागी त्याच्या-बरोबर अमलेल्या किंमती समीकरण (३) व (४) मध्ये तयार केल्या आहेत त्या ठेवू. त्याची योजना अशी,

$$\text{कोभुव} \frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूक}} = \text{कोभुव} \frac{\text{सूर}}{\text{सूक}} - \text{रभुव कोभुव} \frac{\text{सूव}}{\text{सूक}}$$

$$\text{भुव} \frac{\text{सूय}}{\text{सूक}} = \text{भुव} \frac{\text{सूर}}{\text{सूक}} + \text{रभुव कोभुव} \frac{\text{सूव}}{\text{सूक}}$$

समीकरण (९) मध्ये ह्या दोन समीकरणांची बेरीज आहे.

$$\begin{aligned} \text{चलत्रिज्येशी समांतर वेग} &= (\text{कोभुव} + \text{भुव}) \times \frac{\text{सूर}}{\text{सूक}} \\ &= \frac{\text{सूर}}{\text{सूक}} \dots\dots\dots (११) \end{aligned}$$

$$\text{आणि} - \text{भुव} \frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूक}} = - \text{भुव कोभुव} \frac{\text{सूर}}{\text{सूक}} + \text{रभुव} \frac{\text{सूय}}{\text{सूक}}$$

$$\text{कोभुव} \frac{\text{सूय}}{\text{सूक}} = \text{भुव कोभुव} \frac{\text{सूर}}{\text{सूक}} + \text{रकोभुव} \frac{\text{सूव}}{\text{सूक}}$$

समीकरण (१०) मध्ये ह्या दोन समीकरणांची बेरीज आहे. म्हणून

$$\begin{aligned} \text{चलत्रिज्येवर लंब दिशेंत वेग} &= - \text{र} (\text{भुव} + \text{कोभुव}) \frac{\text{सूव}}{\text{सूक}} \\ &= - \text{र} \frac{\text{सूव}}{\text{सूक}} \dots\dots\dots (१२) \end{aligned}$$

बेरीजत $(\text{भुव} + \text{कोभुव})$ हे पद उत्पन्न होतें पण त्याची किंमत १ असते.

२८४. जो वेग प्रतिक्षणी बदलत असतो त्याला चल वेग म्हटले आहे. चल वेग प्रतिक्षणी वाढत असेल किंवा कमी होत असेल, त्या वाढीला किंवा क्षयाला आपण वेगवृद्धि असें एकच नाव देऊ. ज्यावेळी वेगवृद्धीने वेग वाढत असेल, तेव्हा ती वेगवृद्धि धन आहे असें म्हणून ती + ह्या चिन्हाने दाखवू, आणि ज्यावेळी वेगवृद्धीने वेग

कमी होत असेल, तेव्हा ती वेगवृद्धि ऋण आहे असे म्हणू आणि ती ह्या चिन्हातून दाखवू. वेगवृद्धि दाखविण्यास ध हें चिन्हाक्षर योजू.

२८५. विवक्षित क कालाच्या अत्यक्षणी एका परमाणूच्या ग हा वेग होता, हा काल अल्पांशाने वाढवून क Δ क झाला तर वेगही Δ म ह्या अल्पांशाने वाढेल म्हणजे तो ग $+$ Δ ग हा होईल. Δ क ह्या काल विभागाच्या आरंभी वेगवृद्धि ध, परिमाणानी होती व त्याच काल विभागाच्या अंती वेगवृद्धि ध होती असे घेऊ. ह्यावरून Δ क ह्या काल विभागातून मिळण्याची क्षणीची वेगवृद्धि व, पेशा कमी तसून जास्त होती आणि ध, पेशा जास्त तसून कमी होती अशीच असली पाहिजे. ती ध आहे असे घ्या. Δ क ह्या काल विभागात वेग ग चा ग $+$ Δ ग झाला, म्हणजे वाढ Δ ग जाली, ही वाढ वेगवृद्धि Δ क $+$ ग, ह्या पेशा कमी नाही, आणि Δ क $-$ ध, ह्यापेशा जास्तही नाही. म्हणजेच Δ ग ही वेगवृद्धि Δ क \times ध, पेशा कमी नाही, आणि Δ क \times ध, पेशा जास्त नाही.

Δ ग
 Δ क हे गुणोत्तर ध, " " " " ध, " " "

आता Δ क हा काल विभाग अत्यंत सूक्ष्म मानांश तर तो कालाचा सूक्ष्मांश होईल आणि Δ ग हा वेगाचा सूक्ष्मांश होईल तेव्हा $\frac{\Delta \text{ग}}{\Delta \text{क}} = \frac{\text{सुग}}{\text{सूक}}$ होईल, आणि ध, व ध, ह्या वेगवृद्धि समान होतील, अर्थात त्याच्या मध्यमार्गी असलेली वेगवृद्धि ध ही मुळां ध, व ध, यांच्याबरोबर होईल. म्हणून

$$\frac{\text{सुग}}{\text{सूक}} = \text{व} \dots \dots \dots (१३)$$

कालाच्या वाढीने वेग वाढत असेल तर ध चे चिन्ह (धन) होईल, आणि कालाच्या वाढीने वेग कमी होत असेल तर ध चे चिन्ह (ऋण) होईल.

२८६. पूर्वी सिद्ध केले आहे की, वेग हा, आरंभच्या सूक्ष्मांशाने कालाच्या सूक्ष्मांशाशी होणाऱ्या सूक्ष्मांश गुणोत्तराबरोबर असतो. लेख २७४ पहा. म्हणजे

$$\frac{\text{सूच}}{\text{सूक}} = \text{ग}$$

ह्या समीकरणाचे दोन्ही पेट्यांचे शून्यलब्धिगुण म्हणजे सूक्ष्मांशगुण केले तर

$$\frac{\text{सू-च}}{\text{सूक}^२} = \frac{\text{सुग}}{\text{सूक}}$$

$$\text{पण } \frac{\text{सुग}}{\text{सूक}} = \text{व असे सिद्ध केले आहे. म्हणून}$$

$$\frac{\text{सू-च}}{\text{सूक}^२} = \text{व} \dots \dots \dots (१४)$$

२८७. एक परमाणु एकाच पातळीत अगलेल्या धक्केंपात्मक मार्गाने गमन करीत आहे, आणि त्याचा वेग चला आहे, तर त्याच्या वेगवृद्धीचें पृथक्करण चल-त्रिज्येच्या दिशेत आणि चलत्रिज्येवर लंब असणाऱ्या दिशेत, अर्थात् त्या दिशाशी समांतर असणाऱ्या दिशेत करावयाचें.

विवक्षित क्षणी नो परमाणु ज्या बिंदूत आहे त्या बिंदूची अन्योन्य लवभुज निर्णायिके (क्ष, य) आहेत, आणि अक्षीय निर्णायिके (र, व) ही आहेत. याचा एकमेकांशी जो संबंध आहे तो अनेक वेळा दाखविलेला आहे. लेख २८१ पहा, आणि त्याच लेखातील आकृति पहा.

वेगाचे कालानुवर्ती जे गुंथमागुगोत्तर असेल तीच वेगवृद्धि असते. असे वर मिळू केले आहे क्ष अक्षाची समांतर वेग $\frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूक}}$ या वेगाबरोबर असतो. आणि

वेगवृद्धि $\frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूक}}$ या बरोबर असते. ह्याप्रमाणेच य अक्षाशी समांतर वेग $\frac{\text{सूय}}{\text{सूक}}$ ह्या

बरोबर असतो, म्हणून य अक्षाशी समांतर वेगवृद्धि $\frac{\text{सूय}}{\text{सूक}}$ या बरोबर असते.

$$\text{क्ष अक्षाशी समांतर वेगवृद्धि} = \frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूक}} \dots\dots\dots (\text{अ})$$

$$\text{य अक्षाशी समांतर वेगवृद्धि} = \frac{\text{सूय}}{\text{सूक}} \dots\dots\dots (\text{ब})$$

ह्यांपैकी (अ) वेगवृद्धीला कोभुज ने आणि (ब) वेगवृद्धीला भुज ने गुणून दोन्ही गुणाकाराची बेरीज केली म्हणजे चलत्रिज्येची समांतर वेगवृद्धि होईल, आणि (अ) वेगवृद्धीला —भुजने गुणून आणि (ब) वेगवृद्धीला कोभुज ने गुणून दोन्ही गुणाकाराची बेरीज केली म्हणजे चलत्रिज्येवर लंब रूप असा दिशेत वेगवृद्धि येईल. म्हणजे

$$\text{चलत्रिज्येची समांतर वेगवृद्धि} = \text{कोभुज} \frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूक}} + \text{भुज} \frac{\text{सूय}}{\text{सूक}} \dots (१५)$$

$$\text{चलत्रिज्येवर लंब दिशेत वेगवृद्धि} = \text{कोभुज} \frac{\text{सूय}}{\text{सूक}} - \text{भुज} \frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूक}} \dots (१६)$$

२८८. वरुच्या वेगवृद्धि अयोन्य लव भुजाच्या किमनीने निघाल्या आहेत परंतु त्या आपणाल्या अक्षीय निर्णायकाच्या किमनीने पाहिले आहेत त्या पुढील कृतीने तयार होतात लेख २८९ मधील समीकरण (३) वरून ते समीकरण असे

$$\frac{\text{सूरक्ष}}{\text{सूरक}} = \frac{\text{सूर}}{\text{सूरक}} \text{ कोभुव} - \text{रभुव} \frac{\text{सूरव}}{\text{सूरक}}$$

ह्या समीकरणाचे दोन्ही पेट्याचे काल्पनिकी मूक्षमाशुण काढिले, हा मूक्षमाशुण काढावयाचा असता उजव्या पेट्यात जास्त पदे उग्राव होतात म्हणून अनेक भाग करू

$$\begin{aligned} \frac{\text{सूर}}{\text{सूरक}} \left(\frac{\text{सूर}}{\text{सूरक}} \text{ कोभुव} \right) &= \frac{\text{सूरर}}{\text{सूरक}} \text{ कोभुव} + \frac{\text{सूर}}{\text{सूरक}} \cdot \frac{\text{सूर}}{\text{सूरक}} (\text{कोभुव}) \\ &= \frac{\text{सूरर}}{\text{सूरक}} \text{ कोभुव} - \frac{\text{सूर}}{\text{सूरक}} \text{ भुव} \frac{\text{सूरव}}{\text{सूरक}} \dots \dots (१७) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\text{सूर}}{\text{सूरक}} \left(- \text{रभुव} \frac{\text{सूरव}}{\text{सूरक}} \right) &= \frac{\text{सूर}}{\text{सूरक}} \text{ भुव} \frac{\text{सूरव}}{\text{सूरक}} + \frac{\text{सूरव}}{\text{सूरक}} \text{ कोभुव} \frac{\text{सूरव}}{\text{सूरक}} \\ &= - \text{रभुव} \frac{\text{सूररव}}{\text{सूरक}} \dots \dots (१८) \end{aligned}$$

ह्यामधील उजवीकडच्या पदाची वेरीज डावीकडच्या दोन्ही पदाच्या वेरजे-वरोवर म्हणजे $\frac{\text{सूरक्ष}}{\text{सूरक}}$ ह्यावरोवर आहे म्हणून

$$\begin{aligned} \frac{\text{सूरक्ष}}{\text{सूरक}} - \frac{\text{सूरर}}{\text{सूरक}} \text{ कोभुव} - \frac{\text{सूर}}{\text{सूरक}} \text{ भुव} \frac{\text{सूरव}}{\text{सूरक}} - \frac{\text{सूर}}{\text{सूरक}} \text{ भुव} \frac{\text{सूरव}}{\text{सूरक}} \\ = \text{रकोभुव} \left(\frac{\text{सूरव}}{\text{सूरक}} + \frac{\text{सूरव}}{\text{सूरक}} \right) - \text{रभुव} \frac{\text{सूररव}}{\text{सूरक}} \\ = \left\{ \frac{\text{सूरर}}{\text{सूरक}} - \text{र} \left(\frac{\text{सूरव}}{\text{सूरक}} \right)^2 \right\} \text{ कोभुव} \\ - \left(\frac{\text{सूर}}{\text{सूरक}} \frac{\text{सूरव}}{\text{सूरक}} + \text{र} \frac{\text{सूरव}}{\text{सूरक}} \right) \text{ भुव} \dots \dots (१९) \end{aligned}$$

लेख २८९ मधील समीकरण (४) वरून, ते समीकरण असे—

$$\begin{aligned} \frac{\text{सूरव}}{\text{सूरक}} &= \text{भुव} \frac{\text{सूर}}{\text{सूरक}} - \text{र कोभुव} \frac{\text{सूरव}}{\text{सूरक}} \\ \frac{\text{सूरव}}{\text{सूरक}} &= \frac{\text{सूर}}{\text{सूरक}} \left(\frac{\text{सूर}}{\text{सूरक}} \text{ भुव} \right) + \frac{\text{सूर}}{\text{सूरक}} \left(\text{र कोभुव} \frac{\text{सूरव}}{\text{सूरक}} \right) \end{aligned}$$

उभवीकडच्या दोन पदांपैकी प्रत्येक पेटून त्याचे मूल्यामापण करू

$$\begin{aligned}
 & \frac{म}{मूव} \left(\frac{मूर}{मूक} मूव \right) - \frac{मूरर}{मूर} भव + \frac{मूर}{मूक} कोभूव \frac{मूव}{मूर} \dots \dots \\
 & \frac{मूर}{मूक} \left(रकोभूव \frac{मूव}{मूक} \right) - \frac{मूर}{मूक} कोभूव \frac{मूव}{मूर} - र \frac{मूव}{मूक} भूव \frac{मूव}{मूर} \\
 & \quad \quad \quad र कोभूव \frac{मूरव}{मूर} \dots \dots \\
 & \frac{मूरव}{मूर} = \frac{मूरर}{मूर} भूव + रभूव \frac{मूव}{मूर} \wedge \frac{मूव}{मूर} \\
 & \frac{मूर}{मूक} कोभूव \frac{मूव}{मूर} + \frac{मूर}{मूक} कोभूव \frac{मूव}{मूर} + र कोभूव \frac{मूरव}{मूर} \\
 & - \left\{ \frac{मूरर}{मूर} - र \left(\frac{मूव}{मूर} \right)^2 \right\} भूव \\
 & + \left(० \frac{मूर}{मूर} \cdot \frac{मूव}{मूर} - र \frac{मूरव}{मूर} \right) नाभय \dots \quad (२०)
 \end{aligned}$$

समीकरण (१९) हे कोभूव ने गुणिते, आणि समीकरण (२०) हे भूव ने गुणिते आणि गुणाकाराची वेरीज केली म्हणजे चलत्रिज्येची वेगवृद्धि येईल; तसेच समीकरण (१९) हे—भूव ने गुणून (२०) हे कोभूव ने गुणिते आणि गुणाकाराची वेरीज केली तर चलत्रिज्येवर लव दिसेल, जिचा त्या सिमान्या समानतर दिशात वेगवृद्धि येईल. वेरजेमध्ये (भूव - कोभूव) हे पद उत्पन्न होईल, पण त्याची किमत १ ह्या संख्येबरोबर असते. म्हणून

$$\text{चलत्रिज्येची समानतर वेगवृद्धि} \quad \frac{मूरर}{मूर} - र \left(\frac{मूव}{मूर} \right)^2 \dots \dots (२१)$$

$$\text{चलत्रिज्येवर लव वेगवृद्धि} \quad र \frac{मूर}{मूर} \cdot \frac{मूव}{मूर} - र \frac{मूरव}{मूर} \dots \dots (२२)$$

$$\begin{aligned}
 & १ \left(र \frac{मूर}{मूर} \cdot \frac{मूव}{मूर} - र \frac{मूरव}{मूर} \right) \\
 & = \frac{१}{र} \frac{मूर}{मूर} \left(र \frac{मूव}{मूर} \right) \dots \dots (२३)
 \end{aligned}$$

प्रकरण दहावे

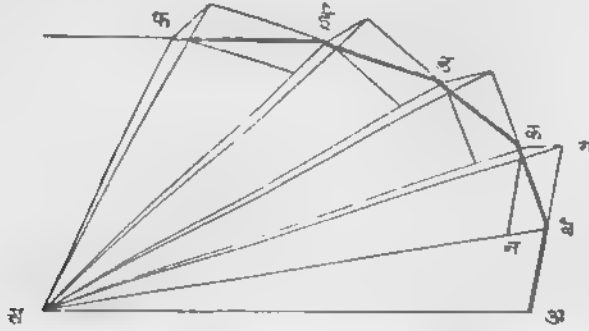
ग्रहकक्षेची सूक्ष्मांश समीकरणे, आणि कक्षेसंबंधी पदांचा अन्योन्य संबंध

२८९. एक परमाणू सरळरेषेने गमन करित असता प्रतिक्षणी त्यावर दुसऱ्या एकाद्या पदार्थाचे ताही आकर्षण घडत असेल तर म्हणजे तो दुसरा पदार्थ त्या परमाणूला आपणाकडे आर्तित असेल तर, तो परमाणू प्रतिक्षणी आपल्या गमनाची दिशा आकर्षणाच्या प्रमाणात सोडील, आणि ह्याप्रमाणे प्रतिक्षणी दिशा सोडल्यामुळे त्या परमाणूच्या गमनाचा मार्ग वक्ररेषात्मक होईल, ह्या वक्ररेषेला त्या परमाणूची कक्षा म्हणतात. एवढे परमाणू अथवा पदार्थाच्या गुरुत्वमध्याला अनुत्पन्न आहे हें लक्षात असावें. ही वक्ररेषा म्हणजे ग्रहाची कक्षा कशा प्रकारची होईल, हें पुढे सिद्ध करिता येते. परमाणूचा गमन चा वेग (पूर्वी प्राप्त झालेला) आणि आकर्षणाचे कार्य याच्या संयुक्तप्रमाण त्याची कक्षा निरनिश्चय राखता, ती होते. गुरुत्वाभावती भ्रमण करणारे ग्रह आणि त्या ग्रहागमनाची फिरणारे उपग्रह यांच्या कक्षा दीर्घ वर्तुळावृत्ति आहेत. यासारह्या ग्रहाची दीर्घ वर्तुळ कक्षेचाच विचार करता आहे.

२९०. ग्रहाच्या कक्षेसंबंधी पदे खाली लिहिल्याप्रमाणे आहेत. ग्रहाची कक्षा निर्माण करणारे आकर्षण, पूर्ण कक्षा भ्रमण करण्यास लागणारा काल, भ्रमण प्रदक्षिणाकाल, ग्रहाची चरित्राच्या, ग्रहाची आरंभस्थानीय विज्या (हिला आपण आरंभ विज्या म्हणू) ग्रहाची मधोमधीय विज्या, केंद्र मन्त्रिधानी विज्या (ह्यापैकी मंशोच्चवीय विज्या सर्वात मोठी असते व केंद्र मन्त्रिधानी विज्या सर्वात लहान असते.) चल-विज्यानिमित्ताने हा हा आरंभ विज्या आणि चलविज्या यांमध्ये केंद्रस्थानी असतो. चरित्राविमित्ताने हा हा आरंभ विज्या व चलविज्या यांमधील कक्षा मर्यादित क्षेत्राचा भाग, किंवा कोणत्याही क्षेत्र विज्या यांमधील कक्षा असणं क्षेत्राचा भाग, या प्रकारे असते. मध्यमविज्या, किंवा ग्रहाचे मध्यभागावर, हे महत्तम विज्या व लहानम विज्या यांच्या योगाच्या आधारेवर असते, केंद्रभुज ग्रहाची मध्यमविज्या कक्षेची केंद्रभुज वगैरे वगैरे पद आहेत. ह्यांचे अन्योन्य संबंध ह्या प्रकरणात सिद्ध करावयाचे आहेत.

२९१. एक परमाणू एका विदूषासून घडत असलेल्या आकर्षणाने वक्ररेषेने गमन करित असेल, तर आकर्षक विदूषासून गेल्या जी कक्षविज्या ती, समान कालात समान क्षेत्रात आर्तित. अर्थात जी चरित्राच्या जी क्षेत्रात क्रमिती ती क्षेत्राच्या कालात उत्पन्न झाला असतील, त्या कालाची समप्रमाणत असताना असे सिद्ध करावयाचे.

तो परमाणू एका काल विभागाच्या आरंभक्षणी अ स्थानी आहे आणि त्यावर स ह्या विदूषामून काही परिमाणाचे आकर्षण सतत घडत आहे. ह्या काल विभागाचे काही समान भाग केले, त्यांपैकी पहिल्या भागात तो परमाणू अ पासून व पर्यंत गेला असें माना. दुसऱ्या भागात, जर त्यावर काही आकर्षण नसते तर तो परमाणू अव दिशेनेच ग विदूषपर्यंत गेला असता, आणि अव रेपेवरोवर व ग रेपा झाली असती



कारण वाह्य कारणाशिवाय जड पदार्थ आपली स्थिति बदलीत नाहीत. (लेग २७९, मि. १.) पण कालाच्या ह्या दुसऱ्या भागात त्यावर स विदूषामून वन रेपे इतकें आकर्षण घडले. यास्तव त्या परमाणूवर दोन प्रेरणा घन वग ह्या लागू झाल्या, म्हणून तो वन कग ह्या समानरभुज त्रिकोणाच्या व क कर्णाच्या दिशेने क पर्यंत जाईल. [प्रेरणा समानरभुज त्रिकोणाचा सिद्धान्त लेख २७६] तेव्हा अस व वस ह्या चलत्रिज्येमधील क्षेत्र असव त्रिकोण, वस व वस ह्या चलत्रिज्यामधील व स क त्रिकोणावरोबर होईल असें सिद्ध करावयाचे

अव = वस

[वर सिद्ध केलेले. २७९ सि. १]

म्हणून असव त्रिकोण = वसग त्रिकोण

पण सद कग ह्या रेपा समांतर आहेत.

म्हणून वसग त्रिकोण = वसक त्रिकोण = असव त्रिकोण.

ह्याप्रमाणेच गिद्ध होईल की, असव त्रिकोणावरोबरच कमड त्रिकोण आहे, आणि डमई व ईमक हेही असव त्रिकोणावरोबर आहेत, आणि ते समान काल विभागाने चलत्रिज्येने आक्रमिलेली क्षेत्रे आहेत.

आता कालाच्या समान भागांची संख्या अमर्याद वाढविली तर, त्रिकोणाची संख्याही अमर्याद होईल, आणि प्रत्येक त्रिकोणाची स विदूषासोबतची वाजू अत्यंत सूक्ष्म होईल आणि अव क ड ई फ हा मार्ग वक्ररेखात्मक होईल. ह्यावरून चलत्रिज्या समान कालांत समान क्षेत्रे आक्रमितें हा सिद्धांत सिद्ध आहे.

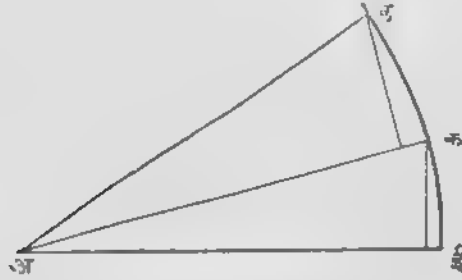
२९२. क्षेत्राच्या सूक्ष्मांशाचें कालाच्या सूक्ष्मांशाशी नियमित एकच असते.

k_1, k_2 हे दोन काल विभाग आहेत, ह्या काल विभागात चलत्रिज्येत आक्रमिलेली क्षेत्रे, अनुक्रमे Δ_1, Δ_2 ही आहेत. तेव्हा वरच्या मिळतांप्रमाणे

किंवा $k_1 : k_2 = \Delta_1 : \Delta_2$
 $\Delta_1 \times k_2 = k_1 \times \Delta_2$

Δ_1, Δ_2 ही क्षेत्रे वरच्या लेखात जे असत, वसम त्रिकोण आहेत त्याची आहेत किंवा त्याच्या पटीची किंवा हिस्सांची आहेत त्यापैकी k_1 हा कालाचा एक मानिला आणि Δ_1 हा क्षेत्राचा एक मानिला, पण कालाचा एक k_2 हा कालाच्या सूक्ष्मांशा असा अत्यंत सूक्ष्म मानिला आहे. आणि ह्या एक परिमाण कालांत चलत्रिज्येत आक्रमिलेले क्षेत्र Δ_2 ज ह्या अक्षराने दाखविले हा क्षेत्राचा एक मानिला आहे.

२९३. दोन त्रिकोणांचे पाये समान आहेत आणि पायाच्या एका टोकांत संपणाऱ्या बाजू समान आहेत. तर त्या त्रिकोणांची क्षेत्रे पायाच्या त्याच टोकाशी असलेल्या कोनाच्या भुजज्येशी प्रमाणात असतात.



(आवृत्तिमय्ये ईक आणि कड ह्या वक्ररेषा आहेत त्या त्रिकोणी ईक, कड हे बिंदु साधून सरळ रेषा आहेत असे घ्या.)

अईक आणि अकड हे दोन त्रिकोण आहेत, पहिल्याच्या अई, अक. ह्या दोन बाजू दुसऱ्याच्या अक, अड बाजूशी अनुक्रमे समान आहेत, तर

अईक त्रिकोणाचें क्षेत्र : अकड त्रि क्षेत्र :: भुजअई : भुजअक असें मिश्र करावयाचे

$$\text{अईक त्रि. क्षे.} = \frac{1}{2} \text{अई} \times \text{अक} \times \text{भुजअई}$$

$$\text{अकड त्रि. क्षे.} = \frac{1}{2} \text{अक} \times \text{अड} \times \text{भुजअक}$$

बाजू बरोबर आहेत म्हणून

$$\text{अईक त्रि. क्षे.} : \text{अकड त्रि. क्षे.} :: \text{भुजअई} : \text{भुजअक.}$$

उपसिद्धांत — आदि विभाणाचा क बिंदू ई बिंदूची मिळाला तर कअई कोन अत्यंत सूक्ष्म होईल, आणि हा सूक्ष्म कोन कालाच्या सूक्ष्मांशातच निर्माण होईल. (एथे क बिंदू ई बिंदूपासून Δ जावे गमन करीत आहे अशी कल्पना आहे. अर्थात सूक्ष्म अशा कालात क बिंदूचे गमन सूक्ष्म आणि त्यामुळे कोनही (ईअक हा) सूक्ष्मच होईल तेव्हा ईअई वि. क्षेत्र $= \frac{1}{2}$ अई \times अक मुईअक.

अईक चिकोणाने क्षेत्र अ ने दाखवू. अई अक $=$ १ मानू ईअक कोन ब ने दाखवू.

तेव्हा

$$\frac{\text{सूअ}}{\text{सूक}} = \frac{1}{2} \times \frac{\text{सूअ}}{\text{सूक}} \dots\dots\dots$$

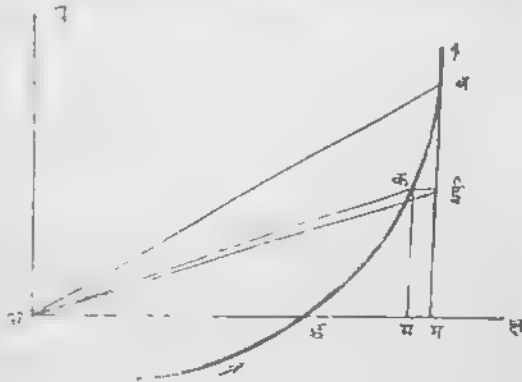
$\frac{\text{गूअ}}{\text{सूक}}$ हा आपण क्षेत्राचा एक मानू व त्यास $\frac{1}{2}$ ज म्हणू
तेव्हा

$$ज = १ \times \frac{\text{सूव}}{\text{सूक}}$$

२.६. कालाच्या सूक्ष्म अशा Δ परिमाणात परमाणू गमनाच्या चलत्रिज्येने आकर्मिलेले क्षेत्र $\frac{1}{2}$ ज हा त्याचा क्षेत्राच्या इतर पदांनी संबंध.

गमन करणाऱ्या परमाणूचे जवळपास लंब भुजाशी $\frac{1}{2}$ ज चा संबंध.

अक्ष अस हे अक्षोखंड लंब भुजाचे अक्ष आहेत. गमन करणारा परमाणू क कालाच्या अंती क ठिकाणी जाते त्यावेळी त्याचे अक्ष (अ, य) आहेत \triangle क हा एक काल विभाग आहे. ह्या काल विभागात तो परमाणू कपासून ब पर्यंत जातो. ब स्थानी त्याचे भुज $\left\{ (अ + \Delta अ) (य + \Delta य) \right\}$ हे होतात. Δ क ह्या काल विभागात चल-त्रिज्येने आकर्मिलेले क्षेत्र अवक हे आहे. हा अवक त्रिकोण क्षेत्र शब्दानेच दाखवितो



आणि कालाच्या गुण अशा एक परिमाणाने आकर्मिलेले क्षेत्र $\frac{1}{2}$ ज ने दाखवितो.

$$\frac{1}{2} ज \times \triangle क = \text{क्षेत्र (अवक त्रिकोण)}$$

बाजूस दिलेल्या आकृतीवरून समजतें की,

क्ष = अम य = कम

Δ क्ष = मग Δ य = बई

ह्यावरून

$\frac{1}{2}$ ज \times Δ क = क्षेत्र अबक त्रिकोण

= अबई त्रि.— कबई त्रि.— अकई त्रि.

= $\frac{1}{2}$ अग \times बई — $\frac{1}{2}$ कई \times बई — $\frac{1}{2}$ कई \times कम

एण कई = मग]

= $\frac{1}{2}$ (अग—कई) \times बई — $\frac{1}{2}$ कम \times कई

= $\frac{1}{2}$ (अम—मग) \times बई — $\frac{1}{2}$ कम \times मग

= $\frac{1}{2}$ क्ष \times Δ य — $\frac{1}{2}$ य \times Δ क्ष

$$ज = 2 \frac{\text{क्षेत्र}}{\Delta क} = क्ष \frac{\Delta य}{\Delta क} - य \frac{\Delta क्ष}{\Delta क}$$

ह्या मधील रचणतीक काल विभाग Δ क हा कालाच्या मूधमास मानित रातर Δ य हा य भुजाच्या मूधमास होईल आणि Δ क्ष हा क्ष भुजाच्या मूधमास होईल आणि ज हा $\frac{\text{मूधम}}{\text{मूक}}$ म्हणजे काळाच्या मूधम अशा एक परिमाणान आक्रमिते क्षेत्र होईल म्हणून

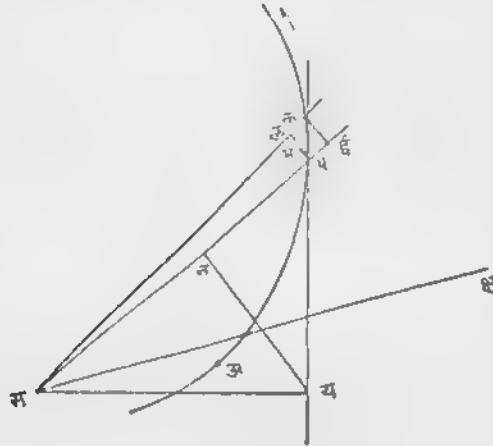
$$ज = क्ष \frac{\text{मूधम}}{\text{मूक}} - य \frac{\text{मूधम}}{\text{मूक}} \dots \dots$$

२९.५. कालाच्या मूधम अशा एक परिमाणान चल विज्येने आक्रमिते क्षेत्र अक्षिय निर्णायकांच्या किमतीने ठरवावयाचे.

सप ही चल विज्या आहे, तिने Δ क ह्या काल विभागान सपक हे क्षेत्र आक्रमित आहे. म्हणून

$$\frac{1}{2} ज \times \Delta क = \text{सपक क्षेत्र}$$

स मध्य करून मप त्रिज्येनें पल कंस काढिला, आणि सक त्रिज्येनें कई कंस काढिला. ह्या आकृतीवरून दिगून येनें की, मपक क्षेत्र मपल क्षेत्रापेक्षां जास्त आहे. आणि सकई क्षेत्रापेक्षां कमी आहे.



आता सप = र = चलत्रिज्या

सक = र + Δर = चलत्रिज्या

आणि पसक कोन = Δव = पक कंस ÷ त्रिज्या.

वर्तुळाच्या दोन त्रिज्या आणि त्याच्या टोकामधील वर्तुळाचा कंस यांनी मर्यादितले क्षेत्र हें तो कंस आणि त्रिज्येचा वर्ग याच्या गुणाभागाच्या अर्च्याबरोबर असते. अर्थात सर्व वर्तुळाचे क्षेत्र πr^2 याबरोबर असते. तेव्हां

$$\text{मपल क्षेत्र} = \frac{1}{2} r^2 \times \Delta व$$

$$\text{सकई क्षेत्र} = \frac{1}{2} (r + \Delta r)^2 \times \Delta व.$$

Δक हा काल विभाग आहे. हा विभाग कालाच्या एक परिमाणाची पूर्ण पट अगली पाहिले कारण एक परिमाण कालाचा सूक्ष्मांश हे स्वीकारले आहे. तेव्हा

इं व Δक = मपक क्षेत्र, मपल पेक्षा जास्त आणि सकई पेक्षा कमी आहे.
म्हणून

$\frac{1}{2}$ ज $\times \Delta$ क, $\frac{1}{2}r^2 \Delta$ व पेक्षा जास्त आणि $\frac{1}{2} (r + \Delta r)^2 \times \Delta$ व पेक्षा कमी आहे.

$\frac{1}{2}$ ज $\frac{\Delta क}{\Delta व}$ हे गुणोत्तर $\frac{1}{2}r^2$ पेक्षा जास्त आणि $\frac{1}{2} (r + \Delta r)^2$ पेक्षा कमी आहे आता $\Delta क$ हा कालाचा मूल्यास मानिला तर $\Delta व$ हे व कोनाचा मूल्यास हाईल आणि $\Delta र = 0$ म्हणून

$$\frac{1}{2} ज \frac{सुक}{सुव} = \frac{सू(सयक क्षेत्र)}{सूव} = \frac{1}{2}r^2$$

ह्यामधील मूल्यासगुण वृत्तपरिमाणसंबंधी, म्हणजे वृत्तपरिमाण विकारीयद मानून आणलेल्या अहे तो बाल हे विकारीयद घेऊन आणावयाचा आहे यामुळे त्यास $\frac{सूव}{सुक}$ ने गुणावयाचे असते. लेख २०५. म्हणून

$$ज \frac{सुक}{सूव} \times \frac{सूव}{सुक} = r^2 \frac{सूव}{सुक}$$

$$पण \quad \frac{सुक}{सूव} > \frac{सूव}{सुक} \quad ?$$

म्हणून

$$ज = r^2 \frac{सूव}{सुक}$$

२१६. ज ची किंमत अन्योन्य लंब भुज निर्णयवाच्या किमतीने लेख २०६ मध्ये नगार काल द्याविली आहे त्यावरून ही ज ची किंमत मिळते. ती अशी—

$$ज = ख \frac{सूय}{सुक} - य \frac{सूख}{सुक} \quad [\text{लेख २१४}]$$

$$पण \quad ख = रकोभुज आणि य = रमुव$$

$$\frac{सूय}{सुक} = भुव \frac{सूर}{सुक} + रकोभुज \frac{सूव}{सुक} \quad \dots \dots (१)$$

$$\frac{सूख}{सुक} = कोभुज \frac{सूर}{सुक} - रमुव \frac{सूव}{सुक} \quad \dots \dots (२)$$

ह्यापै हो पहिल्या समीकरणाच्या धने म्हणजे रकोभुव ने गुणावयाचे आणि त्यागुणा-
कारात दुसऱ्या समीकरणाच्या धने म्हणजे रभुव ने गुणून आलेला गुणाकार धनार्ण
करावयाचा आहे. तेव्हां

$$\begin{aligned} \text{ज} &= \frac{\text{सूत्र}}{\text{सूक}} - \text{य} \frac{\text{सूत्र}}{\text{सूक}} \\ &= \text{रभुवकोव} \frac{\text{सूत्र}}{\text{सूक}} + \text{र}^2 \text{कोभुव} \frac{\text{सूत्र}}{\text{सूक}} \\ &= \text{रभुवकोभुव} \frac{\text{सूत्र}}{\text{सूक}} + \text{र}^2 \text{भुव} \frac{\text{सूत्र}}{\text{सूक}} \\ &= \text{र}^2 (\text{कोभुव} + \text{भुव}^2) \frac{\text{सूत्र}}{\text{सूक}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{पण} \quad \text{भुव}^2 + \text{कोभुव} &= 1 \quad \text{म्हणून} \\ \text{ज} &= \text{र}^2 \frac{\text{सूत्र}}{\text{सूक}} \end{aligned}$$

२२.७. ग्रहाच्या गमन मार्गात जाऊंली जी वक्ररेषा तिच्या केंद्राच्या, चन्द्रविषयेचा
आणि चन्द्राज्यातिर्मित कोनाच्या अन्योन्य मध्य ठरवावयाचा.

लेम २२.५ मधील आकृति पहा अवक ही वक्ररेषा आहे, तिच्यात अ हा स्थीर
बिंदु आहे, ह्या अ बिंदू पासून वक्ररेषेचो लांबी मोजावयाची आहे. अप कम च ने
दाखव, आणि पक \triangle च आहे अग घेऊ. तसेच कम $= \triangle$ र मानू.

पण $\text{रबु}(\triangle ब) = \text{र}\triangle ब$. कारण सूत्र कोनाची भुज्या $=$ वृत्त-
परिमाण अगने. कम रेषा ही काढ पक्षा आग्न आहे पण परभावधीला त्या समान
होतात. तेव्हां,

$$(\text{ज्या}) \text{पक}^2 = \text{पम}^2 + \text{कम}^2 \quad (\text{कारण कमप कोन काटकोन.})$$

नामाच्या सूक्ष्मत्वामुळे ज्यापक आणि कम पक ह्या रेषा समान आहेत. पक
पम कम यांच्या जागी मानलेल्या किमती ठेविल्या. तेव्हां,

$$(\triangle च)^2 = (\text{र}\triangle ब)^2 + (\triangle र)^2 \quad \dots \dots \dots (\text{अ})$$

हे समीकरण $(\triangle च)^2$ ह्या पदातें भागिलें. तेव्हां,

$$1 \dots \dots \frac{(\triangle ब)^2}{(\triangle च)^2} + \frac{(\triangle र)^2}{(\triangle च)^2}$$

पयम त्रिकोणासी आणि पनय त्रिकोणासी सरूप होतो. त्यावेळी सपय कोन पकम कोनावरोवर असतो, आणि पयन कोन कपम कोनावरोवर असतो. व पनय आणि कपम हे कोन आहेत.

$$\text{पक} = \Delta \text{च}, \text{कम} = \Delta \text{र}, \text{पम} = \text{र} \Delta \text{ब},$$

$$\text{भुजज्या (सपय)} = \frac{\text{पम}}{\text{पक}} = \frac{\text{र} \Delta \text{ब}}{\Delta \text{च}} = \text{र} \frac{\text{सूब}}{\text{सूच}} \dots (४)$$

$$\text{कोभु (सपय)} = \frac{\text{पय}}{\text{पम}} = \frac{\text{कम}}{\text{पक}} = \frac{\Delta \text{र}}{\Delta \text{च}} = \frac{\text{सूर}}{\text{सूच}} \dots (५)$$

$$\begin{aligned} \text{स (सपय)} &= \text{भु (सपय)} \div \text{कोभु (सपय)} = \text{र} \frac{\text{सूब}}{\text{सूच}} \times \frac{\text{सूच}}{\text{सूर}} \\ &= \text{र} \frac{\text{सूब}}{\text{सूर}} \dots (६) \end{aligned}$$

२१.२. घटाच्या कक्षेतील विविधित विदूतून काढिलेल्या स्पर्शरेषेवरील, वेद्राभागून काढिलेल्या लवाचा कक्षेच्या पदाशी संबंध.

वरच्या विवरणामध्ये सय हा पन स्पर्शरेषेवरील लव आहे. ह्या लवाग आपण ल हें नाव देऊ.

$$\text{ल} = \text{सय} = \text{पस भु (सपय)} = \text{र भु (सपय)}$$

$$\text{पण भु (सपय)} = \text{र} \frac{\text{सूब}}{\text{सूच}} \text{ म्हणून}$$

$$\text{ल} = \text{र} \times \text{र} \frac{\text{सूब}}{\text{सूच}} = \text{र}^2 \frac{\text{सूब}}{\text{सूच}} \times \frac{१}{१}$$

$$= \text{र}^2 \frac{\text{सूब}}{\text{सूच}} \times \frac{\text{सूक}}{\text{सूक}} = \text{र}^2 \frac{\text{सूब}}{\text{सूक}} \times \frac{\text{सूक}}{\text{सूच}}$$

$$\text{ल} = \text{र}^2 \frac{\text{सूब}}{\text{सूक}} \div \frac{\text{सूच}}{\text{सूक}}$$

परंतु

$$\text{र}^2 \frac{\text{सूब}}{\text{सूक}} = \text{ज} \text{ आणि } \frac{\text{सूच}}{\text{सूक}} = \text{ग (वेग)}$$

म्हणून

$$\text{ल} = \text{ज} \div \text{ग} \dots (७)$$

३००. ग्रहाचा वेग आणि कक्षेची इतर पद्धे याचा अभ्योप्य सावध.

$$\begin{aligned} \text{ल} &= \text{र} \frac{\text{सूव}}{\text{सूच}} \cdot \frac{1}{\text{ल}} = \frac{1}{\text{र}} \left(\frac{\text{सूव}}{\text{सूच}} \right)^2 \\ \frac{1}{\text{ल}} &= \frac{1}{\text{र}} \left(\frac{\text{सूव}}{\text{सूच}} \right)^2 \quad \therefore \left\{ \text{र} : \left(\frac{\text{सूव}}{\text{सूच}} \right)^2 \right\} \\ &[\text{ल. २०.७ स. (२)}] \end{aligned}$$

म्हणून

$$\frac{1}{\text{ल}} = \frac{1}{\text{र}} + \frac{1}{\text{र}} \left(\frac{\text{सूव}}{\text{सूच}} \right)^2 \quad (८)$$

$\frac{1}{\text{र}}$ ही संख्या व ह्या अक्षराने दाखविला तर,

$$\frac{\text{सूव}}{\text{सूच}} = \frac{\text{सू}}{\text{सूव}} (१ \div \text{र}) = -\frac{1}{\text{र}} \left(\frac{\text{सूव}}{\text{सूच}} \right) [\text{भागाकाराचा गु.ग.}]$$

यास्तव

$$\frac{1}{\text{ल}} = \text{व}^2 + \left(\frac{\text{सूव}}{\text{सूच}} \right)^2 \quad \dots (९)$$

$$\text{परंतु वेग}^2 = \text{ग}^2 = \frac{\text{ज}^2}{\text{ल}} \quad [\text{स. (७)}]$$

$$= \text{ज}^2 \left\{ \text{व}^2 + \left(\frac{\text{सूव}}{\text{सूच}} \right)^2 \right\} \quad \dots (१०)$$

३०१. एक परमाणु एका पातळीत स्वतःच्या काही गतीने गमन करीत अंगेल आणि त्यावर, त्याच पातळीत असलेल्या विद्रुपायुन काही आकर्षण सतत लागू होत असले तर त्याच्या गमन मार्गाचे समीकरण मिळ करायचे.

(गमन मार्गाचे समीकरण ज्यानी क्षेत्रभूमिती वाचली अंगेल त्यानान कळेल इतराना अने वाटेक ही. 'गमन मार्ग म्हणजे वक्ररेषा, त्या वक्ररेषेचे समीकरण काय? कारण समीकरण वीजगणितात असते भूमितीत नसत'. असें ज्याना वाटेक त्यानी प्रकरण ७ वे वैजयभूमिती हें पुनः वाचावें.)

त्या परमाणूवर प्रतिक्षणी जें आकर्षण घडत आहे ते प्र परिमाणाचे आहे. म्हणजे प्रतिक्षणी तो परमाणू प्र परिमाणाच्या रेपेटिका आकर्षक केंद्र बिंदूकडे जात आहे. अर्थात प्र ही त्याची वेगवृद्धि आहे. ही वेगवृद्धि चलत्रिजेच्या दियोत कार्य करणारी

आहे. आणि ती ग्रहण आहे. कारण आकाशाने चलच्चित्रा पत्रिकाणी कर्मा होत आहे.

अन्योन्य लवभुजाच्या किमतीने वेगवृद्धि किती येते हे पूर्वी गिद्ध केले आहे. लेख २८७ समीकरण (अ) (ब) पहा. ती समीकरणे अशी

$$\text{क्ष अक्षाशी समांतर वेगवृद्धि} = \frac{\text{सूरक्ष}}{\text{सूक्ष}} \dots\dots (अ)$$

$$\text{य अक्षाशी समांतर वेगवृद्धि} = \frac{\text{सूरय}}{\text{सूक}} \dots\dots (ब)$$

जाता - प्र ही वेगवृद्धि चलच्चित्रेच्या दिशेतील आहे, हे वर दाखविले आहे, हिचे पृथक्करण, क्ष अक्षाशी समांतर दिशेत, आणि य अक्षाशी समांतर दिशेत केले तर ते अनुक्रमे - प्र कोभुज आणि - प्र भुज अशी पृथक्करणे होतात. ह्यावरून त्या परमांशच्या गमनमार्गाची सूक्ष्मांश समीकरणे खाली लिहिल्याप्रमाणे होतात :-

$$\frac{\text{सूरक्ष}}{\text{सूक्ष}} = - \text{प्र कोभुज} \dots\dots (११)$$

$$\text{आणि } \frac{\text{सूरय}}{\text{सूक}} = - \text{प्र भुज} \dots\dots (१२)$$

२००. वरची सूक्ष्मांश समीकरणे अन्योन्य लव भुज आणि अक्षीय अंशा दोन्ही प्रकारच्या स्थलनिर्णायकांनी युक्त आहेत. पण आम्हास अक्षीय समीकरणाची आवश्यकता आहे. वरच्या दोन समीकरणांपैकी कोणतेही एक समीकरण घेऊन, त्यातील लवभुजाच्या ठिकाणी अक्षीय निर्णयिके आणिही म्हणजे डाट समीकरण तयार होईल. प्रथम समीकरण (११) घेऊ. तें असें—

$$\frac{\text{सूरक्ष}}{\text{सूक्ष}} = - \text{प्र कोभुज}$$

$$\text{आता } \text{क्ष} = \text{र कोभुज}$$

$$\text{आणि र} = \frac{१}{\text{व}} \text{ किंवा } \text{व} = \frac{१}{\text{र}} \text{ असे ठराविक लेखन स्वीकारित आहे.}$$

तेव्हा,

$$\text{क्ष} = \frac{१}{\text{व}} \text{ कोभुज} = \frac{\text{कोभुज}}{\text{व}}$$

ह्या समीकरणाचा गूण्यलब्धिगुण किंवा सूक्ष्मांश गुणोत्तर काढिले. तेव २०३ प्रमाणें.

$$\frac{\text{भाजक} \times (\text{भाज्य सू.गु.}) - \text{भाज्य} \times (\text{भाजक सू.गु.})}{\text{भाजकाचा वर्ग}}$$

तेव्हां

$$\begin{aligned} \frac{\text{सूक्ष्म}}{\text{सूक}} &= \left(-व \times \frac{\text{सूव}}{\text{सूक}} - \text{कोभुव} \frac{\text{सूव}}{\text{सूव}} \cdot \frac{\text{सूव}}{\text{सूव}} \right) \times \frac{१}{व} \\ &= - \left(वभुव + \text{कोभुव} \frac{\text{सूव}}{\text{सूव}} \right) \times \frac{१}{व} \cdot \frac{\text{सूव}}{\text{सूक}} \end{aligned}$$

परंतु

$$ज = र \frac{\text{सूव}}{\text{सूक}} = \frac{१}{व} \frac{\text{सूव}}{\text{सूक}}$$

म्हणून

$$\frac{\text{सूक्ष्म}}{\text{सूक}} = - ज \left(वभुव + \text{कोभुव} \frac{\text{सूव}}{\text{सूव}} \right)$$

ह्या समीकरणाचे पुन. सूक्ष्मांश गुणोत्तर काढिले. प्रथम व संबंधी सूक्ष्मांश गुण काढून त्यास $\frac{\text{सूव}}{\text{सूक}}$ ने गुणिलें तर

$$\begin{aligned} \frac{\text{सूक्ष्म}}{\text{सूक}} &= - ज \left\{ \frac{\text{सू}}{\text{सूव}} (वभुव) + \frac{\text{सू}}{\text{सूव}} \left(वभुव \frac{\text{सूव}}{\text{सूव}} \right) \right\} \times \frac{\text{सूव}}{\text{सूक}} \\ &= - \frac{\text{सूज}}{\text{सूक}} \left(वभुव + \text{कोभुव} \frac{\text{सूव}}{\text{सूव}} \right) \end{aligned}$$

ह्या समीकरणात उजवीकडे दोन पदे आहेत. पैकी खालचे पद तून ० असे घेतले पाहिजे. कारण ज ही कालाच्या सूक्ष्म अशा एक परिमाणान चलाविष्येन क्रमिलेले क्षेत्र आहे. जेव्हां गमन करणाऱ्या पदार्थाविर एकाच प्रेरणेचे कार्य घडत असेल तेव्हा ज ही सग्या स्थीर म्हणजे विकार न पावणाऱ्या असे अर्थात स्थीर संस्थेचा सूक्ष्मांश गुण स्थीर असतो. म्हणून

$$- \frac{\text{सूज}}{\text{सूक}} \left(वभुव + \text{कोभुव} \frac{\text{सूव}}{\text{सूव}} \right) = ०$$

पण जेव्हा गमन करणाऱ्या पदार्थाविर दुसऱ्या प्रेरणेचें कार्य घडत असेल तेव्हा हे पद विचारांत घ्यावे लागते.

वरच्या समीकरणांतील पहिले पद अस्तित्वात रातीतें लिहिले आहे त्याचा प्रथम विस्तार लिहितो.

$$\frac{मु}{सूव} (वभुव) = भुव \frac{सूव}{सूव} + व कोभुव$$

$$\frac{मु}{सूव} \left(कोभुव \frac{सूव}{सूव} \right) = - भुव \frac{सूव}{सूव} + कोभुव \frac{सूव}{सूव}$$

$$\begin{aligned} \frac{सू२क्ष}{सूक} &= - ज \left(व कोभुव + कोभुव \frac{सू२व}{सूव} \right) \times \frac{सूव}{सूक} \\ &= - ज व^२ \times \frac{१}{व^२} \cdot \frac{सूव}{सूक} कोभुव \left(व + \frac{सू२व}{सूव} \right) \\ &= - ज^२ व^२ कोभुव \left(व + \frac{सू२व}{सूव} \right) \end{aligned}$$

पण

$$\begin{aligned} \frac{सू२क्ष}{सूक} &= - प्र कोभुव \\ \left\{ \frac{सू२व}{सूव} + व \right\} &= \frac{प्र}{ज^२ व^२} \dots\dots\dots (१३) \end{aligned}$$

हे त्या परमाणूच्या गमन मार्गाचे अक्षीय मूक्षमाश समीकरण आहे. (१२) ह्या समीकरणापासूनही अनेक समीकरण मिळू शकतात.

३०३. एक परमाणु दिलेल्या एका बिंदूपासून दिलेल्या दिशेने व दिलेल्या वेगाने फेकला आहे. तो मध्याभिगामी प्रेरणेने वक्र मार्गाचे गमन करीत आहे. ज्या आकर्षणाने तो प्रेरणा उत्पन्न झाली आहे ते आकर्षण अंतराच्या वर्गाच्या व्यस्त प्रमाणात कार्य करिते तर त्या परमाणूच्या कक्षेच्या पदाचा निर्णय करावयाचा.

ते आकर्षण म्हणजे मध्याभिगामिनी प्रेरणा प्र आहे. आकर्षक बिंदूपासून त्या परमाणूचे अंतर r आहे. म हे त्या आकर्षक पदार्थाचे अंतराच्या एक परिमाणाइतक्या अंतरावर घडणारे आकर्षण होय. तेव्हां $प्र = \frac{म}{r^२}$ • एथे अंतराचा एक फूट घेतला आहे. व काळाचा मूक्षमाश एक सेकंद घेतला आहे. ह्यावरून त्या आकर्षक पदार्थाचे सामर्थ्य, एक फूट अंतरावरच्या परमाणूत आपणाकडे एका सेकंदाने $म$ फूट ओढून घेण्याचे आहे. या योजनेप्रमाणे

$$र = \frac{१}{व} \text{ घेतला तर } प्र = मव^२$$

अशाप्रकारे आकर्षण घडत असले तर त्या परमाणूच्या गमनमार्गाचे सूक्ष्मांश समीकरण कसे होते हे वरच्या लेखाने सिद्ध केले आहे. त्यातील प्रच्या टिकाणी तिची वर आलेली किंमत मव ही लिहिली म्हणजे त्या समीकरणाचे स्वरूप खाली लिहिल्याप्रमाणे होते

$$\frac{सू^3 व}{सूव^3} + व - \frac{प्र}{ज^3 व^3} - \frac{मव^3}{ज^3 व^3} = \frac{म}{ज^3}$$

ह्या समीकरणाने म ही स्थीर मर्यादा आहे, आणि ज हीही स्थीर मर्यादा आहे. व हे अवलंबी पद आहे आणि व हे विकारी पद आहे. म्हणजे,

$$व = सं(व)$$

ह्या स्थानी व ज आणि व स्थानी क्ष ही अक्षरे योजून वरच्या समीकरणाचे स्वरूप

$$\frac{सू^3}{सूव^3} \left(व - \frac{म}{ज^3} \right) + \left(व - \frac{म}{ज^3} \right) = ०$$

अशा प्रकारचे होते हे सिद्ध करितो.

$$ज = व आणि क्ष = व$$

$$\text{तर } \frac{सूज}{सूक्ष} = \frac{सूव}{सूक्ष} \text{ आणि } \frac{सूव}{सूक्ष} = \frac{सूव}{सूव}$$

$$\text{पण } ज = \left(व - \frac{म}{ज^3} \right) \text{ आणि } क्ष = व \text{ असेल तर}$$

$$\frac{सूज}{सूक्ष} = \frac{सूव}{सूक्ष} = ० \text{ आणि } \frac{सूव}{सूक्ष} = \frac{सूव}{सूव}$$

म्हणून

$$\frac{सू \left(व - \frac{म}{ज^3} \right)}{सूव} = \frac{सूव}{सूव}$$

आणि

$$\frac{सू^3 \left(व - \frac{म}{ज^3} \right)}{सूव^3} = \frac{सू^3 व}{सूव^3},$$

ह्यावरून सिद्ध होते की,

$$\frac{सू^3 \left(व - \frac{म}{ज^3} \right)}{सूव^3} \div \left(व - \frac{म}{ज^3} \right) = ० \dots (११)$$

३०%. हे जे समीकरण आपण निव्वर केले आहे, ह्या समीकरणावरून व सत्येची किंमत $\frac{म}{ज}$ ह्या मधील मर्यादाच्या रूपाने आणि व ह्या सत्येच्या रूपाने माध्य होते. यामागी ह्या समीकरणाचे आपणाला सकलन करावयाचे आहे. सकलन म्हणजे काय ? तर अवलंबी पदाची किंमत विकारी पदाने ठरविणे म्हणजे सकलन होय. सकलनाविषयी वरचे स्पष्टीकरण केले आहे. ते या प्रसंगी पुनः पाहणे आवश्यक आहे ते पहा. लेख २८५ पासून २८९ पर्यंत त्या आपणाला दिसत आहे की, एका मत्तयाचा द्वितीय सूक्ष्मांशगुण, त्या मत्तयावरोवर सत्येने आहे, मात्र चिन्ह निराळे आहे. ते एकाचे घन आणि एकाचे ऋण आहे. म्हणजे $\left(व - \frac{म}{ज} \right)$ या सत्येचा द्वितीय सूक्ष्मांशगुण $\left(व - \frac{म}{ज} \right)$ हा आहे.

ह्यावरून आपणाला कळते की $\left(व - \frac{म}{ज} \right)$ हा व कोनाचा वार्षिक मत्तय आहे. मग हा व कोनाच्या भुज्येचा असेल किवा तो भुज्येचा असल. हे सूक्ष्मांश समीकरण चल त्रिज्येच आहे. आणि वैज्यभूमितीमध्ये दीर्घ वर्तुळाच्या चल त्रिज्येचे समीकरण दिले आहे. लेख १८५ (२) पहा. ते समीकरण असे

$$र = \frac{अ(१ - \frac{१}{१ + ईकोभुव})}{१ - ईकोभुव}$$

म्हणजे

$$\frac{१}{र} = \frac{१ + ईकोभुव}{अ(१ - ई)} = व$$

ह्या समीकरणांत

$$\frac{१}{अ(१ - ई)} = \text{अमनिला तर}$$

$$व = अ(१ + ईकोभुव)$$

हे शकुलित्वातर्गत दीर्घवर्तुळाच्या चल त्रिज्येचे समीकरण आहे. लेख २९८ मधील आकृति पहा. ह्या आकृतीत मप ही चल त्रिज्या आहे, अर्थात $\frac{१}{मप} = व$ आहे आणि पमट हा कोन व नें दाखविला आहे. असे हे समीकरण आहे. ह्या समीकरणान अक्षीय निर्णयिकाचा अक्ष मट दिगेचा घेतला आहे, तो जर सज दिशेतला घेतला तर व कोनातून असट कोन, (यामे आपण उ कोन म्हणू तो) वजा केला पाहिजे.

म्हणून वरचे समीकरण खाली दिल्याप्रमाणे होईल. त्यान व चें जागी (व - उ) येईल. म्हणून—

$$व = अ \left\{ १ + \frac{१}{२} कोमु (व - उ) \right\} \dots (१५)$$

३०५. चल त्रिज्येचें सूक्ष्मांश समीकरण

$$\frac{मू - \left(व - \frac{म}{ज} \right)}{मूव} + \left(व - \frac{म}{ज} \right) = ०$$

हें आहे. वैज्यमूर्तमनीच्या समीकरणावरून कळते की हे कोमुज्येचें समीकरण आहे. आणि हे चल त्रिज्येचें समीकरण आहे तें कोमुज्येचेच असलें पाहिजे, कारण पमट कोन - व कोन ० असतां गप चल त्रिज्या मट दिशेन असून ती लघुतम होते, आणि व कोन १८०° असतां चल त्रिज्या महत्तम होते. परंतु हे मुज्येचें समीकरण असते तर व कोन १८० अंश असतां चल त्रिज्या लघुतमच खाली असती. म्हणून हे कोमुज्येचें समीकरण आहे. कोणत्याही पदाचा गुणवत्त्वगुण करिताना म्हणजे सूक्ष्मांशगुण करिताना त्या पदामध्ये असलेली स्थीर संख्या लुप्त होत अगते, आणि सूक्ष्मांशगुणाने मर्याद करिताना ती लुप्त झाले की मर्यादा उत्पन्न होते. आता

$$\left(व - \frac{म}{ज} \right) = सं(व) = कोमुव,$$

ह्या मध्ये स्थीर पद एकच नसता दोन असण्याचा संभव आहे. म्हणून ती पदे कोमुव मध्ये असली पाहिजेत. म्हणून

$$\left(व - \frac{म}{ज} \right) = स्थ कोमु (णव + फ) \dots (अ)$$

ह्या समीकरणाचे आपण सूक्ष्मांशगुण काढू. उजव्या पेट्यातील स्थ, ण, फ ह्या स्थीर संख्या आहेत. व ही एकच चल संख्या आहे व तिचें सूक्ष्म चलन ह आहे.

तेव्हां

$$\begin{aligned} \frac{मू}{मूव} \left(व - \frac{म}{ज} \right) &= \frac{१}{ह} [स्थ कोमु \{ \text{ण}(व + ह) + फ \}] \\ &\quad - स्थ कोमु (णव + फ)] \\ &= \frac{स्थ}{ह} \left[२ भू \left\{ \left(\frac{\text{णव} + \frac{\text{णह}}{२}}{२} \right) + फ \right\} \times \frac{\text{णह}}{२} \right] \\ &= स्थण भू \left\{ \left(\frac{\text{णव} + \frac{\text{णह}}{२}}{२} \right) + फ \right\} \times \frac{\frac{\text{मू}}{२} \frac{\text{णह}}{२}}{\frac{\text{णह}}{२}} \end{aligned}$$

$$\frac{\text{णह}}{२} = ० \text{ मानिला तर } \frac{\text{भु } \frac{\text{णह}}{२}}{\frac{\text{णह}}{२}} = १ \text{ म्हणून}$$

$$\frac{\text{सु}}{\text{सुव}} \left(\text{व} - \frac{\text{म}}{\text{ज}} \right) = \text{स्थण भु (णव + फ)} \quad \dots (अ)$$

तसेच

$$\frac{\text{म२}}{\text{सुव}} \left(\text{व} - \frac{\text{म}}{\text{ज}} \right) = \text{स्थण}^० \text{ कोभु (णव + फ)} \quad \dots (ब)$$

(अ) समीकरणात (ब) समीकरण मिळविले तर

$$\frac{\text{सु२}}{\text{सुव}} \left(\text{व} - \frac{\text{म}}{\text{ज}} \right) = \left(\text{व} - \frac{\text{म}}{\text{ज}} \right) = (१ - \text{ण}^०) \text{ स्थ कोभु (णव + फ)}$$

ह्या समीकरणाचा उजवीकडचा पैदा ० आहे म्हणून ण किंवा ण^० याची किंमत १ आहे म्हणून (अ) समीकरण खाली लिहिल्याप्रमाणे पाहिजे.

$$\left(\text{व} - \frac{\text{म}}{\text{ज}} \right) = \text{स्थ कोभु (व + फ)}$$

म्हणजे

$$\text{व} = \frac{\text{म}}{\text{ज}} + \text{स्थ कोभु (व + फ)} \quad \dots (क)$$

समीकरण (१५) आणि (क) ही दोन्ही व ह्या एकाच पदाची आहेत. म्हणून

$$\frac{\text{म}}{\text{ज}} + \text{स्थ कोभु (व + फ)} = \text{व} + \text{अई कोभु (व + उ)}$$

स्थानांतराने

$$\left(\text{अ} - \frac{\text{म}}{\text{ज}} \right) ; \text{अई कोभु (व + उ)} - \text{स्थ कोभु (व + फ)} = ०$$

समीकरण (१५) हे मिळू आहे आणि (क) समीकरणाने $\frac{\text{म}}{\text{ज}}$ आणि स्थ तसेच फ ह्या शोध्य आहेत म्हणून

$$\text{फ} = - \text{उ} ; \text{स्थ} = \text{अई} ;$$

$$\text{आणि } \text{अ} = \frac{\text{म}}{\text{ज}} ; \text{म} = \text{अज}^२ ;$$

$$\text{ज}^२ = \frac{\text{म}}{\text{अ}}$$

३०६. चल त्रिज्येचे सूक्ष्मांश समीकरण वर सोडवून दाखविले त्यांत व ची किंमत निघाली आहे ती खालच्या समीकरणांत आहे. ह्या समीकरणापासून कक्षेच्या काही पदांचा सवय कळतो तो येथे दाखवीत आहे. चल त्रिज्येच्या समीकरणाला मी व चें समीकरण असेच म्हणतों. ते समीकरण असें—

$$व = \frac{म}{ज} \{ १ + ई कोभु (व - उ) \}$$

ह्या समीकरणांत जेव्हां व = उ असेल तेव्हां कोभु (व - उ) = १

तेव्हां $व = \frac{म}{ज} \{ १ + ई \} = \frac{१}{२}$

आणि जेव्हा व = उ = १८० अंज असेल तेव्हा कोभु (व - उ) = ०

तेव्हां $व = \frac{म}{ज} \{ १ - ई \} = \frac{१}{२}$

आणि $२ = \frac{१}{\frac{म}{ज} (१ + ई)}$

$$रा = \frac{१}{\frac{म}{ज} (१ - ई)}$$

$$\begin{aligned} २ : रा &= \frac{\frac{म}{ज} (१ - ई) + \frac{म}{ज} (१ + ई)}{\frac{म}{ज} (१ - ई)} \\ &= \frac{२}{\frac{म}{ज} (१ - ई)} \end{aligned}$$

(२ : रा) हा दीर्घ वर्तुळाचा बृहदक्ष आहे. याच्या अर्धास आपण वृ हे अक्षर योजू म्हणजे $\frac{१}{२} (२ : रा) = वृ$.

$$वृ = \frac{१}{\frac{म}{ज} (१ - ई)} = \frac{ज}{म (१ - ई)}$$

आणि

$$वृ (१ - ई) = \frac{ज}{म}$$

३०७. एक परमाणु दीर्घवर्तुळ कक्षेने गमन करीत आहे. तर त्या कक्षेत त्याला पूर्ण प्रदक्षिणा करण्यास लागणारा काल आणि कक्षेची इनर पदे याचा अन्योन्य संबंध.

$$\text{प्रदक्षिणा काल} = \frac{\text{दीर्घवर्तुळाचे क्षेत्र}}{\text{सूक्ष्म का. एक क्षेत्र}} = \frac{\pi \text{ बृहदक्ष अर्ध} \times \text{लघ्वक्षार्ध}}{\frac{1}{2} j}$$

$$\text{आता } a^2 = \text{बृहदक्षार्ध} \text{ आणि } b^2 = \text{लघ्वक्षार्ध}$$

$$\text{आणि } c^2 = a^2(1 - e^2); c = a\sqrt{1 - e^2}$$

$$\text{तसेच } j^2 = m v^2(1 - e^2)$$

म्हणून

$$\begin{aligned} \text{प्रदक्षिणा काल} &= \frac{\pi a b}{\frac{1}{2} j} = \frac{2 \pi a \times b \sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{m \times v^2(1 - e^2)}} \\ &= 2 \pi \sqrt{\frac{a^3}{m}} \end{aligned}$$

ह्याच सवशावरून परमाणूची म्हणजे ग्रहाची मध्यम गतीही समजते ती अशी—

$$\begin{aligned} \text{मध्यमगति} &= \frac{2 \pi}{\text{प्रदक्षिणा काल}} = 2 \pi \div 2 \pi \sqrt{\frac{a^3}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{m}{a^3}} \end{aligned}$$

३०८. गतिशास्त्रातील काही सिद्धांत मागच्या व ह्या अशा दोन प्रकरणात दिले आहेत. आकर्षण करणारा एकच पदार्थ असेल तर आकर्षित पदार्थाचे गमन कशा गतीने होईल हे एकदयाच सिद्धांतानी ठरविता येते. पण स्वस्थ पदार्थांपैकी प्रत्येक ग्रह दुसऱ्यास आकर्षण करितो. ह्यामुळे प्रत्येक ग्रहाच्या गमनात भिन्नत्व येते. तथापि सूर्याच्या मद्दत महत्त्वामुळे ग्रहाचे आकर्षण सूर्याच्या आकर्षणाच्या तुलनेने अत्यंत अल्प आहे. म्हणून ग्रहाच्या आकर्षणाचा विचार मागे ठेवून सूर्याकर्षणाने ग्रहगतीचा विचार करूं.

• •

प्रकरण अकरावें

ग्रहाचें कक्षेतील स्थान

३००. विवक्षित काली ग्रह आकाशातील कोणत्या स्थानी आहे हें ठरविणें ग्रहगणितातील मुख्य कार्य आहे. ग्रहाचे गमनमार्ग म्हणजे कक्षा वर्तुळाकृति असल्या, आणि त्याचे स्थान पाहणारा त्या वर्तुळाच्या मध्यबिंदुस्थळी असता तर हे कार्य अत्यंत स्वल्प झाले असते. परंतु वस्तुस्थिति तशी नाही. म्हणजे ग्रहाच्या कक्षा वर्तुळाकृति नाहीत, आणि पाहणाराही त्या वर्तुळाच्या मध्य बिंदुस्थानी नाही. ग्रहगतीच्या सिद्धांतावरून आणि दुसऱ्या अनेक प्रमाणावरून ग्रहाच्या कक्षा दीर्घवर्तुळाकृति आहेत. प्रत्येक ग्रहाची स्वतःची गति आणि सूर्याचे आकर्षण, ह्या दोन प्रेरणांनी त्या ग्रहाला वक्ररेषेने गमन करावे लागते, आणि ती वक्ररेषा वर्तुळछिन्नाकृति असते. त्यापैकी, परवलय आणि उद्वलय ह्या वक्ररेषांचे गमनमार्ग ज्याचे आहेत, त्यांना आपण ग्रह म्हणत नाही. त्यास धूमकेतु म्हणतां तथापि काही धूमकेतु दीर्घवर्तुळ कक्षेचेही आहेत.

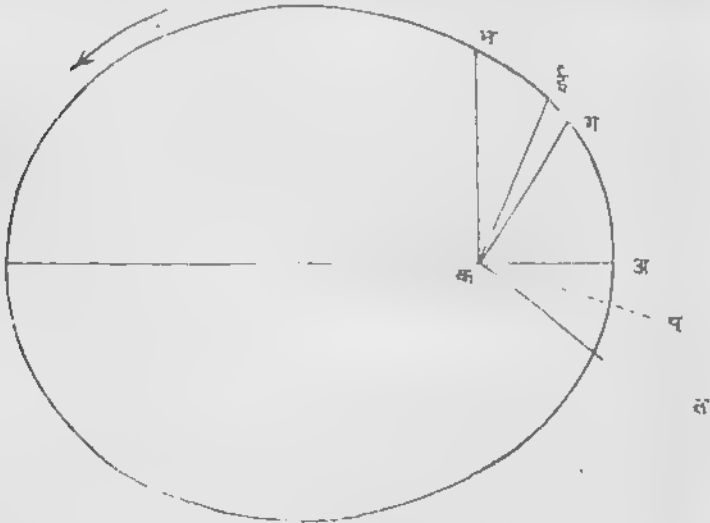
३१०. ग्रहाच्या कक्षा दीर्घवर्तुळाकृतीच्या आहेत त्या दीर्घ वर्तुळाच्या केंद्रात (एका केंद्रात) सूर्य आहे. ग्रहाचे स्थान पाहणारा, कक्षेच्या पेंद्र स्थानी नाही, तो भूपृष्ठावर आहे. यामुळे ग्रहगणिताचे काम निरंकुल मुलम राहिलेले नाही प्रथम अशी कल्पना करावी लागते की, पाहणारा ग्रहकक्षेच्या केंद्रस्थानी अर्थात सूर्यमध्य-बिंदुस्थळी आहे. ह्या कल्पनेप्रमाणे ग्रह आकाशातील अमुक बिंदुस्थळी दिसला पाहिजे असे ठरवावे लागते. नंतर पाहणाराच्या स्थलांतराने ग्रहाच्या स्थानातील भेद ठरवावा लागतो. सूर्यमध्यातून दिसणाऱ्या ग्रहाच्या स्थानास 'रविमध्य ग्रह' म्हणतात, आणि भूमध्यातून दिसणाऱ्या स्थानास 'भूमध्यग्रह' म्हणतात. अशा प्रकारच्या विचाराने ग्रहाचे आकाशातील स्थान ठरविण्याच्या रीति बसविल्या आहेत.

३११. प्रत्येक ग्रह आपल्या कक्षेतील केंद्रस्थानासमोवती म्हणजेच सूर्यासमोवती दीर्घवर्तुळ मार्गाने प्रदक्षिणा करिता. पृथ्वीही त्याप्रमाणेच सूर्यासमोवती फिरते. पृथ्वीच्या कक्षेला क्रानिवृत्त म्हणतात. इतर ग्रहाच्या कक्षा क्रानिवृत्ताच्या पातळीशी किंचित फरकाने असलेल्या पातळीत आहेत, त्यात क्रानिवृत्ताची पातळी हीच सरासरी मापनाला घेतली आहे. प्रथम प्रत्येक ग्रह हा क्रानिवृत्ताच्याच पातळीत फिरतो असे धरून गणित करितात आणि नंतर तो किती अंतर आहे हे त्याचा सरासरी त्यावरून मागतात. प्रत्येक ग्रह दीर्घवर्तुळाच्या केंद्रासमोवती वर्तुळ मार्गाने प्रदक्षिणा करितो असे कल्पून प्रदक्षिणा काढावरून त्याची मध्यम चाल तयार करितात. त्यास मध्यम भोग किंवा मध्यमग्रह म्हणतात नंतर दीर्घवर्तुळ मार्गासुद्धे त्याच्या स्थानात येणारा भेद (अंतर) गणिताने ठरवितात त्या भेदाला 'मंदफल' म्हणतात. ह्या

प्रकरणात पृथ्वी हा ग्रह आणि आकर्षक सूर्य असें घेऊन पृथ्वीचें तिच्या कक्षेतील स्थान ठरवावयाचें आहे. इतर ग्रहांचे स्थान पृथ्वीच्याच मादृश्याने ठरविता येते, तो विचार भागाहून करावयाचा आहे.

३१२. विवक्षित काली विवक्षित ग्रहाचे आरंभ स्थानापासून कमिलेले कोनात्मक अंतर दिलेंलें आहे. ह्या अंतराच्या स्पष्ट भाग म्हणतात. मक्षेपे त्यास स्पष्ट ग्रहच म्हणतात. आणि त्या ग्रहाचे केंद्रमन्निघात आरंभस्थानापासून किती अंतरावर आहे ते दिलें आहे, तसेच ग्रहाच्या प्रवक्षिणाकालावरून त्याची कालाच्या एक परिमाणाने ह्वाणारी चाल. हिला मध्यमगति म्हणतात तीही दिली आहे, आणि ग्रहाच्या दीर्घवर्तुळ कक्षेची केंद्रच्युति दिली आहे तर तो ग्रह रेवती-योगताःयांश्च दिशेने म्हणजेच आरंभ स्थानाविदून कोणत्या काशी होना हे ठरवावयाचें म्हणजे आरंभ स्थानी ग्रह ज्या काली होना त्या क्षणापासून प्रस्तुत क्षणापर्यंत किती काल गेला आहे हे ठरवावयाचें. सध्या आपणाम पृथ्वी आणि सूर्य यांचा विचार करावयाचा आहे. ह्यात सूर्य हा मूळक्षेच्या दीर्घवर्तुळाच्या केंद्रस्थानी आहे तथापि पृथ्वी स्थीर आणि तिच्या सभोवती दीर्घवर्तुळ कक्षेने फिरणारा सूर्य आहे अशी कल्पना केल्यास गणितात दोष येत नाही. ह्या आचारावरून तसे गणित केले आहे.

३१३. सूर्याची अ ई भ ही दीर्घवर्तुळ कक्षा आहे. ह्या कक्षेत ई स्थानी सूर्य



आहे. क हें ह्या कक्षेचे केंद्र आहे, आणि अ हा बिंदु कक्षेचे केंद्र सन्निधान आहे कत ही रेवती योगताःयांची दिशा असून अक्त कोन केंद्र सन्निधानाचा भाग आहे

तकई हा कोन सूर्याचा स्पष्ट भोग आहे. मध्यम गतीने सूर्य ग स्थानी आहे. तकग हा मध्यम सूर्य आहे. सूर्य मध्यम गतीने कन दिजेन ज्या क्षणी होता, त्या क्षणापासून काल मोजावयाचा आहे. सूर्याला मध्यम गतीने त क ग कोन व्रमण्याला क काल लागला आहे. आणि ग ही सूर्याची मध्यम गति आहे. म्हणजे

ग = सूर्याची मध्यम गति.

कग = सूर्याचे मध्यम भोग, तकग कोन.

उ = सूर्याचे केद्रसान्निधान, तकअ कोन.

व = सूर्याचे स्पष्ट भोग. तकई कोन.

व-उ = सूर्याचे मंद केद्र अकई कोन.

३१८. वर जो मिद्धांत मिद्ध करण्याचे योजिले आहे त्यात (व उ) हा कोन दिला आहे, आणि क हा काल शोधावयाचा आहे. तेव्हां काल आणि कोन याचा संबंध दाखविणारे समीकरण आपणास मिळाले पाहिजे. तो संबंध दाखविणारे सूधमाश समीकरण आहे ते म्दानी दाखविल्याप्रमाणे —

$$\text{किवा} \quad \frac{र^3 \frac{सुव}{सूक}}{सूक} = \frac{ज}{र^3} \dots\dots\dots (अ)$$

हे सूधमाश समीकरण असून त्याच्या उजव्या पेट्यातील पदे अव्यक्त आहेत. त्या अव्यक्त पदाच्या किमती व्यक्त पदाने काढून त्या किमती समीकरणात लिहून ती अव्यक्त पदे लुप्त केली पाहिजेत. तेव्हां

$$र^3 = \frac{व^3 (१ - ई^३)^३}{\{१ + ई कोभु (व - उ)\}^३}$$

आणि

$$ज^३ = म व (१ - ई^३) \quad [\text{ले. ३०७}]$$

म्हणून

$$ज = \sqrt{\{म व \times (१ - ई^३)\}}$$

हा किमती वरच्या समीकरण (अ) मध्ये लिहिल्या तर

$$\begin{aligned} \frac{सूक}{सुव} &= \frac{र^३}{ज} = \frac{व^३ (१ - ई^३)^३}{\{१ + ई कोभु (व - उ)\}^३ \times \sqrt{\{म व (१ - ई^३)\}}} \\ &= \frac{\sqrt{\{व^३ (१ - ई^३)^६\}}}{\sqrt{\{म व (१ - ई^३)\}}} \times \{१ + ई कोभु (व - उ)\}^{-३} \\ &= \sqrt{\frac{व^३}{म}} \times (१ - ई^३)^{\frac{३}{२}} \times \{१ + ई कोभु (व - उ)\}^{-३} \end{aligned}$$

परंतु

$$\sqrt{\frac{b}{m}} = \frac{1}{n} = \frac{1}{\text{रवि मध्यम गति}} \quad [\text{ले. ३०७}]$$

म्हणून

$$\frac{\text{सूक}}{\text{सूव}} = \frac{1}{n} (1 - \epsilon^2)^{\frac{3}{2}} \times \left\{ 1 + \epsilon \cos u (b - a) \right\}^{-2} \dots \dots (ब)$$

हे सूक्ष्मांश समीकरण तयार झाले ह्या समीकरणांतील क ची किंमत व च्या किंमतीने काढता येते. ह्या समीकरणांत क हे अवलंबी पद आहे आणि व हे विकारी पद आहे. ह्या समीकरणाच्या दोन्ही पेट्याचे संकलन केले तर येणाऱ्या संख्या समान येतील. ह्या पेट्यातील $\frac{\text{सूक}}{\text{सूव}}$ याचे संकलन क ही संख्या आहे आणि उजव्या पेट्याचे संकलन केले म्हणजे क ची किंमत येईल.

३१५. वरच्या (ब) समीकरणाचे संकलन करावयाचे आहे. संकलन करायला ज्याचे संकलन करावयाचे त्या संख्या एकावयवी असाव्या लागतात. सयुक्त संख्याचे संकलन करता येत नाही. यासाठी ह्या समीकरणाच्या उजव्या पेट्यातील दुसऱ्या अवयवाचा — २ घात करावयाचा आहे तो पहिल्या प्रकरणातील २१ व्या लेखांकाप्रमाणे करता येतो. तो घात विस्तार असा :

$$(1 + \epsilon)^n = 1 + n\epsilon + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \epsilon^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \epsilon^3 + \dots \dots$$

(ब) समीकरणात घातविस्तार केला पाहिजे असे दोन्ही अवयव आहेत, दुसऱ्या अवयवात संकलनीय व संख्या आहे तेव्हा त्याचा घातविस्तार पाहिजे आणि पहिल्या अवयवात ϵ^2 ही संख्या आहे. जरी ही संख्या स्थिर आहे तरी संकलनाची सूक्ष्मता किती पाहिजे हे समजण्यासाठी, म्हणजे $(1 - \epsilon^2)^{\frac{3}{2}}$ ह्यातील ϵ^2 च्या कोणत्या घातापर्यंत सूक्ष्मता पाहिजे यासाठी ह्या अवयवाचाही घातविस्तार केला पाहिजे. हा घातविस्तार खाली दिल्याप्रमाणे होतो. वरच्या समीकरणात अ च्या जागी — ϵ^2 आणि न च्या जागी $+\frac{3}{2}$ लिहा. तेव्हा

$$(1 - \epsilon^2)^{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2} (-\epsilon^2) + \frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1)}{1 \cdot 2} (-\epsilon^2)^2 - 1 - \frac{3}{2} \epsilon^2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \epsilon^4 - \dots \dots \dots (१)$$

पुढचे पद ϵ^4 हे फार सूक्ष्म म्हणून ते सोडले.

हुसऱ्या अवयवात अ च्या जागी ई कोमु (ब-उ) आणि न च्या जागी र ठेविले म्हणजे त्याचा घात विस्तार होईल. प्रथम न = २ घेऊन अ च्या किमतीनेच समीकरण लिहिले तर

$$(१ + अ)^{-१} = १ - २अ + ३अ^२ - ४अ^३ + \dots$$

म्हणून

$$\{१ + ई कोमु(ब-उ)\}^{-१} = \begin{cases} १ - २ई कोमु(ब-उ) + ३ई^२ कोमु^२(ब-उ) \\ ४ई^३ कोमु^३(ब-उ) - ५ई^४ कोमु^४(ब-उ) \\ - ६ई^५ कोमु^५(ब-उ) + \dots \end{cases}$$

ह्या विस्तारात कोमु (ब-उ) ह्या त्रिकोणमिती गुणांतराचा वर्ग घन इत्यादि घात आहे तो ही सकलनाम योग्य नाही. यास्तव त्या घातांच्या किमती (ब-उ) ह्या कोनाच्या पटीच्याकोमुजव्येने दाखविता येतात. लेख २५७ पहा. त्याप्रमाणे किमती पुढच्या समीकरणांत लिहिल्या आहेत.

$$\left\{ \begin{array}{l} १ - २ई कोमु(ब-उ) + ३ई^२ \left\{ \frac{३}{२} \frac{१}{२} कोमु २(ब-उ) \right\} \\ - ४ई^३ \left\{ \frac{३}{२} कोमु(ब-उ) + \frac{३}{२} कोमु ३(ब-उ) \right\} \\ ५ई^४ \left\{ \frac{३}{२} \frac{१}{२} कोमु २(ब-उ) + \frac{३}{२} कोमु ४(ब-उ) \right\} \\ ६ई^५ \left\{ \frac{३}{२} कोमु(ब-उ) + \frac{३}{२} कोमु ३(ब-उ) + \right. \\ \left. \frac{३}{२} कोमु ५(ब-उ) \right\} \\ \dots \dots \dots (२) \end{array} \right.$$

ह्या समीकरणास वरचे समीकरण (१) याने गुणावयाचे आहे, म्हणजे $१ - \frac{३}{२}ई^२ + \frac{३}{२}ई^२$ ह्या प्रत्येक सव्येने गुणावयाचे. १ ह्या सव्येने गुणून जो गुणाकार येईल तो समीकरण (२) मध्ये आहे. $-\frac{३}{२}ई^२$ ने आणि $+\frac{३}{२}ई^२$ ने गुणून आलेले गुणाकार करून खाली लिहिले आहेत. गुणाकाराची सूक्ष्मता $ई^३$ पर्यंत पाहिजे. पुढील नको.

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} \frac{३}{२}ई^२ \frac{३}{२}ई^२ \\ \text{आलेला} \end{array} \right\} \begin{array}{l} - \frac{३}{२}ई^२ + ३ई^२ कोमु(ब-उ) - \frac{३}{२}ई^४ \\ - \frac{३}{२}ई^२ कोमु(२ब-२उ) + \frac{३}{२}ई^२ कोमु(ब-उ) \\ + \frac{३}{२}ई^२ कोमु ३(ब-उ) \end{array} \\ & + \frac{३}{२}ई^२ \frac{३}{२}ई^२ + \frac{३}{२}ई^४ - \frac{३}{२}ई^४ कोमु(ब-उ) \\ & \frac{\text{सूक}}{\text{सूव}} = \frac{१}{२} \left\{ \begin{array}{l} १ - २ई कोमु(ब-उ) + (\frac{३}{२}ई^२ + \frac{३}{२}ई^२) कोमु २(ब-उ) \\ - (\frac{३}{२}ई^२ + \frac{३}{२}ई^२) कोमु ३(ब-उ) + \frac{३}{२}ई^२ कोमु ४(ब-उ) \\ - \frac{३}{२}ई^२ कोमु ५(ब-उ) \end{array} \right. \end{aligned}$$

हे समीकरण सकलतक्षम झाले, याचे संकलन करावयाचे.

३१६. सकलने म्हणजे काय याचे स्पष्टीकरण अनेक वेळां मागे केले आहे. लेख २४५ ने २४९ पहा. तथापि लेख ३०५ मध्ये (अ) आणि (आ) ही दोन समीकरणे आहेत, न्यापैकी (आ) समीकरणाचे सकलन (अ) समीकरण आहे. कारण (आ) समीकरण (अ) समीकरणाचा सूक्ष्मांशगुण आहे. तेव्हा (आ) समीकरणापासून (अ) समीकरण कसे घेतले ती कृति आपणाम पाहिजे आहे. ह्यावरून असे ठरते की सूक्ष्मांशगुण काढताना, भुज्या आणि कोभुज्या ह्या गुणोत्तराचा वेद गुणक तो केंद्रात कायम राहून त्याच पदाला गुणक ह तो जसे (अ) समीकरणामध्ये [स्थकोभु (णव : फ)] ण हा वेदगुणक तो (आ) समीकरणामध्ये [स्थणभु (णव : फ)] ण हा वेदगुणक राहून पदगुणक झाला आहे आता (आ) समीकरणावरून (अ) समीकरणात पद नेणे तर (आ) समीकरणाने पदाला जो स्थण गुणक आहे त्याला ण ने भागिले पाहिजे.

ज्या पदाचे सकलन करावयाचे त्या पदाला जर स्थीर गुण असेल तर तो गुणक सकलनात जशाचा तसाच राहतो. सकलनात जर वेद विरहित स्थीर मर्या असेल तर त्याला विकारी पद गुणक होतो. जसे

$$\frac{\text{भुय}}{\text{मूल}} = १ + फ, \text{ तर } य = क्ष + फक्ष.$$

ह्यावरून पाहता $१ + \frac{१}{४} \text{ कोभु } ४ (ब उ)$ ह्या पदाचे सकलन $\frac{५}{४} \text{ भु } ४ (ब-उ)$ हे आहे ह्याप्रमाणे वरच्या समीकरणाचे सकलन केले तर ते खाली दिल्याप्रमाणे होईल.

एखाद्या राशीचा सूक्ष्मांश गुण काढताना त्या राशीमध्ये जर स्थीर पद असेल तर त्याचा लोप होत असतो. पण ते पद सकलनात घेतलेच पाहिजे ते पद सूक्ष्मांश समीकरणात लुप्त झालेले असते ते कोणते घ्यावे असा प्रश्न असतो. पण तो पूर्वानुमानाने सोडवावा लागतो. ह्या पदाला स्थीर क्षेत्रक म्हणू त्याप्रमाणे ह्या समीकरणाने प ही स्थीर मर्या क्षेत्रक उत्पन्न झाला असे घेऊ. यावरून

$$\begin{aligned} क-प + \frac{१}{४} \left\{ ब - २ \frac{१}{४} \text{ भु } (ब-उ) : \left(\frac{३}{४} \frac{१}{४} + \frac{१}{४} \frac{१}{४} \right) \text{ भु } २ (ब उ) \right. \\ \left. - \left(\frac{३}{४} \frac{१}{४} + \frac{३}{४} \frac{१}{४} \right) \text{ भु } ३ (ब-उ) + \frac{३}{४} \frac{१}{४} \text{ भु } ४ (ब-उ) \right. \\ \left. - \frac{३}{४} \frac{१}{४} \text{ भु } ५ (ब-उ) + \dots \dots \dots (क) \right\} \end{aligned}$$

३१७. वर मिळविलेले समीकरण कालाचे आहे. क हा काल आहे. परंतु कालाचा अर्थबोध काही होत नाही. कारण काल हा अनंत आहे. म्हणून क सख्या काल विभागाची आहे. काल विभाग म्हटला म्हणजे त्या विभागाला आरंभ आणि

शेवट पाहिजे आहे. हा काल विभागाचा शेवटचा क्षण रवीचे स्पष्ट भोग व ज्या क्षणी होणे तो क्षण होय. पण व भोगाचे चलन विषम आहे; काही काल विभागात जास्त तर काहीमध्ये कमी. म्हणून मध्यम सूर्य ज्या क्षणी ० होतो तो क्षण क ह्या कालाचा आरंभक्षण होय. ह्यावरून वरच्या समीकरणान जी प ही मर्या सकलनात उत्पन्न झाली आहे ती आपण आरंभक्षण जो स्वीकार त्यावर अवलंबून आहे. चल त्रिज्येने आक्रमिलेला कोन मोजण्यास कानिक्त्तस्थ पौष्णांत विदुची दिशा ही आरंभ स्थानी मानिली आणि कालाच्या आरंभक्षणीची चल त्रिज्या आणि कोनाच्या आरंभाची चल त्रिज्या ह्या एकच मानित्यास त्यामध्ये अंतर ० असावयाचे म्हणून प ही सख्या ० आहे. पण भोग म्हणजे व कोन मोजण्यास क प ही चल त्रिज्या आरंभ मानित्यास, (३१३ लेखातील आकृति पहा) त क प कोन क्रमण्यास चल त्रिज्येला लागलेला काल हा प होय. तेव्हा प ची किंमत केव्हा किती घ्यावयाची हे क प च्या सस्थितिप्रमाण निरनिराळी होईल. तून आम्ही कत हीच आरंभक्षणीची त्रिज्या असे घेऊन चालू.

वरचे समीकरण कालाचे आहे. पण ह्या समीकरणातील ग ही सख्या सोडून बाकी सर्व भावसम्या म्हणजे केवळ सख्या आहेत म्हणजे त्यास एक ठेव परिणाम आहे. ग ही मर्या वेग म्हणजे रेखा (वक्र आणि गरळ) आहे किंवा कोन आहे. (आमच्या ह्या गणितकार्यात कोन प्रेरणा दोन विदूमधील अंतर हे आम्ही रेपेनेच दाखवितो). ग ही कोनाची मर्या आहे आणि ती अशादिनी न दाखविता $\frac{\text{कम}}{\text{त्रिज्या}}$ ह्या वृत्तपरिमाणाने दाखविली आहे. (वृत्तपरिमाण लेख ४३, ४८ पहा.)

ग ही चल त्रिज्येने त्रिमिलेल्या कोनाची मर्या आहे, आणि त्या सत्येचे परिमाण वर्तुळाच्या त्रिज्येइतक्या लांबीच्या कसाबरेचा मध्यकोण हे आहे. ग कोन हा कालाच्या एक परिमाणान चल त्रिज्येने आक्रमिलेला आहे. आणि तो मध्यम गतीचा आहे, यामाठी तो कालाच्या दिवस घटिका किंवा पळ ह्यांपैकी ह्या त्या परिमाणाचा मानिता येतो. ह्यावरून ग हा वेग किंवा गति ज्या बरल परिमाणातील असेल त्या काल परिमाणाची क ही मर्या आहे असे ठरते.

वरचे समीकरण ग ने गुणिले म्हणजे क ग हा कोन होईल आणि तो मध्यम रवीचा होईल.

$$\text{क ग} = \begin{cases} \text{व}-२ \text{ ई' मु (व-उ) } + \frac{३}{४} \text{ ई' मु २ (व-उ)} \\ - \frac{३}{४} \text{ ई' मु ३ (व-उ) } + \frac{३}{४} \text{ ई' मु २ (व-उ)} \\ \frac{३}{४} \text{ ई' मु ३ (व-उ) } + \frac{३}{४} \text{ ई' मु ४ (व-उ)} \\ - \frac{३}{४} \text{ ई' मु ५ (व-उ) } + \dots \dots \dots (\text{भ}) \end{cases}$$

३१८. कोणत्यानरी एका क्षणी स्पष्ट सूर्य व कोनात्मक आहे व त्याच क्षणी रवीचे केंद्र मन्निधान उ कोनात्मक आहे. आणि हे दोन्ही कोन भूमध्यातून रेवती योगताच्याच्या दिशेची जी रेषा ती आरम्भ घेऊन भोजिलेले आहेत, तर त्या क्षणी मध्यम सूर्य किती होता हे कग ह्या कोनाने कळते. (भूमध्य आणि रेवती तारा याची जी दिशा तिशी समांतर सूर्यमध्य आणि रेवती तारा याची दिशा असते)

कग हा मध्यम सूर्य आहे त्याला ग ने म्हणजे रवीच्या मध्यम गर्तीने भागिल्याम क हा काल समजतो.

इ ही केंद्रच्युति आहे निर्गनगळ्या प्रहाची केंद्रच्युति निर्गनगळी आहे. रवि (भू) कक्षेची केंद्रच्युति ०.०१६७३५१ आहे आणि ह्या केंद्रच्युतीने वृत्तपरिमाण एक ५७ २९५.७८ अंश आहे. या सूर्याचा गुणाकार इ च्या बरोबर अंशात्मक किंमत होईल.

३१९. स्पष्ट सूर्यावरून रवीचे केंद्र मन्निधान जात असता मध्यम रति माग-नाचे समीकरण वर मिद्ध केले आहे ते (भ) समीकरण होय. हे भोगाचे समी-करण होय आणि ते मध्यम भोग मागताचे आहे हे समीकरण वेधाने पृथ्वीना प्रदक्षिणाकाल म्हणजे सूर्याचा प्रदक्षिणाकाल ठरविण्यास उपयोगी येते वर्ष-मानही ठरते. या कामी व, उ आणि इ ह्या तीन सख्या जात असाव्या लागतात, आणि त्या वेधाने मोजिता येतात. याचा विचार पुढे करूं.

३२०. आता मध्यम सूर्य आणि केंद्र मन्निधान यावरून स्पष्ट सूर्य वसा मागता तें समीकरण आणाला मिद्ध करावयाचे आहे. या कार्यकारिता वाही स्वतंत्र योजना करावयास नको वर जे (भ) समीकरण मिद्ध केले आहे त्यावरूनच सूर्याच्या स्पष्ट भोगाचे समीकरण मिद्ध होते. तो प्रकार आता दाखविनो. लग्न २६२ मध्ये य चें समीकरण दिले आहे तें असे—

$$य = क्ष + पमुनक्ष + दमुमक्ष + तमुकक्ष + चमुगक्ष$$

ह्या समीकरणातील क्ष ची किंमत काढावयाची आहे. हे कार्य केस २६६ मधील शेवटच्या (च) समीकरणावरून करिता येतें.

आपले (भ) समीकरण हे ह्याच समीकरणाप्रमाणे आहे. वसे ते पहा. (भ) समीकरणाच्या दोन्ही पेट्यात उ वजा केला तेव्हां—

$$कग - उ - व - उ - २ इ मु (व - उ) - \frac{३}{४} इ मु २ (व - उ) - इत्यादि.$$

यावरून ह्या दोन्ही समीकरणांतील सामान्य सख्याचे सादृश्य किंवा सगत्वरूप-
पणा लक्षांत येईल तो मी खाली दाखवितो.

य — कग — उ आणि क्ष = व — उ.

न = १, म = २, क = ३, ग = ४.

प = — २इ, द = + ३इ^२, त = — ३इ^३.

च = + ३इइ^२ आणि च = + ३इ^३.

ह्या क्रमिती (च) समीकरणामध्ये ठेवून पदे तयार करू, (च) समीकरण चवथ्या
पदवीपर्यंत आहे, आणि कग चे समीकरण पाचव्या पदवीपर्यंत आहे. ही ५ व्या
पदवीची पदे मागे ठेवू (च) समीकरणात १७ पदे आहेत. त्या प्रत्येक पदापासून
कग चे कोणते पद निघते ते सोधू. ही पदे क्रमाने एकाम्बालीं एक लिहिली आहेत.

$$(१) - पमुनय = -(- २इ) मु१ (कग - उ) \\ = + २इमु (कग - उ)$$

$$(२) - दमुमय = -(+ ३इ^२) मु२ (कग - उ) \\ = + ३इ^२ मु२ (कग - उ)$$

$$(३) + ३पंनमु२नय = + ३ (+ ४इ^३) मु२ (कग - उ) \\ = + २इ^३ मु२ (कग - उ)$$

$$(४) - तमुकय = -(३) ठंमु३ (कग - उ) - १ इ^२ मु३ (कग - उ)$$

$$(५) - ३पंनं मुनय = ३ (२इ) मु (कग - उ) = - २मु (कग - उ)$$

$$(६) - ३पंनं मु३नय = - ३ (- २इ) मु३ (कग - उ) \\ = + ३इ^३ मु३ (कग - उ)$$

$$(७) - ३पद (म - न) मु (म - न) य = - ३इ^३ मु३ (कग - उ) \\ = - ३इ^३ मु३ (कग - उ)$$

$$(८) - ३पद (म - न) मु (म - न) य = + ३इ^३ मु (कग - उ)$$

$$(९) - ३पंनं मु२नय = - ३ \times १६इ^३ मु२ (कग - उ) \\ = - ३इ^३ मु२ (कग - उ)$$

$$(१०) + ३पंनं मु४नय = + ३ \times १६इ^३ मु४ (कग - उ) \\ = + ३इ^३ मु४ (कग - उ)$$

$$(११) - ३पदमं मुमय = - ३ \times ४इ^३ इ^३ \times ४ मु२ (कग - उ) \\ = + ३इ^३ मु२ (कग - उ)$$

$$(१२) - ३पद (म + २न) मु (म + २न) य = - ३ \times ४इ^३ / ३इ^३ \\ \times १६ मु४ (कग - उ) = - ६इमु४ (कग - उ)$$

$$(१३) + ३पद (म - २न) मु (म - २न) य = ०$$

$$(१४) + \frac{१}{२} \text{पत (क + न) मु (क + न) य} = + \frac{१}{२} \text{इ'मु (कग — उ)}$$

$$(१५) - \frac{१}{२} \text{पत (क — न) मु (क — न) य} = - \frac{१}{२} \text{इ'मु२ (कग — उ)}$$

$$(१६) + \frac{१}{२} \text{इ'ममु२ मय} = + \frac{१}{२} \times \frac{१}{२} \text{इ' } \times \frac{१}{२} \text{इ' } \times २ \text{मु४ (कग — उ)}$$

$$= + \frac{१}{२} \text{इ'मु४ (कग — उ)}$$

$$(१७) + \frac{१}{२} \text{इ' सुगय} = = + \frac{१}{२} \text{इ'मु४ (कग — उ)}$$

$$(१८) + \frac{१}{२} \text{इ' सुगय} = = + \frac{१}{२} \text{इ'मु२ (कग — उ)}$$

ही निघालेली १८ पदे इ च्या घानाच्या क्रमाने एकत्र केली तर ४ थ्या पदवी-पर्यंत समीकरण तयार होते. लेख २६६ मध्ये सांगितलेल्या क्रमाने पाचव्या पदवीची पदे जोडिता येनात. ती पदे शोधून तीही खाली लिहिली आहेत. वरच्या भ समीकरणात उ वजा केला होता तो मिळविला तेव्हा (भ) समीकरणाचे स्वरूप खाली लिहिल्याप्रमाणे होते :—

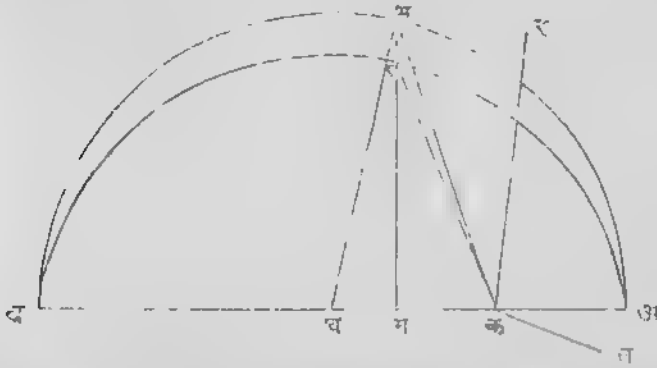
$$\text{य} - \left\{ \begin{array}{l} \text{कग} + २ \text{इ'मु (कग—उ)} + \frac{१}{२} \text{इ'मु२ (कग—उ)} \\ + \frac{१}{२} \text{इ'मु३ (कग—उ)} - \frac{१}{२} \text{इ'मु (कग—उ)} \\ + \frac{१}{२} \text{इ'मु४ (कग — उ)} - \frac{१}{२} \text{इ'मु२ (कग — उ)} \\ + \frac{१}{२} \text{इ'मु५ (कग—उ)} - \frac{१}{२} \text{इ'मु३ (कग—उ)} \\ + \frac{१}{२} \text{इ'मु (कग—उ)} \end{array} \right.$$

३२१. मध्यम भूयाने स्पष्ट सूर्य साधनाचे हे समीकरण मिद्ध केले हे समीकरण आणि लेख ३१७ मधील (भ) समीकरण, ही दोन्ही समीकरणे सूर्य किंवा पृथ्वी याच्या कक्षेला उल्लेखून लिहिली आहेत. परंतु ती समीकरणे सामान्यत्वेन लिहिली आहेत. दीर्घवर्तुळकक्षा आणि ती कक्षा निर्माण करणारा आकर्षक त्या दीर्घवर्तुळाच्या एका वेद्रान अशी जी कक्षा असेल तिला उद्देशून ही समीकरणे मिद्ध केली आहेत. हीच समीकरणे पाश्चात्य ग्रंथांत मिद्ध केली आहेत, परंतु त्याची मिद्धता निगळ्या प्रकारची आहे. त्याच्या मिद्धतेन व्यापकपणा फार आहे तसा माझ्या मिद्धतेत नाही. बुधादि नेपच्यून पर्यंत ग्रह आणि चंद्र याच्या कक्षा दीर्घवर्तुळात्मक आहे एवढाच विचार माझ्या मिद्धतेत आहे. परबल्य उद्बल्य ह्या आकाराचे घूमकेतूचे मार्ग याचा विचार केला नाही. वर जी समीकरणे मिद्ध केली त्याची मिद्धता मित्र असली तरी अंत्य स्वरूप प्रत्येक समीकरणाचे एकच आहे. हेंच कार्य एका इंग्लिश ग्रंथान अन्य प्रकारे केले आहे, तो प्रकारही न्यायी दाखविता परंतु सर्वस्वी तोच प्रकार मला दाखविता येत नाही. कारण ह्या ग्रंथान जी साधन मिद्ध केली आहेत त्याच्यावाहेर मला ज्ञान येत नाही.

३२२. एक परमाणु आकर्षक केंद्रासमोवती दीर्घवर्तुळ कक्षेने गमन करित आहे. ने आकर्षक केंद्र दीर्घवर्तुळाच्या केंद्रात आहे. तर त्या परमाणूचे कक्षेतील स्थान,

त्याचे केंद्रापासून अर आणि कक्षेतील एका ठराविक बिंदुपासून प्रस्तुत स्थानी येण्यास लागलेला काल याचे अन्योन्य संबंध ठरवावयाचे.

अपद हे दीर्घ वर्तुळ आहे, आणि अद हा त्याचा बृहदक्ष आहे. क हे त्याचे एक नेत्र आहे, अर्थात अ ह्याचे नेत्र सन्निधान आहे. घ हा त्या दीर्घवर्तुळाचा मध्य आहे. ह्या



दीर्घवर्तुळ कक्षेत ग हे परमाणूचे स्थान आहे. घ मध्य वरून पत्र किंवा घट विज्याने अदद वर्तुळ काढिले. ह्या वर्तुळाम अक्षोखचून म्हणा. प बिंदुपासून अद वर पम लव केला, मग वर्तुळाच्या म स्थानी मिळाली. कप, कभ आणि कघ रेखा मांडल्या.

या सिद्धनेत काही पारिभाषिक अवयवाजना आहे ती अशी

अ क प कोन = स्पष्टग्रह — केंद्र सन्निधान = व घेऊ.

व = हे स्पष्ट मंदकेंद्र होय (आरंभ स्थान के. सं. मानिले)

अ घ भ कोन = मध्येतर मंदकेंद्र = य घेऊ.

ग ही ग्रहाची मध्यमगति आहे, तेव्हां $\frac{३६०}{ग} = \frac{२\pi}{ग}$ हा

त्या ग्रहाचा प्रदक्षिणा काल आहे. क हा एक फाट विभाग आहे. ह्या काल विभागात तो ग्रह क व येण्यासून म्हणजे नेत्र सन्निधानापासून वर अंतर आक्रमील हे त्या ग्रहाचे मध्यम मंदकेंद्र आहे. हे अंतर कघ आणि कभ ह्या दोन चळ विज्या-मधील अंतर कोन होय. आता प्र. का. ह्या त्या ग्रहाचा प्रदक्षिणाकाल म्हटला तर

$$ग = \frac{२\pi}{प्र. का.}$$

$$आणि \quad \frac{क ग}{२\pi} = \frac{क}{प्र. का.}$$

$$\text{कोभुव} - \text{इकोभुय कोभुव} = \text{कोभुय} - \text{इ}$$

$$\text{कोभुव} (1 - \text{इकोभुय}) = \text{कोभुय} - \text{इ}$$

$$\text{कोभुव} = \frac{\text{कोभुय} - \text{इ}}{1 - \text{इकोभुय}}$$

आणि

$$\begin{aligned} \text{स्प } \frac{व}{२} &= \sqrt{\left(\frac{1 - \text{कोभुव}}{1 + \text{कोभुव}} \right)} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1 - \text{इकोभुय} - \text{कोभुय} + \text{इ}}{1 - \text{इकोभुय} - \text{कोभुय} - \text{इ}} \right)} \\ &= \sqrt{\left(\frac{(1 + \text{इ})(1 - \text{कोभुय})}{(1 - \text{इ})(1 + \text{कोभुय})} \right)} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1 + \text{इ}}{1 - \text{इ}} \right)} \text{स्प } \frac{य}{२} \dots\dots\dots (२) \end{aligned}$$

$$\text{म्हणून } \text{स्प } \frac{य}{२} = \left(\frac{1 - \text{इ}}{1 + \text{इ}} \right)^{\frac{१}{२}} \text{स्प } \frac{व}{२} \dots\dots\dots (३)$$

२२४. चरक्या (२) ह्या समीकरणाच्या मूल्याने व ची किंमत ठरविता येते. ह्या समीकरणाचे स्वरूप देख २४४ समीकरण (२) प्रमाणे आहे. ते स्वरूप असें

$$\text{स्प } \frac{व}{२} - \text{न स्प } \frac{य}{२}$$

ह्यातील व च्या जागी $\frac{व}{२}$ आणि य च्या जागी $\frac{य}{२}$ व न च्या जागी $\sqrt{\left(\frac{1 + \text{इ}}{1 - \text{इ}} \right)}$ ही संख्या आहे. आणि निमनीच्या विमाराची जी श्रेणी आहे तिच्यात न च्या जागी $\left(\text{म} = \frac{1 - \text{न}}{1 + \text{न}} \right)$ म ही संख्या वापरली आहे. तेव्हां

$$\begin{aligned} \text{म} &= \frac{1 - \text{न}}{1 + \text{न}} = \frac{1 - \sqrt{\left(\frac{1 + \text{इ}}{1 - \text{इ}} \right)}}{1 + \sqrt{\left(\frac{1 + \text{इ}}{1 - \text{इ}} \right)}} \\ &= \frac{\sqrt{(1 - \text{इ})} - \sqrt{(1 + \text{इ})}}{\sqrt{(1 - \text{इ})} + \sqrt{(1 + \text{इ})}} \times \frac{\sqrt{(1 - \text{इ})} - \sqrt{(1 + \text{इ})}}{\sqrt{(1 - \text{इ})} - \sqrt{(1 + \text{इ})}} \\ &= \frac{(1 - \text{इ}) + (1 + \text{इ}) - 2\sqrt{(1 - \text{इ}^2)}}{(1 - \text{इ}) - (1 + \text{इ})} \\ &= \frac{१}{२\text{इ}} \left\{ २ - 2\sqrt{(1 - \text{इ}^2)} \right\} = \frac{1 - \sqrt{(1 - \text{इ}^2)}}{\text{इ}} \end{aligned}$$

लेख २४४ सर्वोच्च समीकरण (२) मध्ये व, य आणि म च्या किमती मिळवल्या तेव्हा

$$\begin{aligned} \frac{व}{२} = \frac{य}{२} + \frac{१ - \sqrt{(१ - इ^२)}}{इ} भु३ + \frac{1}{३} \frac{\{१ - \sqrt{(१ - इ^२)}\}^३}{इ^३} भु२ य \\ + \frac{१}{३} \frac{\{१ - \sqrt{(१ - इ^२)}\}^३}{इ^३} भु३ य + \frac{१}{३} \frac{\{१ - \sqrt{(१ - इ^२)}\}^३}{इ^३} भु४ य + \dots (व) \end{aligned}$$

ह्या समीकरणातील मयूक पदाच्या किमती इ च्या घातावलीच्या तयार करून, इ च्या पड घात,पेक्षा जास्त घाताची जरूर नाही, असे घेऊन गणित करू ह्या गणिताच्या सोयीकरिता

$$\begin{aligned} \sqrt{(१ - इ^२)} &= (१ - इ^२)^{\frac{१}{२}} \\ (१ - इ^२)^{\frac{१}{२}} &= १ - \frac{१}{२} इ^२ - \frac{१}{२} इ^४ - \frac{१}{२} इ^६ - \frac{१}{२} इ^८ - \dots \text{ [ले. २१]} \\ \frac{१}{इ} \{१ - (१ - इ^२)^{\frac{१}{२}}\}^३ &= \frac{१}{इ} (इ^२ + \frac{१}{२} इ^४ + \frac{१}{२} इ^६ + \frac{१}{२} इ^८ + \dots) \\ &= -म \}. \end{aligned}$$

म्हणून

$$\begin{aligned} -म &= \frac{१}{२} इ + \frac{१}{२} इ^३ + \frac{१}{२} इ^५ + \frac{१}{२} इ^७ + \dots \\ &= \frac{१}{२} इ (१ + \frac{१}{२} इ^२ + \frac{१}{२} इ^४ + \frac{१}{२} इ^६ + \dots) \\ &= \frac{१}{२} इ (१ + घ) \\ (-म)^न &= \frac{इ^n}{२^n} \left\{ १ + घ \right\}^न \\ &= \frac{इ^n}{२^n} \left\{ १ + नघ + \frac{न(न-१)}{१ \cdot २} घ^२ + \frac{न(न-१)(न-२)}{१ \cdot २ \cdot ३} घ^३ + \dots \right\} \end{aligned}$$

ह्या समीकरणात न = १ ; न = २ , न = ३ इत्यादि संख्या घेऊन (-म) चा एक घात, वर्ग, घन, चतुर्वर्तन याच्या किमती इच्या घातावलीने काढू त्यामादी घ घ^२ घ^३ इत्यादि किमती काढिल्या पाहिजेत. तेव्हा

$$\begin{aligned} व &= \frac{१}{२} इ^२ + \frac{१}{२} इ^४ + \frac{१}{२} इ^६ \\ &= \frac{१}{२} इ^२ (१ + \frac{१}{२} इ^२ + \frac{१}{२} इ^४) \\ व^२ &= \frac{१}{२} इ^४ (१ + \frac{१}{२} इ^२)^२ = \frac{१}{२} इ^४ (१ + इ^२) \\ &= \frac{१}{२} इ^४ + \frac{१}{२} इ^६ \\ व^३ &= \frac{१}{२} इ^६ \end{aligned}$$

ह्या ध च्या किमती $(-m)$ याच्या घातविस्तारान लिहिल्या आणि $n=1$;
 $n=2$ इत्यादि संख्या घेऊन ते घातविस्तार लिहिले तेव्हा

$$\begin{aligned} -m &= \frac{1}{2}d\left(1 + \frac{1}{2}d^2 + \frac{1}{2}d^4\right) \\ +m^2 &= \frac{1}{2}d^2\left\{\left(1 + \frac{1}{2}d^2 + \frac{1}{2}d^4\right) + \frac{1}{2}d^2\right\} \\ &= \frac{1}{2}d^2\left(1 + \frac{1}{2}d^2 + \frac{1}{2}d^4\right) \\ -m^3 &= \frac{1}{2}d^3\left(1 + \frac{1}{2}d^2\right) \\ +m^4 &= \frac{1}{2}d^4\left(1 + \frac{1}{2}d^2\right) \\ -m^5 &= \frac{1}{2}d^5\left(1 + \frac{1}{2}d^2\right) \\ +m^6 &= \frac{1}{2}d^6 \end{aligned}$$

३२५. वरच्या लेखातील (व) समीकरणात y , my , my^2 इत्यादि मध्येतर
 मदकेद्राच्या मध्या आढे त्याच्या किमती लेख ३२२ मधील समीकरण (१) च्या
 आधारे तयार होताना. ह्या मध्या पदवी पदवीने तयार करिता येताना. त्याचा
 उपक्रम खाली लिहिल्याप्रमाणे:—

$$y = कग + इभुय$$

ह्या समीकरणाच्या दोन्ही पेट्याची भुज्या केळी, तेव्हा

$$मुय = मु(कग + इभुय)$$

$$= मु(कग) कोमु(इभुय) + कोमु(कग) मु(इभुय)$$

भुय ह्या पदाला इ हा गुणक आहे, म्हणून इभुय याला इ गुणक आल्यास तें पद
 इ चे गुणक दुगुना पदवीचे होईल, याकारिता मु (इभुय) आणि कोमु (इभुय)
 हीं पदे अनुक्रमे ० व १ भानिली

$$\text{तेव्हा} \quad इभुय = इमु(कग)$$

$$\text{म्हणून} \quad य = कग + इमु(कग) \quad \dots(१)$$

ह्या समीकरणाच्या दोन्ही पेट्याची भुज्या केळी, तेव्हा

$$मुय = मु(कग) कोमु(इभुय) + कोमु(कग) मु(इभुय) \text{ ह्या विस्तारान}$$

$$कोमु(इभुय) = १ - \frac{1}{2}इ^2मु^2कग$$

$$मु(इभुय) = इभुयकग$$

दुगुना पद शीर्षान गणित ह्ये म्हणून इ चे पद घेतावे होईल म्हणून सोडून दिले

$$इभुय = इभुयकग + इ^2मु^2कग कोमुकग$$

$$= इभुयकग + \frac{1}{2}इ^2भुर(कग)$$

$$\text{म्हणून} \quad य = कग + इभुयकग + \frac{1}{2}इ^2भुर(कग) \quad \dots(२)$$

ह्याप्रमाणे आलेल्या समीकरणातील य पदाची भुज्या लेख २६० प्रमाणे करून जें समीकरण होईल त्याच्या इ ने मुणून कग मध्ये मिळविले म्हणजे य चे समीकरण पुढच्या पदवोला जाईल. त्याप्रमाणे

य = कग + इभुकग + $\frac{१}{३}$ इ'भु२कग + $\frac{२}{३}$ इ'भु३कग — $\frac{१}{३}$ इ'भुकग... (३)
ह्याप्रमाणे य ची किमत कग च्या शिखरीने '०' व्या पदवीपर्यंत तयार केली तर ती खाली दाखविल्याप्रमाणे होते :—

$$य = \left\{ \begin{array}{l} \text{कग} + (६ - \frac{१}{३}इ' - \frac{१}{३}इ'इ')\text{भुकग} + (\frac{१}{३}इ' - \frac{१}{३}इ')\text{भु२कग} \\ + (\frac{१}{३}इ' - \frac{१}{३}इ'इ')\text{भु३कग} + \frac{१}{३}इ'\text{भु४कग} + \frac{१}{३}इ'इ'\text{भु५कग} \end{array} \right. \dots (५)$$

याप्रमाणेच

$$- २\text{मभुय} = \left\{ \begin{array}{l} (६ + \frac{१}{३}इ' + \frac{१}{३}इ'इ')\text{भुकग} + (\frac{१}{३}इ' - \frac{१}{३}इ')\text{भु२कग} \\ + (\frac{१}{३}इ' - \frac{१}{३}इ'इ')\text{भु३कग} + \frac{१}{३}इ'\text{भु४कग} + \frac{१}{३}इ'इ'\text{भु५कग} \end{array} \right. \dots (अ)$$

$$- ३\text{म'भु२य} = \left\{ \begin{array}{l} (- \frac{१}{३}इ' + \frac{१}{३}इ'इ')\text{भुकग} + (\frac{१}{३}इ' - \frac{१}{३}इ')\text{भु२कग} \\ + (\frac{१}{३}इ' - \frac{१}{३}इ'इ')\text{भु३कग} + \frac{१}{३}इ'\text{भु४कग} + \frac{१}{३}इ'इ'\text{भु५कग} \end{array} \right. \dots (आ)$$

$$- ३\text{म'भु३य} = \left\{ \begin{array}{l} (- \frac{१}{३}इ'उ')\text{भुकग} + (- \frac{१}{३}इ')\text{भु२कग} \\ + (\frac{१}{३}इ' - \frac{१}{३}इ'इ')\text{भु३कग} + \frac{१}{३}इ'\text{भु४कग} + \frac{१}{३}इ'इ'\text{भु५कग} \end{array} \right. \dots (इ)$$

$$+ ३\text{म'भु४य} = + (- \frac{१}{३}इ'इ')\text{भु३कग} + \frac{१}{३}इ'\text{भु४कग} + \frac{१}{३}इ'इ'\text{भु५कग} \dots (ई)$$

$$- ३\text{म'भु५य} = + \frac{१}{३}इ'इ'\text{भु५कग} \dots (उ)$$

य च्या समीकरणांत म्हणजे (५) ह्या समीकरणान (अ) (आ) (इ) (ई) (उ) ही पाच समीकरणे मिळविली म्हणजे व ह्या स्पष्ट मदवेद्राची किमत कग ह्या मध्यम मंदकेंद्रानें येते. ते समीकरण खालीं दिल्याप्रमाणें :—

$$व = \left\{ \begin{array}{l} \text{कग} + २\text{इभुकग} + \frac{१}{३}इ'\text{भु२कग} \\ + \frac{१}{३}इ'इ'\text{भु३कग} - \frac{१}{३}इ'\text{भुकग} \\ + \frac{१}{३}इ'इ'\text{भु४कग} - \frac{१}{३}इ'\text{भु२कग} \\ + \frac{१}{३}इ'इ'इ'\text{भु५कग} - \frac{१}{३}इ'इ'इ'\text{भु३कग} \\ + \frac{१}{३}इ'इ'इ'\text{भुकग} \end{array} \right.$$

३२६. वग जें समीकरण मिद्ध केल्ले ते आणि लेख ३२० मधील समीकरण ही दोन्ही अगदी सुक्ष्मपणे बरोबर आहेत. ही दोन समीकरणे दोन प्रवासांनी मिद्ध केली असून अगदी व्याख्या एकदम आली आहेत त्याअर्थी ती समीकरणे बरोबर आणि शुद्ध आहेत. आणि ज्या कल्पनेने गणित केले आहे ती कल्पनाही सत्य आहे. मकूनदर्शनी ह्या दोन्ही समीकरणांत जें भिन्नत्व दिसते तें भिन्नत्व नाही पूर्व समीकरणांत ज्या व आणि कग ह्या सख्या आहेत त्या कन ह्या विशेषासून मोजिल्ल्या आहेत (लि. ३२० आकृ. पहा) आणि वगच्या समीकरणातील सख्या क अ रेपेपासून मोजिल्ल्या आहेत. म्हणून पूर्वीचा व कोन हा प्रस्तुत व कोनापेक्षा तक्क कोनाने मोठा आहे. प्रस्तुत व कोन वा कोनाने दाखविला तर

$$व - वा + त किवा वा = व - त$$

$$तसेंच कग = काग + त किवा काग = कग - त$$

एथे त म्हणजे केद्र मन्त्रिधान आहे, ते उ ने लिहिले तर प्रस्तुत समीकरणातील व चे जागी व - उ आणि वग चे जागी (कग - उ) लिहा. ते केद्रामुद्धा सर्व स्थानी लिहा आणि दोन्ही समीकरणात उ मिळवा म्हणजेच — वग + उ इम् (वग - उ) + इ असें त्यास स्वरूप येईल.

३२७. ह्या पद्धतीने ग्रहांची चळ विज्या र हिनी मिमत, तू हे वृहदक्षाचे अर्ध, इ ही केद्रच्युति आणि कग हे ग्रहाचे मध्यम मदकेद्र याच्या म्हाय्याने तयार करण्याचे समीकरण मिद्ध होई त्याची मिद्धता खाली दाखविली आहे — लेख ३२३ पहा.

कप - र

$$कप कोभुव = र कोभुव = वृ कोभुय - वृ इ$$

$$\frac{र - कोभुय}{वृ - कोभुव} = इ$$

पण

$$कोभुव = \frac{कोभुय - इ}{१ - इ कोभुय}$$

म्हणून

$$\frac{र - कोभुय}{वृ - कोभुव} = (कोभुय - इ) \div \frac{कोभुय - इ}{१ - इ कोभुय}$$

$$= (कोभुय - इ) \times \frac{१ - इ कोभुय}{कोभुय - इ} = १ - इ कोभुय$$

$$\frac{र}{वृ} = १ - इ को भु य \quad \dots (१)$$

हवा समीकरणोंमें य हवा संख्याओंका आगी आषणाम कम ही संख्या आणता येने.
वर सिद्ध केले आहे कीं,

$$य = वग + इभुकग + \frac{१}{३}इ^३भु२कग - \frac{१}{२}इ^३भु३कग - \frac{१}{६}इ^३भुकग$$

हवा समीकरणाची दोन्ही पेट्याची कोभुज्या लेन २६१ च्या आगारें के की ती
खाली लिहिल्याप्रमाणें येतें,

$$कोभुय = कोभुकग - \frac{१}{३}इ (१ - कोभु२कग)$$

$$- \frac{१}{२}इ^३ (३ कोभुकग - ३ कोभु३कग)$$

$$- \frac{१}{६}इ^३ (कोभु२कग - कोभु४कग)$$

हवा समीकरणाम हवा वेद्रचुतीने गून में समीकरण दोन्ही पेटे १ = १ हवा
संख्यातून वजा केले तेव्हा

$$\frac{र}{वृ} = १ - इकोभुय = \begin{cases} + (१ - इकोभुकग) \\ + \frac{१}{३}इ^३ (१ - कोभु२कग) \\ + \frac{१}{२}इ^३ (३ कोभुकग - ३ कोभु३कग) \\ + \frac{१}{६}इ^३ (कोभु२कग - कोभु४कग) \end{cases}$$

• •

प्रकरण बारावे

द्विधा आकर्षण निर्मित कक्षेची सूक्ष्मांश समीकरणे

३२८. बुधादि ग्रहांना आकर्षण करणारा एकटा सूर्यच असता, किंवा चंद्राला पृथ्वीशिवाय इतर कोणी आकर्षण करीत नसतां तर, त्याची त्याच्या कक्षेतील स्थाने मागच्या प्रकरणात मिळविलेल्या मिळानांनी ठरविता आली असती. परंतु वस्तुस्थिति तशी नाही. ग्रहाला सूर्य हा आकर्षण करितो तसेच त्याला इतर प्रत्येक ग्रह आकर्षण करितो. तसेच चंद्राला पृथ्वी आकर्षण करिते, आणि सूर्यही आकर्षितो, इतकेच नव्हे तर ग्रह मुद्रा चंद्राला आकर्षितान. हे आकर्षण कार्य आकर्षकाच्या प्रकृत्यशाच्या सम प्रमाणाने आणि आकर्षक व आकर्षित याच्यामधील अंतराच्या वर्गाच्या व्यस्त प्रमाणाने असते. यामुळे विवक्षित ग्रहाच्या स्थानाने भिन्नत्व येते. त्या भिन्नत्वामह ग्रहस्थानाचा विचार करावयाचा आहे. त्याचा उपक्रम ह्या प्रकरणाने करावयाचा आहे.

३२९. जर एखादा पदार्थ मध्याकर्षी प्रेरणेने उत्पन्न होणाऱ्या आपल्या कक्षेत गमन करीत असता त्याम निमरा एखादा पदार्थ आकर्षण करू लागला तर, त्याच्या गमनमार्गात व त्याच्या गतीत भिन्नत्व येईल आणि त्याची कक्षा भिन्न होईल. अशा पदार्थाच्या गतीविषयी सामान्य स्वरूपाने आपण विचार करू. ह्या विचारात, विवक्षित ग्रह, सूर्य आणि इतर ग्रह यांचा समावेश होईल, तसा चंद्र, पृथ्वी, सूर्य आणि ग्रह याचारी विचार होईल. कोणत्याही पदार्थाचे पोकळी-तील स्थान निश्चित करण्यास तीन गोष्टींची जरूरी असते. त्या तीन गोष्टी ग्रहा-संबंधी अशा आहेत. (१) तो ग्रह क्षतिवृत्ताच्या पातळी बाहेर अशात्मक किती अंतरावर आहे, ज्याला आपण 'शर' म्हणतो ती पहिली गोष्ट. (२) कक्षेच्या केंद्रापासून किती अंतरावर आहे, ती रेखा. निला आपण 'चलत्रिज्या' म्हणतो. ही दुसरी गोष्ट. आणि (३) कक्षेच्या कोणत्या भागी आहे, म्हणजे कक्षेतील ठरविलेल्या आरंभ स्थानापासून किती अंतरावर आहे, ते कोनात्मक अंतर ह्याला आपण 'भोग' म्हणतो. ही तिसरी गोष्ट. ह्यावरून शर, चल त्रिज्या आणि भोग याचा निर्णय कक्षेच्या इतर पदार्थां आपणास ठरवावयाचा आहे.

३३०. ही तीन माने ठरविण्याकरिता ग्रहाच्या कक्षेची समीकरणे मिळविलेली पाहिजेत. समीकरणाची समानता, एकंदर आकर्षण आणि त्यामुळे होणारी वेग-वृद्धि हिची, कक्षेच्या इतर पदार्था समानता जुळवितां येते. एकंदर आकर्षण घडत असता, त्या आकर्षणाच्या कार्याने होणारी गतिवृद्धि, शर, चलत्रिज्या व भोग याच्या दिशेत कक्षेच्या पदार्था दाखविता येते. आणि त्याचे समीकरण जुळविता येते. ह्या पद्धतीने पुढे प्रतिपादन केले आहे.

लेखातील समीकरण (२) मधील वेगवृद्धि. हिला आपण थ म्हणू ती यन किंवा पम परिमाणाची मानिली तर यप परिमाणाची वेगवृद्धि त्रैगुणिकाने निघेल, ती अशी

$$\text{यन} : \text{यप} :: \text{ध} : \frac{\text{यप}}{\text{यन}} \times \text{ध}$$

पण

$$\frac{\text{यप}}{\text{यन}} = \frac{\text{सप}}{\text{सय}} = \frac{\text{चल त्रिज्या}}{\text{स्पर्श रेखेवरील लंब}} = \frac{\text{र}}{\text{ल}}$$

$\frac{\text{र}}{\text{ल}}$ ह्या अपूर्णाकास आपण थ अशी संज्ञा देऊ.

तेव्हां

$$\text{स्पर्शरेषेशी समांतर वेगवृद्धि} = \text{थ} \frac{\text{सू}}{\text{सूक}} \left(\text{र} \frac{\text{सूव}}{\text{सूक}} \right) \quad \dots (१)$$

वरच्या प्रमाणेच

$$\text{यन} : \text{पन} :: \text{ध} : \frac{\text{पन}}{\text{यन}} \times \text{ध}$$

पण

$$\begin{aligned} \frac{\text{पन}}{\text{यन}} = \frac{\text{पय}}{\text{यस}} &= \text{कोस्प (सपय)} = \frac{१}{\text{स्प (सपय)}} = \frac{१}{\frac{\text{रसूव}}{\text{सूर}}} \\ &= \frac{१ \text{ सूर}}{\text{रसूव}} \dots \dots \dots [\text{लेख २९८ (६)}] \end{aligned}$$

तेव्हा चल त्रिज्येवर लव असलेल्या वेगवृद्धीच्या पृथक्करणातील दुसरा भाग खाली लिहिल्याप्रमाणे हाईल पहिल्या भागा स्पर्शरेषेशी समांतर वेगवृद्धि हा भाग थ वेगवृद्धि प्रमाणेच म्हणजे धन आहे तो जशाचा तसाच लिहिला. पण हा माली लिहिलेला दुसरा भाग चर त्रिज्या कमी करणारा आहे म्हणून त्यास ऋण लिहिले आहे ; चल त्रिज्येशी समांतर असा थ वेगवृद्धीचा पृथ भाग

$$- \frac{१ \text{ सूर}}{\text{रसूव}} = \frac{१ \text{ सूर}}{\text{रसूव}} \times \text{ध} = \frac{१ \text{ सूर}}{\text{रसूव}} \wedge \frac{\text{सू}}{\text{सूक}} \left(\text{र} \frac{\text{सूव}}{\text{सूक}} \right)$$

चल त्रिज्येशी समांतर वेगवृद्धि ले. ३३१ (१) प्रमाणे आहे, त्यात हा ऋण करावयाची म्हणून

चल त्रिज्येशी समांतर वेगवृद्धि =

$$\frac{\text{सूरर}}{\text{सूक}} - \text{र} \left(\frac{\text{सूव}}{\text{सूक}} \right) - \frac{१ \text{ सूर}}{\text{रसूव}} \frac{\text{सू}}{\text{सूक}} \left(\text{र} \frac{\text{सूव}}{\text{सूक}} \right) \quad \dots (२)$$

३२५. एखाद्या ग्रहावर किंवा उपग्रहावर वाहूच प्रेरणा कार्य करीत असल्या तर गतिवृद्धि कशाप्रकारे होते हे वगच्या लेखामध्ये स्पष्ट केले आहे. आकर्षणाचे कार्य ती प्रेरणा होय. आणि प्रेरणेचें कार्य गतिवृद्धि किंवा वेगवृद्धि हे आहे. चल त्रिज्येशी समांतर ज्या प्रेरणा असतील त्या सर्वांचे एकीकरण प्र परिमाणाचे आहे असे घेऊं. तसेच स्पर्श रेपेच्या दिशेतील सर्व प्रेरणांची एकूणत त परिमाणाची आहे, आणि शराच्या दिशेतील म्हणजे कानिवृत्तावर लव अशा दिशातील प्रेरणांची एकदरी जी होईल ती प परिमाणाची आहे असे घेऊं. ह्या प्रतप प्रेरणा म्हणजे वेगवृद्धि किती हे सामान्य स्वरूपाने वर मिळ केलेवा आहेत त्याच्या किमती खात्री लिहिल्या. प्रमाणे. ह्यांतील प्र प्रेरणा ग्रहाची चल त्रिज्या कमी करणारी अशी मोठी आहे. म्हणून ही प्रेरणा (कृण) आहे. त प्रेरणा भोग वाढविणारी मोठी म्हणून ती + (धन) आहे. ग्रहाचा उत्तर शर (धन) म्हणण्याचा सक्ते ठरलेला आहे. परंतु आकर्षणाने शर कमी होतो म्हणून प प्रेरणा (कृण) आहे. ह्या स्पष्टीकरणानुसार (प्र) (-त) (-प) प्रेरणांची सूक्ष्मां समीकरणे या री लिहिली आहेत :—

$$\frac{\text{सू र}}{\text{सू क}} \quad \text{र} \left(\frac{\text{सू व}}{\text{सू क}} \right)^2 \quad ? \quad \frac{\text{सू र}}{\text{सू व}} \cdot \frac{\text{सू र}}{\text{सू क}} \left(\frac{\text{सू व}}{\text{सू क}} \right) \quad \text{प्र} \dots (१)$$

$$\text{थ} \frac{\text{सू}}{\text{सू क}} \left(\frac{\text{र}^2 \text{सू व}}{\text{सू क}} \right) = + \text{त} \dots (२)$$

$$\frac{\text{सू र}}{\text{सू क}} (\text{र श}) = - \text{प} \dots (३)$$

ह्या सूक्ष्मां समीकरणातील पदे पुढीलच गुनागुनीची आहेत. ही समीकरणे सोडवून प्र तप प्रेरणाच्या किमती कक्षेच्या पदार्ता दाखवावयाच्या आहेत याचे स्पष्टीकरण पुढच्या लेखात करूं.

३३६. प्रथम दुसऱ्या म्हणजे त प्रेरणेच्या समीकरणाचे स्पष्टीकरण करूं—

$$\text{थ} \frac{\text{सू}}{\text{सू क}} \left(\frac{\text{र}^2 \text{सू व}}{\text{सू क}} \right) = \text{त}$$

समीकरण थ ने भागिले—

$$\frac{\text{सू}}{\text{सू क}} \left(\frac{\text{र}^2 \text{सू व}}{\text{सू क}} \right) = \frac{\text{त}}{\text{थ}}$$

परंतु

$$\text{र}^2 \frac{\text{सू व}}{\text{सू क}} = \text{ज} \quad [\text{लेख २९३}]$$

म्हणून

$$\frac{\text{सू ज}}{\text{सू क}} = \frac{\text{त}}{\text{थ}}$$

एथे ज ही स्थीर संख्या आहे तिचा गून्यलब्धिगुण ० असला पाहिजे. पण एथे ज ही चल संख्या झाली आहे. कारण कक्षेच्या केंद्रस्थ एकाच आकर्षणाचें कार्य असता ज ही संख्या स्थीर असते. आता आपण केंद्रस्थ आकर्षणाहून अन्य आकर्षणाचें कार्य ग्रहावर होत आहे असे म्हणून गणित करित आहोत म्हणून ज ची किंमत एथें भिन्न आहे. तिला आपण 'जा' म्हणूं. तेव्हा

$$\frac{\text{सू जा}}{\text{सू क}} = \frac{\text{त}}{\text{थ}}$$

ह्या समीकरणास

$$२ जा = २ र' \frac{\text{सू व}}{\text{सू क}}$$

ह्याने गुणिले

$$२ जा \frac{\text{सू जा}}{\text{सू क}} = ० \frac{\text{त}}{\text{थ}} \cdot २ र' \frac{\text{सू व}}{\text{सू क}}$$

दोन्ही पेट्यांना $\frac{\text{सू व}}{\text{सू क}}$ ने गुणिले तेव्हा

$$\begin{aligned} २ जा \frac{\text{सू जा}}{\text{सू क}} \times \frac{\text{सू क}}{\text{सू व}} &= २ \frac{\text{त}}{\text{थ}} \cdot २ र' \frac{\text{सू व}}{\text{सू क}} \times \frac{\text{सू क}}{\text{सू व}} \\ २ जा \frac{\text{सू जा}}{\text{सू व}} &= ० \frac{\text{त}}{\text{थ}} २ र' \end{aligned}$$

ह्या नयाने झालेल्या समीकरणाचें संकलन करिता येते एथे २ जा $\frac{\text{सू जा}}{\text{सू व}}$ हा जा'

ह्या संख्येचा किंवा जा \times जा ह्या गुणाकाराचा गून्यलब्धिगुण आहे याचे संकलन जा आहे, लेख २०१. कारण संकलन म्हणजे गून्यलब्धिगुणापासून पूर्वं संख्या आपण म्हणजे अवलंबी पद शोधणे असा संकलनाचा अर्थ आहे, लेख २८७ पहा. उजवी-वडच्या पेट्याचे संकलन सध्या करिता येत नाही. त प्रेरणाची किंमत तयार केल्या-

नंतर ते संकलन करिता येईल. याकरिता $\left(२ र' \frac{\text{त}}{\text{थ}} \right)$ ह्या पदाचे संकलन करावयाचें आहे आणि ते व ह्या विकारी पदामवली कगवयाचें अशा अर्थाचे पद आपण त्या स्थानी लिहूं. ते लेखन असें—

$$0 \left(२ र' \frac{\text{त}}{\text{थ}} \right) \text{सू व}$$

संकलनात स्थीर संख्या उत्पन्न होते. जा ची विकार रहित जी किंमत तीव्र संकलनात उत्पन्न झालेली स्थीर होय. जा ची विकार रहित किंमत ज आहे, तेव्हा ज ही संकलनात उत्पन्न झालेली स्थीर संख्या होय म्हणून—

$$\text{जा}' = \text{ज} + 0 \left(२ र' \frac{\text{त}}{\text{थ}} \right) \text{सू व}$$

पण

$$जा = २^३ \frac{सू व}{सू क}$$

म्हणून

$$\left(२^३ \frac{सू व}{सू क} \right)^३ = जा^३ \left\{ १ + २७ \left(\frac{त र^३}{जा^३ व} \right) सू व \right\}$$

संकलनाला स्थीर सख्येने गुणावयाचे किंवा भागावयाचे असतां जिचे संकलन करावयाचे असेल तिला गुणिले किंवा भागिले असता कार्यात दोष येत नाही. वरच्या समीकरणाचे वर्गमूळ काढून $२^३$ ने भागिलें. आणि भागाकारांत $२^३ = \frac{१}{व^३}$ ही किंमत लिहिली. तेव्हा,

$$\frac{सू व}{सू क} = जा व^३ \left\{ १ + २७ \left(\frac{त}{जा^३ व^३} \right) सू व \right\}^{\frac{१}{३}}$$

१ = १ याम समीकरणाने भागिलें. किंवा उलट पालट केली तेव्हां

$$\frac{सू क}{सू व} = \frac{१}{जा^३ व^३} \left\{ १ + २७ \left(\frac{त}{जा^३ व^३} \right) सू व \right\}^{-\frac{१}{३}} \dots (२)$$

हे ग्रहाच्या भोगाचे आणि कालाचें सूक्ष्मांश समीकरण होय. याच्या संकलनानें कालाची संख्या व च्या किंमतीनें येते.

३३७. कक्षेचें पहिलें सूक्ष्मांश समीकरण चल त्रिज्येचें आहे. त्याची गतिवृद्धि प्र प्रेरणेनें होणे. म्हणून प्र प्रेरणेचें समीकरण तेच चल त्रिज्येचें होय तें खाली लिहित्या-प्रमाणें आहे :-

$$\frac{सूर र}{सू क^३} = २ \left(\frac{सू व}{सू क} \right)^२ - \frac{१}{२} \frac{सूर सू}{सू व सू क} \left(२ \frac{सू व}{सू क} \right) = - प्र$$

ह्या समीकरणामेंल एक एक पदाचें स्वरूप आपल्या सोयी प्रमाणें बनऊ. तेव्हां

$$\frac{सूर}{सू व} = \frac{सू}{सू व} (१ \div व) = - \frac{१}{व^२} \frac{सू व}{सू व}$$

तसेच

$$२^३ \frac{सू व}{सू क} = जा, आणि २^३ = \frac{१}{व^३}$$

तेव्हां

$$\frac{सू व}{सू क} = जा व^३$$

आणि

$$\frac{\text{सूर}}{\text{सूक}} = \frac{\text{सूर}}{\text{सूव}} \times \frac{\text{सूव}}{\text{सूक}}$$

$$\dots = \frac{1}{\text{व}^2} \frac{\text{सूव}}{\text{सूव}} \times \text{जाव}^2 = - \text{जा} \frac{\text{सूव}}{\text{सूव}}$$

$$\frac{\text{सूर}}{\text{सूक}^2} = \frac{\text{सू}}{\text{सूक}} \left(- \text{जा} \frac{\text{सूव}}{\text{सूव}} \right)$$

$$= - \frac{\text{सूजा}}{\text{सूक}} \times \frac{\text{सूव}}{\text{सूव}} = - \text{जा} \frac{\text{सू}}{\text{सूक}} \left(\frac{\text{सूव}}{\text{सूव}} \right) \dots (अ)$$

$$\begin{aligned} - \text{र} \left(\frac{\text{सूव}}{\text{सूक}} \right)^2 &= - \frac{1}{\text{व}} (\text{जाव}^2)^2 \\ &= - \text{व}^2 \text{जा}^2 \dots \dots \dots (ब) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \frac{1}{\text{र}^2} \frac{\text{सूर}}{\text{सूव}} \frac{\text{सू}}{\text{सूक}} \left(\text{र}^2 \frac{\text{सूव}}{\text{सूक}} \right) &= - \text{व}^2 \times \left(- \frac{1}{\text{व}^2} \frac{\text{सूव}}{\text{सूव}} \right) \times \frac{\text{सूजा}}{\text{सूक}} \\ &= \frac{\text{सूव}}{\text{सूव}} \times \frac{\text{सूजा}}{\text{सूक}} \dots \dots \dots (क) \end{aligned}$$

समीकरण (अ) (ब) आणि (क) यांची एकूणात ४ पदे होताना तीं एकत्र केळी म्हणजे

$$\begin{aligned} - \frac{\text{सूजा}}{\text{सूक}} \times \frac{\text{सूव}}{\text{सूव}} - \text{जा} \frac{\text{सू}}{\text{सूक}} \left(\frac{\text{सूव}}{\text{सूव}} \right) - \text{व}^2 \text{जा}^2 + \frac{\text{सूजा}}{\text{सूक}} \frac{\text{सूव}}{\text{सूव}} &= - \text{प्र} \\ + \text{जा} \frac{\text{सू}}{\text{सूक}} \left(\frac{\text{सूव}}{\text{सूव}} \right) + \text{व}^2 \text{जा}^2 &= + \text{प्र} \end{aligned}$$

ह्या समीकरणांला $\frac{\text{सूक}}{\text{सूव}} = \frac{1}{\text{जाव}^2}$ यांनी गुणिले तेव्हा

$$\text{जा} \frac{\text{सू}}{\text{सूक}} \left(\frac{\text{सूव}}{\text{सूव}} \right) \times \frac{\text{सूक}}{\text{सूव}} + \text{जाव} = \frac{\text{प्र}}{\text{जाव}^2}$$

$$\text{जा} \frac{\text{सू}}{\text{सूव}} \left(\frac{\text{सूव}}{\text{सूव}} \right) + \text{जाव} = \frac{\text{प्र}}{\text{जाव}^2}$$

$$\text{जा}^2 \left\{ \frac{\text{सूरव}}{\text{सूव}^2} + \text{व} \right\} = \frac{\text{प्र}}{\text{व}^2}$$

$$\frac{\text{प्र}}{\text{व}^2} = \text{जा}^2 \left\{ \frac{\text{सूरव}}{\text{सूव}^2} + \text{व} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 &= ज^१ \left\{ १ + २ \frac{त}{ज^१ व^१ थ} \right\} \left\{ \frac{सू२व}{सू२व^१} + व \right\} \\
 प्र - \left\{ \frac{सू२व}{सू२व^१} + व \right\} + २ \frac{त}{ज^१ व^१ थ} \left\{ \frac{सू२व}{सू२व^१} + व \right\} \\
 \frac{सू२व}{सू२व^१} + व - \frac{प्र}{ज^१ व^१} - २ \frac{त}{ज^१ व^१ थ} \left\{ \frac{सू२व}{सू२व^१} + व \right\} \dots (१)
 \end{aligned}$$

३३८. कसेचें तिमरे सूक्ष्माज गर्माकरण थाराचें आह. ते प प्रेरणेचें आह.

ते संकलताला योग्य असे कळ. तें असें

$$\begin{aligned}
 \frac{सू^१ (र श)}{सूक^१} &= प \\
 र श &= \frac{१}{व} \times श = \frac{श}{व}
 \end{aligned}$$

याचा व संबंधी लब्धिगुण काढूं

$$\frac{सू (रश)}{सूव} = \frac{सू (श)}{सूव} \left(\frac{व}{व} \right) = \left\{ व \frac{सूश}{सूव} - श \frac{सूव}{सूव} \right\} \frac{१}{व}$$

ह्या समीकरणाला $\frac{सूव}{सूक}$ = जा व^१ यांनी गुणिलें,

$$\frac{सू (श)}{सूव} \frac{सूव}{सूक} = \frac{सू (श)}{सूक} \left(\frac{व}{व} \right)$$

$$\text{म्हणून } \frac{सू (श)}{सूक} \left(\frac{व}{व} \right) = \left\{ व \frac{सूश}{सूव} - श \frac{सूव}{सूव} \right\} जा$$

ह्याचा क संबंधी लब्धिगुण केला तेव्हा.

$$\begin{aligned}
 \frac{सू^१ (य)}{सूक^१} \left(\frac{व}{व} \right) &= \frac{सू}{सूक} \left[\left\{ व \frac{सूश}{सूव} - श \frac{सूव}{सूव} \right\} जा \right] \frac{सूक}{जा व^१} \frac{सूक}{सूव} \\
 &= \frac{सू}{सूव} \left[\left\{ व \frac{सूश}{सूव} - श \frac{सूव}{सूव} \right\} जा \right] जा व^१ - प
 \end{aligned}$$

$$-प = जा व^२ \left[\frac{सूजा}{सूव} \left\{ व \frac{सूश}{सूव} - श \frac{सूव}{सूव} \right\} \right]$$

$$+ जा \frac{सू}{सूव} \left\{ व \frac{सूश}{सूव} - श \frac{सूव}{सूव} \right\}$$

$$= जा \frac{सूजा}{सूव} व^३ \left\{ \frac{सूश}{सूव} - \frac{श सूव}{व सूव} \right\}$$

$$+ जा व^१ \frac{सू}{सूव} \left\{ व \frac{सूश}{सूव} - श \frac{सूव}{सूव} \right\}$$

$$\text{पण } \frac{\text{जा}^3 \text{सूजा}}{\text{सूव}} = \frac{\text{त}^1}{\text{थव}^2}$$

[लेख ३३६]

$$\text{जा}^3 \text{व}^2 \frac{\text{सू}}{\text{सूव}} \left\{ \text{व} \frac{\text{सूश}}{\text{सूव}} - \text{श} \frac{\text{सूव}}{\text{सूव}} \right\}$$

$$= \text{जा}^3 \text{व}^2 \left\{ \frac{\text{सूव}}{\text{सूव}} \cdot \frac{\text{सूश}}{\text{सूव}} + \text{व} \frac{\text{सूरश}}{\text{सूव}^2} \right\}$$

$$- \text{जा}^3 \text{व}^2 \left\{ \frac{\text{सूश}}{\text{सूव}} \frac{\text{सूव}}{\text{सूव}} + \text{श} \frac{\text{सूरव}}{\text{सूव}^2} \right\}$$

$$- \text{प} = \frac{\text{त}}{\text{थव}^2} \text{व}^2 \left\{ \frac{\text{सूश}}{\text{सूव}} - \frac{\text{श}}{\text{व}} \frac{\text{सूव}}{\text{सूव}} \right\} + \text{जा}^3 \text{व}^2 \frac{\text{सूरश}}{\text{सूव}^2}$$

$$- \text{ग} \frac{\text{सूरव}}{\text{सूव}^2} \text{जा}^3 \text{व}^2 \dots\dots (अ)$$

$$\frac{\text{प्र}}{\text{व}^2} = \text{जा}^3 \left\{ \frac{\text{सूरव}}{\text{सूव}} + \text{व} \right\} \quad [\text{लेख ३३७}]$$

हयाला शव^१ यानें गुणिलें तेव्हां.

$$\text{प्रश} = \text{जा}^3 \text{व}^2 \text{श} \left\{ \frac{\text{सूरव}}{\text{सूव}} \right\} + \text{जा}^3 \text{व}^2 \text{श} \dots \dots (ब).$$

(ब) समीकरणांत (अ) समीकरण मिळविले, आणि मिळवणीस जा^३व^२ नें भागिले तेव्हां

$$\frac{\text{प्रश} - \text{प}}{\text{जा}^3 \text{व}^2} = \frac{\text{सूरश}}{\text{सूव}^2} + \text{ग} + \frac{\text{त}}{\text{थव}^2} \left\{ \frac{\text{सूश}}{\text{सूव}} - \frac{\text{श}}{\text{व}} \frac{\text{सूव}}{\text{सूव}} \right\} \cdot \frac{१}{\text{जा}^3}$$

परंतु

$$\text{जा}^3 = \text{ज}^1 + \text{ऊ} \left(२२ \frac{\text{त}}{\text{थ}} \right) \text{सूव}$$

$$\frac{\text{जा}^3}{\text{ज}^1} = \left\{ १ + \frac{१}{\text{ज}} \text{ऊ} \left(२ \frac{\text{त}}{\text{व}^2 \text{थ}} \right) \text{सूव} \right\}$$

$$= \left\{ १ + २ \text{ऊ} \left(\frac{\text{त}}{\text{ज}^3 \text{व}^2 \text{थ}} \right) \text{सूव} \right\}$$

यांनें वरवें समीकरण गुणिले, तेव्हां

$$\frac{\text{प्रश} - \text{प}}{\text{ज}^3 \text{व}^2} = \left[\left\{ \frac{\text{सूरश}}{\text{सूव}^2} + \text{श} \right\} + \frac{\text{त}}{\text{व}^2 \text{थ}} \left\{ \frac{\text{सूश}}{\text{सूव}} - \frac{\text{श}}{\text{व}} \frac{\text{सूव}}{\text{सूव}} \right\} \frac{१}{\text{ज}^3} \right]$$

$$\times \left\{ १ + २ \text{ऊ} \left(\frac{\text{त}}{\text{ज}^3 \text{व}^2 \text{थ}} \right) \text{सूव} \right\}$$

ह्यावरून

$$\left\{ \frac{\text{सूरश}}{\text{सूव}} + \text{श} \right\} = \frac{\text{प्रश-प}}{\text{ज'व'य}} - \frac{\text{त}}{\text{ज'व'य}} \left\{ \frac{\text{सूरश}}{\text{सूव}} - \frac{\text{श सूव}}{\text{व सूव}} \right\}$$

$$- \left[\frac{\text{त}}{\text{ज'व'य}} \left\{ \frac{\text{सूरश}}{\text{सूव}} - \frac{\text{श सूव}}{\text{व सूव}} \right\} + \left\{ \frac{\text{सूरश}}{\text{सूव}} + \text{श} \right\} \right]$$

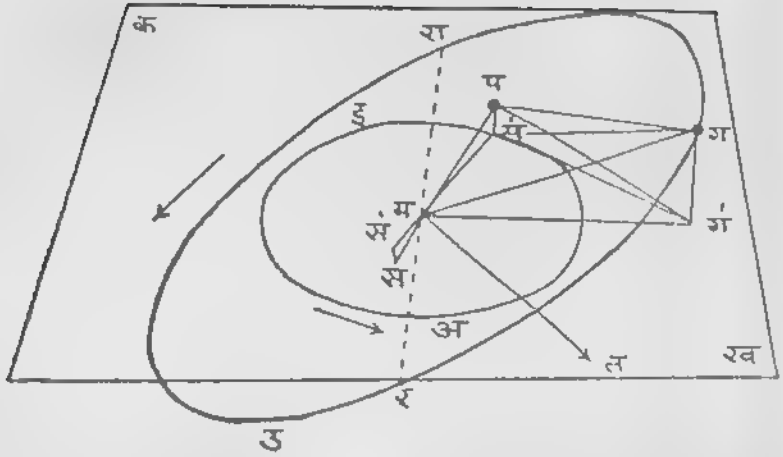
$$\times २ \text{ ठ } \left(\frac{\text{त}}{\text{ज'व'य}} \right) \text{ सूव } \dots\dots\dots (३)$$

हे शराचें सूक्ष्मांश समीकरण होय.

३३९. वर जीं समीकरणें मिळू केेली त्यामध्ये प्र त प ह्या प्रेरणा लिहिल्या आहेत. ह्या प्रेरणा कोणत्या याचें वर्णन वर दिले आहे परंतु त्या किती याचें स्पष्टीकरण करावयाचे आहे आणि त्या किमती व्यक्त किंवा पुढे व्यक्त करिता येतील अशा सामान्य संख्यांनी कशा दाखविता येतील याचाही खुलासा करावयाचा आहे. ह्या प्रेरणांच्या किमती आकर्षणाच्या मिद्धांताद्वारे काढिता येतात. तो प्रकार खाली दाखवीत आहे. ह्या किमती रेखात्मक आहेत, ह्या सख्या वरच्या समीकरणांमध्ये लिहून त्याची संकलनें करावयाची आहेत. म्हणजे चलत्रिज्या, शर, भोग हें सापडतात.

३४०. गुरुत्वाकर्षणाविषयी ग्रहार्भीच वर्णन केले आहे. हें आकर्षण गतिवृद्धि किंवा वेगवृद्धि उत्पन्न करते. हे जाकर्षक आकर्षित ह्या दान पदार्थाच्या गुरुत्वमध्यामरील वजनाच्या वर्गाच्या व्यस्त प्रमाणात असते; आणि आकर्षक पदार्थाच्या प्रकृत्याच्या समप्रमाणांत असते. सोप्या भाषेन म्हणावयाचे म्हणजे वजनाच्या समप्रमाणात असते. परंतु वजन हे परिमेष आपण पृथ्वीच्या आकर्षणाम म्हणतो आणि तेही पृथ्वीच्या मित भागी भिन्न असते. म्हणजे समुद्र सपाटीवर आणि हिमालयाच्या शिखरावर एकाच पदार्थाचे वजन भिन्न असते. म्हणून वजन शब्दानें प्रकृतपंश दाखविता येत नाहीत.

३४१. प हा पदार्थ स च्या आकर्षणानें आपल्या कक्षेन फिरत आहे त्याची कक्षा अर्ध इही आहे. प ही पृथ्वी असेल तर प आणि पं हे दोन्ही बिंदु एकच असतील, म्हणून अर्ध इ हें क्रांतिवृत्त आहे आणि कम ही क्रांतिवृत्ताची पातळी आहे. ग हा तिसरा पदार्थ आहे. ह्याचे आकर्षण प पदार्थावर घडतें, यामुळें प च्या गमनान होणारा फेरफार विचारात घ्यावयाचा आहे हा विचार सामान्यत्वे करावयाचा आहे. तथापि, स हा सूर्य, प हा ग्रह, ज्याच्या गर्भाचा आपण विचार करीत आहोत तो, आणि ग हा दुसरा ग्रह, जो प ला आकर्षित आहे तो असे समजून पुढील प्रतिपादन केले आहे. हाच विचार चंद्राच्या गतिसंबंधी करिताता स स्थानी पृथ्वी, प स्थानी चंद्र आणि ग स्थानी सूर्य असे मातावयाचे आहे.



३४२. चरण्या आकृतीत ग हा सूर्य, प हा विचित्रित ग्रह आणि म हा आकर्षक ग्रह आहे. असे समजा, संपर्ग ह्या त्याच्या त्रानिवृत्तावरून लाया आहेत. म्हणजे स प म बिंदूना त्रानिवृत्तावर टाकलेले लंब मसं, पपं व मसं हे आहेत. अर्थात ह्या त्याच्या चरण्या स्पर्शरेषा आहेत. म बिंदु पम रेषेत असून तो स आणि प ह्या दोन पदार्थांच्या सागडीचा गमत्वमध्य आहे. सूर्याचे कृत्यस ग आणि प ग्रहाचे प्रकृत्यस प आहेत आणि ग ग्रहाचे प्रकृत्यस न ग आहेत. त्यात म हे सूर्याचे प्रकृत्यस असून न हा त्याला सूक्ष्मासगुणत आहे. पंम हा प ग्रहाचा आणि मम हा ग ग्रहाचा चल-विज्या आहे.

स सूर्य याचे प्रकृत्यस स, शर मसं
 प ग्रह (आकर्षित) याचे प्रकृत्यस प, शर पपं
 ग ग्रह (आकर्षक) याचे प्रकृत्यस नम, शर मसं
 मपं प ग्रहाची चल-विज्या, ममं ग ग्रहाची चल-विज्या.

३४३. प ह्या ग्रहावर ग ह्या ग्रहाच्या आकर्षणाचा विचार करावयाचा आहे. सूर्याच्या आकर्षणाने जी त्याला गतिस्थिति प्राप्त झाली तिचे विवरण मागे केलेच आहे तथापि, येथेही त्याचा पृथक्विचार करू. म्हणजे मपे दोन्ही आकर्षणाचा एकत्रित विचार करावयाचा आहे. गुरुत्वाकर्षणाच्या गिद्वान्ताप्रमाणे प ग्रहावर म चे आकर्षण $\frac{म}{(पम)^2}$ इतके आहे, परंतु प चे ही आकर्षण म वर आहे ते $\frac{प}{(पम)^2}$ आहे. प म दिशेने केंद्रेणा कृण मानिला आहे तेव्हा मम दिशेने केंद्रेणा धन होतो. पण स हा पदार्थ स्थिर मानिला तर, म हा प कडे जातो असे म्हणण्याऐवजी प हा न

म कड जातो असे म्हणावे लागते. म्हणून प वर एकंदर आकर्षण

$$+ \frac{स}{(पस)^3} + \frac{प}{(पम)^3} = + \frac{स+प}{(पस)^3}$$
 इतके होते.

प ग्रहावर ग चें आकर्षण $\frac{ग}{(प ग)^3}$ इतके आहे हे आपण $\frac{न स}{(प ग)^3}$ नें
 दाखवू. ह्या वर्णिलेल्या दोन प्रेरणा प वर लागू आहेत. त्यात $1 - \frac{स+प}{(पस)^3}$
 ही प्रेरणा प म दिशेतील आहे. आणि $\frac{न स}{(प ग)^3}$ ही प्रेरणा प ग दिशेतील आहे.
 ह्या दोन्ही प्रेरणांचें पृथक्करण इष्ट दिशामध्ये करून त्याची कार्ये किती होतात,
 ते आता आपण शोधू. त्यापैकी प्रथम $+ \frac{स+प}{(पस)^3}$ ह्या प्रेरणेचें पृथक्करण
 करूं.

३४४. $\frac{स+प}{(पस)^3}$ ही प्रेरणा प म दिशेतील आहे. हिचें पृथक्करण चल-विज्ञा
 शर आणि भोग यांच्या दिशात करण्याच आहे. भोगाची दिशा म्हणजे वक्षेच्या
 स्पर्शरेषेची दिशा होय. परंतु, प्रथम चल-विज्ञेवर (कान्तिवृत्ताच्या पातळीत) लंब-
 रूपा अशा दिशेने प्रेरणेचें कार्य किती हें ठरवून नंतर आलेल्या प्रेरणेचें कार्य भोगाच्या
 दिशेने किती घडेल तें शोधू. चल-विज्ञेवर कान्तिवृत्तपातळीत लंबरूप अशी दिशा
 भोगाच्या दिशेची नसते, किंचित भिन्न असते, म्हणून चक्षुर्विज्ञेवर लंब प्रेरणा ते ह्या
 अंतराचे दाखवू. काण्व्याप्ति प्रेरणेचें पृथक्करण त्याच प्रेरणेच्या दिशेची काटकोन
 वर्णाच्या दिशेने ० असते. म्हणून $\frac{स+प}{(पस)^3}$ ह्या प्रेरणेचा चलविज्ञेवर लंब-
 दिशेतील पृथग्भाग ० आहे, म्हणून तिचें पृथक्करण उत्तर दोन दिशात वरू. त्या दिशा
 पंम आणि पंग ह्या हात प्रेरणेच्या परिमाणाचें लेखन मरळ रेषेने वास्तान, याम्नेत्र
 ही प्रेरणा पम परिमाणाची मानिली तर तिचें पृथग्भाग प्रेरणा निर्वाणाच्या गिद्धात्ता-
 प्रमाणें पंम आणि पंग परिमाणाचे होतील. तेव्हा वैराशिकाने :—

$$पम : पंग :: \frac{स+प}{(पस)^3} : \frac{स+प}{(पस)^3} \times \frac{पंम}{पम}$$

परंतु पपंम कोन काटकोन आहे, (पपं रेषा पंम वर लंब आहे व पपंम काटकोन त्रिकोण
 असून पम हा त्याचा कर्ण आहे.)

म्हणून $\frac{पंम}{पम} = \text{कोभुपमपं ; यावरून}$

$$\frac{स-प}{(पस)^3} \wedge \frac{पंम}{पम} = \frac{स+प}{(पस)^3} \text{ को भु पमपं}$$

यामध्ये पमपं हा कोन धन आहे आणि $\frac{स + प}{(प स)^3}$ ही प्रेरणा धन आहे.

म्हणून

$$+ प्र = + \frac{स + प}{(प स)^3} \text{ कोभुपमपं } \dots \dots \dots (१)$$

त्याप्रमाणेच पपं दिशेतील पृथग्भाग काढू

$$पम : पंप :: \frac{स + प}{(प स)^3} : \frac{स + प}{(प स)^3} \times \frac{पपं}{पम}$$

$$\text{परंतु } \frac{पपं}{पम} = भु पमपं \quad \text{म्हणून}$$

$$\frac{स + प}{(प स)^3} \times \frac{पपं}{पम} = \frac{स + प}{(प स)^3} \text{ भुपमपं}$$

जी प्रेरणा उत्तर शर कमी करणारी ती प्रेरणा धन मानावयाची आहे. वरची ही प्रेरणा उत्तर शर कमी करणारी आहे ;

म्हणून $\frac{स + प}{(प स)^3}$ ही प्रेरणा धन आहे

$$+ प = + \frac{स + प}{(प स)^3} \text{ भुपमपं } \dots \dots \dots (२)$$

३४५. वरच्या लेखातील प्रेरणेचे पृथक्करण प्रेरणा त्रिकोणाच्या सिद्धांताद्वारे केले आहे. परंतु, कोणत्याही प्रेरणेचे पृथक्करण एकमेकांवर लव अशा कोणत्याही दोन दिशान करवयाचे असेल तर त्या प्रेरणेला, तिच्या दिशेची पृथग्भूत दिशानी जे कोन होतात, त्या कोनाच्या कोभुज्यानी गुणावे असे मागे मिळविले आहे. लेख २३३ पहा. त्याप्रमाणेच वरच्या प्रेरणेचे पृथक्करण झाले आहे. भुपमपं हा पंपम कोनाची कोभुज्याच आहे.

३४६. प प्रहावर दुसरी प्रेरणा $\frac{न स}{(प ग)^3}$ ही आहे. हिचे पृथक्करण वरच्याप्रमाणे करूं. ही प्रेरणा पग दिशेतील आहे. हिचे पृथक्करण प्रथम पपं आणि पंग ह्या दिशान करू, आणि नंतर पग दिशेतील प्रेरणेचे, पुनः पृथक्करण करू. पपंग त्रिकोणावरून प्रेरणा त्रिकोणाच्या सिद्धांताप्रमाणे त्रैराशिकाने उतरते. ते असे :—

$$पम : पपं :: \frac{न स}{(प ग)^3} : \frac{न स}{(प ग)^3} \times \frac{पपं}{पग}$$

हे आकर्षण पद दिशेतील आहे, म्हणजे शर कमी करणारे आहे, व ते प प्रेरणेतील आहे, तेव्हा

$$+ ष = + \frac{न स}{(प ग)^3} प ग \dots\dots\dots (३)$$

$\frac{न स}{(प ग)^3}$ हिचा दुसरा पृथक्भाग खाली लिहिल्याप्रमाणे आहे.

$$प ग : प ग :: \frac{न स}{(प ग)^3} : \frac{न स}{(प ग)^3} \times \frac{प ग}{प ग}$$

ह्या दुसऱ्या भागाचे पृथक्करण पंग आणि पंग दिशेत करू.

$$प ग : पंग :: \frac{न स}{(प ग)^3} \times \frac{पंग}{प ग} : \frac{न स}{(प ग)^3} \times \frac{पंग}{प ग} \times \frac{पंग}{पंग}$$

म्हणजे $\frac{न स}{(प ग)^3} \times \frac{पंग}{प ग}$ ह्या भागाचे पृथक्करण पुढे करू. परंतु पंग त्रिकोणाच्या गंग बाजु परिमित येणारा भाग आधी घेऊ. हा भाग प प्रेरणेतील आहे. गंग दिशेतील प्रेरणा शर वाढविणारी आहे म्हणून ही श्रृंखला होईल.

$$पंग : गंग :: \frac{न स}{(प ग)^3} \times \frac{पंग}{प ग} : \frac{न स}{(प ग)^3} \times \frac{पंग}{प ग} \times \frac{गंग}{पंग}$$

म्हणून

$$+ ष = - \frac{न स}{(प ग)^3} \times गंग \dots\dots\dots (४)$$

आता $\frac{न स}{(प ग)^3} \times \frac{पंग}{प ग}$ ह्या भागाचे पृथक्करण करू. ही प्रेरणा पंग दिशेतील आहे म्हणजे श्रृंखला आहे. तिचे पृथक्करण पम आणि मग दिशेत करू. पम त्रिकोणावरून प्रेरणा त्रिकोणाच्या सिद्धांताप्रमाणे ठरते की,

$$पंग : पम :: \frac{न स}{(प ग)^3} \times \frac{पंग}{प ग} : \frac{न स}{(प ग)^3} \times \frac{पंग}{प ग} \times \frac{पम}{पंग}$$

म्हणजे $\frac{न स}{(प ग)^3} \times \frac{पम}{पंग}$ ही प्रेरणा पम दिशेतील म्हणजे प्र प्रेरणेतील असून चलत्रिज्या कमी करणारी आहे. म्हणून ही घन आहे तेव्हा

$$+ प्र = + \frac{न स}{(प ग)^3} \times पम \dots\dots\dots (५)$$

तसेच

$$\text{पंग} : \text{मंग} :: \frac{\text{नस}}{(\text{पग})^2} < \text{पंग} : \frac{\text{नस}}{(\text{पग})^2} < \text{पंग} < \frac{\text{मग}}{\text{पंग}}$$

म्हणजे $\frac{\text{नस}}{(\text{पग})^2}$, मंग. ही प्रेरणा मंग दिवोतला आहे, हिचे पृथ करण

आपल्या इतर प्रेरणामध्ये आणावयाचे आहे म्हणजे चरित्रज्ञा आणि निजवर (कानिबृत्त पातळ, नील) लंब ह्या एकमेकींवर लंब अगणाच्या दिशात पृथ.करण करावयाचे आहे म्हणून मूळ प्रेरणेच्या दिशेची पृथग्भूत दिशांना जे कोन होतात त्या कोनाच्या कोभुज्यानी जिचे पृथ.करण करावयाचे त्या प्रेरणेस गुणिते पाहिजे. पंग आणि मंग यांच्यामध्ये पंगमंग कोन आहे, म्हणून कोभु पंगमंग ने गुणि याने पंग विशेषतः पृथग्भाग येईल दुसऱ्या पृथग्भागाची दिशा (90° — पंगमंग कोन) ही आहे ह्या कोनाची कोभुज्या म्हणजे पंगमंग कोनाची भुज्या होय. पहिला पृथग्भाग मंग विशेषीत आहे, म्हणजे चरित्रज्ञा वाडविभागा आहे म्हणून तो ग्रहण आहे आणि तो प्र प्रेरणेतला आहे. दुसरा भाग मंग कमी करणारा आहे म्हणून तो ग्रहण आहे.

$$+ \text{प्र} = - \frac{\text{नस}}{(\text{पग})^2} \times \text{मंग कोभुपंगमंग} \dots \dots \dots (६)$$

$$+ \text{तं} = - \frac{\text{नस}}{(\text{पग})^2} \text{मंग भुपंगमंग} \dots \dots \dots (७)$$

३८३. प ग्रहाचे आकर्षण सूर्यावर घडते त्या योगाने प च्या स्थानात जो फेर पडतो तो विचारात घेतलाच आहे. आता प ग्रहाचे आकर्षण सूर्यावर घडून त्या-योगे प च्या स्थानात जो फेर होईल तो विचारात घेऊ ग्रहाच्या आकर्षणाने सूर्यमध्यावर जे आकर्षण घडेल त्यामुळे सूर्याचा मर उत्पन्न होतो, तो प्रेरणा

नस

मंग ही आहे (सूर्य ग्रहाक्षेच्या केंद्रस्थानी असेल त्यावेळीच ही प्रेरणा

सूक्ष्म असते, पण उपग्रहाच्या कक्षेचा विचार करिताना ही प्रेरणा विचारात घ्यावी लागते. चंद्रकक्षेच्या केंद्रस्थानी पृथ्वी असते म्हणून ही प्रेरणा विचारात घेतली पाहिजे.

३८८ स वर ग चे आकर्षण $\frac{\text{नस}}{(\text{गम})^2}$ हे आहे ही प्रेरणा स ला ग कडे ओडते, पण स स्थीर मानल्यामुळे ग हा म कडे जातो, म्हणजे सग चरित्रज्ञा

कमी होणे, म्हणून ही प्रेरणा धन आहे. हिचें पृथक्करण समंग त्रिकोणावरून

$$\text{सग} : \text{समं} :: \frac{\text{नस}}{(\text{गस})^3} : \frac{\text{नस}}{(\text{गस})^3} \quad \text{समं} \quad \frac{\text{नस}}{(\text{गस})^3} \quad \text{ससं}$$

ही प्रेरणा ग चा उणा शर कमी करणारी धन अर्थात् प चा अधिक शर कमी करणारी म्हणजे ऋण आहे.

$$प = - \frac{\text{नस}}{(\text{गस})^3} \text{ समं} \dots\dots\dots (८)$$

प्रसेंच

$$\text{सग} : \text{संग} :: \frac{\text{नस}}{(\text{गस})^3} : \frac{\text{नस}}{(\text{गस})^3} \times \frac{\text{सग}}{(\text{गस})} = \frac{\text{नस}}{(\text{गस})^3} \text{ संग}$$

हा $\frac{\text{नस}}{(\text{गस})^3}$ संग पृथग्भाग संग दिशेतील आहे याचें पृथक्करण संग आणि संग दिशात करावयाचें. तेव्हां

$$\text{संग} : \text{संग} :: \frac{\text{नस}}{(\text{गस})^3} \text{ संग} : \frac{\text{नस}}{(\text{गस})^3} \text{ संग} \times \frac{\text{संग}}{\text{संग}} = \frac{\text{नस}}{(\text{गस})^3} \text{ संग}$$

हा प प्रेरणेतील भाग असून तो संग दिशेतील म्हणजे धन आहे.

$$प = + \frac{\text{नस}}{(\text{गस})^3} \text{ संग} \dots\dots\dots (९)$$

पुन्हा

$$\text{संग} : \text{संग} :: \frac{\text{नस}}{(\text{गस})^3} \text{ संग} : \frac{\text{नस}}{(\text{गस})^3} \text{ संग} \times \frac{\text{संग}}{\text{संग}} = \frac{\text{नस}}{(\text{गस})^3} \text{ संग}$$

हा $\frac{\text{नस}}{(\text{गस})^3}$ संग पृथग्भाग संग दिशेतील याचें पृथक्करण संग आणि संग दिशात करावयाचे आहे. तेव्हां संग ग त्रिकोणावरून,

$$\text{संग} : \text{संग} :: \frac{\text{नस}}{(\text{गस})^3} \text{ संग} : \frac{\text{नस}}{(\text{गस})^3} \text{ संग} \times \frac{\text{संग}}{\text{संग}} = \frac{\text{नस}}{(\text{गस})^3} \text{ संग}$$

हा पृथग्भाग च-त्रिज्या कमी करणारा आहे म्हणून तो धन आहे.

$$प्र = + \frac{\text{नस}}{(\text{गस})^3} \text{ संग} \dots\dots\dots (१०)$$

आणि

$$\text{संग} : \text{संग} :: \frac{\text{नस}}{(\text{गस})^3} \text{ संग} : \frac{\text{नस}}{(\text{गस})^3} \text{ संग} \times \frac{\text{संग}}{\text{संग}} = \frac{\text{नस}}{(\text{गस})^3} \text{ संग}$$

म्हणजे $\frac{नस}{(गस)^3}$ मग ही प्रेरणा शेवटी राहिली. हिचे पृथक्करण ३४६ लेखाच्या शेवटी $\frac{नस}{(पम)^3} \times$ मग ह्या प्रेरणेचें केलें त्याप्रमाणे करावयाचें. $\frac{नस}{गस^3}$ मग ही प्रेरणा मग दिशेतील म्हणून तिचा चल द्विज्येच्या दिशेतील भाग चलत्रिज्या वाढविणारा आहे. आणि भोगाच्यासंबंधी भाग भोग वाढविणारा आहे. म्हणजे दोन्ही घन आहेत. तेव्हां

$$+ प्र = + \frac{नस}{(गस)^3} \times \text{मग को भु पंमग} \dots \dots \dots (११)$$

$$+ तं = + \frac{नस}{(गस)^3} \times \text{मग भु पंमग} \dots \dots \dots (१२)$$

३४९. लेख ३४४ पासून ३४८ पर्यंत प्रेरणांची पृथक्करणें करून जे १० भाग काढिले आहेत, ते प्र त प्र प्रेरणांपैकी कोणत्या प्रेरणेचे कोणते भाग आहेत ते पाहून, त्या त्या प्रेरणासमोर लिहू. १, ५, ९, ८, ९ हे प्र प्रेरणेचे भाग आहेत. ७ आणि १० हे तं प्रेरणेचे भाग आहेत, आणि २, ३ व ४ हे प प्रेरणेचे आहेत. तेव्हा

$$+ प्र = + \frac{स+प}{(पम)^3} \text{ को भु पमपं } + नस \left\{ \frac{पंम}{(पम)^3} + \frac{संम}{(गस)^3} \right\} \\ - नस \left\{ \frac{मगं}{(पम)^3} - \frac{मगं}{(गस)^3} \right\} \text{ को भु पंमगं}$$

$$+ तं = - नस \left\{ \frac{मगं}{(पम)^3} - \frac{मगं}{(गस)^3} \right\} \text{ भु पंमगं}$$

$$+ प = + \frac{स+प}{(पम)^3} \times \text{भु पमपं} + \frac{नस}{(पम)^3} (पपं - सगं)$$

३५०. आकर्षणाच्या कार्याने प्रेरणा उत्पन्न होते, त्या प्रेरणेने वेगवृद्धि उत्पन्न होते. आणि वेगवृद्धिपासून चलत्रिज्या भोग आणि गर ही मिळू होतात. चलत्रिज्या भोग आणि गर याच्या प्रेरणा कक्षा आणि किती परिमाणाच्या असताना याचें विवरण वर केले आहे. आकर्षक ग्रहाची कक्षा आकर्षित ग्रहाच्या कक्षेच्या बाहेर आहे असे आकृतीत दाखविले आहे. आणि त्या स्थितिप्रमाणे घेणाऱ्या प्रेरणा वर लिहिल्या आहेत. परंतु, त्याच्या विपरित स्थिति असली तर, म्हणजे आकर्षक ग्रहाची कक्षा आकर्षित ग्रहाच्या कक्षेच्या आत असली तर तं प्रेरणेची किंमत ऋण होते.

३५१. विवक्षित पदार्थाविर त्याच्या कक्षेच्या केंद्र बिंदूतील आकर्षण आणि स्थानाचे आकर्षण विचारत घेऊन त्या सर्व प्रेरणाचीं कार्ये ठरलेल्या किती प्रमाणानें घडतात ते वर सिद्ध केले आहे. त्यामध्ये स्यात्मक पुष्कळ संख्या सामान्य संख्या-रूप असून अव्यक्त स्थितीत आहेत. विवद्रूना सर्व संख्या अव्यक्तच आहेत अशा कल्पनेने त्याची समीकरणे बनविली आहेत. त्या समीकरणांतील एक अव्यक्ताची किंमत (इतर सर्व संख्या व्यक्त आहेत असे घेऊन) ठरविता येते. आणि अव्यक्ताच्या सख्येपेक्षा एकाचे अधिक समीकरणे असली म्हणजे सर्व अव्यक्तांच्या किमती ठरविता येतात. याकरिता अव्यक्त संख्यांची संख्याच कमी करणे प्राप्त असते. तसेच काही अव्यक्त संख्या अशा योजनाव्या लागताना की, त्या वेधानें सिद्ध व्हाव्यात. याकरिता वेधाने सिद्ध होणाऱ्या संख्या समीकरणाना ठेऊन इतर जितक्या संख्या कमी करता येतील तितक्या कमी करावयाच्या आहेत.

३५२. ह्या प्रेरणामधील म्हणजे त्याच्या समीकरणामधील संख्याचे मापन करणे अतितर कठीण कार्य आहे. जसे सूर्याचे व पृथ्वीचे वजन याचे गुणांतर, मध्यमग्रहाची गति, केंद्रच्युति, मंदोच्चस्थान वगैरे वगैरे. पूर्वं कालिन ज्योतिःशास्त्रात सर ऐझाक-न्यूटनच्या पूर्वी हा आकर्षणाचा सिद्धांत मनुष्याच्या बुद्धीत आला नाही. आकर्षण आहे अशी कल्पना होती. भारतीय ग्रंथांत 'प्रबह' नामक वायु आकर्षण करितो असें ठरलेलें होतें. पण ते आकर्षण कोठून प्राप्त होते, किती प्रमाणाचे असतें ह्याची पूर्ण जाणीव झाली नव्हती. याचें कारण भारतातील स्वास्थ्य कमी झाल्याने असल्या गहन विषयाकडे लक्ष कमी झाले.

३५३. मागे सिद्ध केलेली सूक्ष्मांश समीकरणे आणि वर सिद्ध केलेल्या प्र त प प्रेरणा याची समीकरणे, सामान्यत्वे सिद्ध केली आहेत. त्यामध्ये जी पदे आली आहेत त्याच्या स्पष्टीकरणाचे दोन भाग करू. (१) ग्रहासंबंधी, म्हणजे कक्षेच्या केंद्रस्थानी सूर्य आहे अशी समीकरणे, (२) उपग्रहासंबंधी, म्हणजे चंद्रासंबंधी, किंवा गुरु, शनि वगैरेच्या उपग्रहासंबंधी समीकरणे. त्याचे स्पष्टीकरण क्रमवार खाली देत आहे.

३५४. (१) स+प यांमध्ये स म्हणजे सूर्याचे प्रकृत्यश आणि प म्हणजे ज्या ग्रहाच्या कक्षेचा विचार करावयाचा अर्थात ज्याचे शर भोग आणि मान्वंतर सिद्ध करावयाचे त्याचे प्रकृत्यश होत. आकर्षण किंवा प्रेरणा प्रकृत्यशांशी सम प्रमाणात असते. म्हणून आकर्षणाचे मापन प्रकृत्यशांनी करिता येतें. म्हणून स+प हे ग्रहाच्या कक्षेच्या केंद्रस्थानाचें आकर्षण होय. हे आकर्षण स ह्या अक्षर सख्येनें दाखविलें आहे (लेख ३०३). आणि लेख ३०५ प्रमाणे

$$म = अज^3$$

म्हणून

$$स+प = अज^3 \dots \dots \dots (१)$$

ह्यांत ज म्हणजे कालाच्या सूक्ष्म अशा एक परिमाणांत ग्रहातें आक्रमिलेल्या क्षेत्राची दुप्पट आहे. (ले. २९३.) आणि म म्हणजे केंद्रापासून मोठ्या अक्षावर कक्षेपर्यंत काढलेला लंब होय. याला केंद्रगभुजार्ध म्हणतात. लेख ३१३ आकृति मध्ये कम हा केंद्रगभुजार्ध होय.

$$म = कम = बृ (१ - इ^२) \quad [\text{लेख १७२ (ब) १७८ (१).}]$$

आणि $\frac{१}{म} = अ$

३५५. (२) कोभुपमपं :—पमपं हा कोन ज्या ग्रहाच्या कक्षेचा विचार त्या ग्रहाचा शर होय. म्हणून

कोभुपमपं ग्रहाच्या शराची कोभुजया. ग्रहाच्या शराची स्पर्शरेषा सूक्ष्मांश समीकरणांत ग हा अक्षगने दाखविली आहे. तेव्हा कोभुपमपं हें पद आम्हांम श में दाखविता येते. कारण

$$स्पर्क्ष = \frac{\text{भुक्ष}}{\text{कोभुक्ष}}$$

$$\text{स्पर्क्ष} = \frac{\text{भुक्ष}}{\text{कोभुक्ष}}$$

$$१ + \text{स्पर्क्ष} = \frac{\text{कोभुक्ष} + \text{भुक्ष}}{\text{कोभुक्ष}} = \frac{१}{\text{कोभुक्ष}}$$

$$\text{कोभुक्ष} = \frac{१}{१ + \text{स्पर्क्ष}}$$

$$\text{कोभुक्ष} = \sqrt{\frac{१}{(१ + \text{स्पर्क्ष})}} = (१ + \text{स्पर्क्ष})^{-\frac{१}{२}}$$

म्हणून

$$\text{कोभु पमपं} = (१ + श^२)^{-\frac{१}{२}} \dots \dots \dots (२)$$

३५६. (३) पसं :—

$$\text{पस} = \text{पम} + \text{मम}$$

$$\text{पम} = \text{पंम} \div \text{कोभुपमपं}$$

$$\text{मम} = \text{मप} \div \text{कोभुपमपं}$$

$$\text{पस} = \text{पंम} \div \text{कोभुपमपं}$$

$$(\text{पस}^२) = (\text{पंम}^२) \div \text{कोभु}^२ \text{ पमपं} = २^२ (१ + श^२)$$

$$\frac{१}{(\text{पस})^२} = \frac{१}{२^२ (१ + श^२)} = व^२ (१ + श^२)^{-२} \dots \dots \dots (३)$$

(१), (२), (३) यांचा गुणाकार केला तेव्हां

$$\frac{स+प}{(पस)^2} \text{ को भुपमपं} = अज^2 व^2 (१+श^2)^{-\frac{3}{2}}$$

(प्र १) (४)

३५७. ^१_(पग) ह्या पदाची किंमत व्यक्त मर्यादानी ठरविणे आहे त्या म्हाली लिहिल्या प्रमाणे.

सं म प गं हे विदुः क्रातिवृत्ताच्या पातळीत आहेत. पग ही रेखा क्रातिवृत्ताच्या पातळीच्या बाहेर आहे. पण

$$(पग)^2 = (पद)^2 + (गद)^2$$

पद ही रेखा पं गं शी समांतर असून तिच्याशी समांतर आहे कारण प पं गं द हा समांतर भुज चौकोन वगडकोन चौकोन आहे. आणि गद ही रेखा (पंप - गंग) चरोत्तर आहे. आता पमगं ह्या क्रातिवृत्ताच्या पातळीतील त्रिकोणावरून

(पंग)^2 = (गम)^2 + (पम)^2 - २पम.गम कोभुपमगं
तेव्हां
(पग)^2 = (गम)^2 + (पम)^2 + (पप - गंग)^2 - २गम.पम कोभुपमगं
ह्यातील गम ही रेखा ग ग्रहाची चलत्रिज्या आहे. म विदुः प ग्रह आणि सूर्य यांच्या सागडीचा गुरुत्वमध्य आहे. म्हणून ग ग्रह म ह्याच विदुः सगोवती भ्रमण करितो. म्हणून

गम = रं = ^१_व ही किंमत परच्या समीकरणाने ठेवू. तेव्हा

$$(पग)^2 = (गम)^2 \left[१ + \left(\frac{पम}{गम} \right)^2 + \frac{(पप - गंग)^2}{(गम)^2} - २ \frac{पम}{गम} \text{ को भुपमगं} \right]$$

$$(पग)^2 = (गम)^2 \left[१ + \left(\frac{पम}{गम} \right)^2 + \frac{(पप - गंग)^2}{(गम)^2} - २ \frac{पम}{गम} \text{ को भुपमगं} \right]^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{१}{(पग)^2} = व^2 \left[१ + व^2 \left\{ \left(\frac{पम}{गम} \right)^2 + \left(\frac{पप - गंग}{गम} \right)^2 \right\} - २ \frac{पम}{गम} \text{ को भुपमगं} \right]^{-\frac{3}{2}}$$

ह्या समीकरणात केवळ मर्यादित अक्षर सख्या फ आणि घ ह्या स्वीकारल्या त्या अशा

$$फ = व^2 \left\{ \left(\frac{पम}{गम} \right)^2 + \left(\frac{पप - गंग}{गम} \right)^2 \right\}$$

आणि घ = व को भुपमगं

तेव्हां

$$\frac{1}{(\text{पग})^3} = \text{वं}^3 \left\{ 1 + \text{फ} - 2 \text{पंमध} \right\}^{-3} \dots \dots (५)$$

३५८. $\frac{1}{(\text{गम})^3}$ ह्या पदाची किंमत व्यक्त मर्यादानी ठरवावयाची आहे.

सं बिंदूतून सं गं शी सदा समांतर केली. तेव्हां

$$\begin{aligned} (\text{गम})^3 &= (\text{सदा})^3 + (\text{गदा})^3 \quad \text{यांत संस} = \text{श}^3 \\ &= (\text{गंस})^3 + (\text{गंग} + \text{ससं}) \end{aligned}$$

ह्यांतील $(\text{गंस})^3$ ची किंमत संमगं त्रिकोणावरून ठरते ती अशी

$$(\text{गंस})^3 = (\text{गंस})^3 : (\text{सम})^3 + 2 \text{गंस} \cdot \text{संस} \text{ को मुपंमगं [ले. ७० (१)]}$$

तेव्हां

$$(\text{गग})^3 = (\text{गंस})^3 \left[1 + \left(\frac{\text{संस}}{\text{गंस}} \right)^2 + \frac{\text{गंस} + \frac{\text{संस}}{\text{गंस}}}{(\text{गम})^3} + 2 \frac{\text{संस}}{\text{गंस}} \text{ को मुपंमगं} \right]$$

$$\frac{1}{(\text{गम})^3} = \text{वं}^3 \left[1 + \text{वं}^3 \left\{ (\text{संस})^3 + (\text{गंग} + \text{ससं})^3 + 2 \text{वंसंस को मुपंमगं} \right\} \right]^{-3}$$

लेखन सोप्याकरिता

$$\text{फ} = \text{वं}^3 \left\{ (\text{संस})^3 + (\text{गंग} + \text{ससं})^3 \right\}$$

आणि $\text{ध} = \text{वं को मुपंमगं}$

तेव्हां

$$\frac{1}{(\text{गम})^3} = \text{वं}^3 \left\{ 1 + \text{फ} + 2 \text{संमध} \right\}^{-3} \dots \dots (६)$$

३५९. ममीकरण (५) व (६) वर तयार केली आहेत, त्यात फ आणि ध ह्या संयुक्त आहेत आणि दोन्हीचे घातविस्तार करावयाचे आहेत. प्रथम घातविस्तार करून नंतर त्यात फ ध च्या किंमती लवू. घातविस्तार लेख २१ मधील $(1 + x)^{-n}$ प्रमाणे केला आहे.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\text{पग})^3} &= \text{वं}^3 \left\{ 1 + \text{फ} - 2 \text{पंमध} \right\}^{-3} = \text{वं}^3 \left\{ 1 + \text{ठ} \right\}^{-3} \\ &= \text{वं}^3 \left\{ 1 - 3\text{ठ} + \frac{3 \cdot 2}{2} \text{ठ}^2 - \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3!} \text{ठ}^3 + \dots \right\} \dots (५) \end{aligned}$$

तर्मेच

$$\begin{aligned} (मम)^2, \quad व' \left\{ 1 + फ + ममध \right\}^{-3} \quad व' \left\{ 1 + ठ' \right\}^{-3} \\ व' \left\{ 1 + \frac{3}{2} ठ' + \frac{3^2}{2} ठ'^2 + \frac{3^3}{16} ठ'^3 + \dots \right\} \dots (६) \end{aligned}$$

(५) ह्यांत ठ ही संयुक्त सख्या आहे तिची किंमत—

$$ठ = फ - २ पंमव = - २ पंमध + फ$$

$$२(पंमध - \frac{१}{२} फ) = - २ पंमध \left(1 - \frac{\frac{१}{२} फ}{पंमध} \right)$$

$$ठ^२ = + ४ (पंम)^२ ध^२ \left(1 - \frac{\frac{१}{२} फ}{पंमध} \right)^२$$

$$ठ' = - ८ (पंम)^२ ध' \left(1 - \frac{\frac{१}{२} फ}{पंमध} \right)^२$$

$$\frac{३}{२} ठ = + ३ पंमध \left(1 - \frac{\frac{१}{२} फ}{पंमध} \right)$$

$$+ \frac{१५}{८} ठ^२ = + \frac{१५}{२} (पंम)^२ ध^२ \left(1 - \frac{\frac{१}{२} फ}{पंमध} \right)^२$$

$$- \frac{३५}{१६} ठ^३ = + \frac{३५}{२} (पंम)^२ ध^३ \left(1 - \frac{\frac{१}{२} फ}{पंमध} \right)^३$$

त्याचप्रमाणें ठ' ची किंमत ठरवू

$$ठ' = फ' + २ (संम)ध = + २ (संम)ध + फ'$$

$$+ २ (संमध + \frac{१}{२} फ) = २ संमध \left(1 + \frac{\frac{१}{२} फ}{संमध} \right)$$

$$- \frac{३}{२} ठ' = - ३ संमध \left(1 + \frac{\frac{१}{२} फ}{संमध} \right)$$

$$+ \frac{१५}{८} ठ'^२ = - \frac{१५}{२} (संम)^२ ध'^२ \left(1 + \frac{\frac{१}{२} फ}{संमध} \right)^२$$

$$- \frac{३५}{१६} ठ'^३ = - \frac{३५}{२} (संम)^२ ध'^३ \left(1 + \frac{\frac{१}{२} फ}{संमध} \right)^३$$

हयविरुद्ध समीकरण (५) व (६) यांचा स्वरूप खाली दिल्याप्रमाणे होताने.

$$\frac{१}{(पग)^३} - वं^३ \left\{ \begin{array}{l} १ + ३ पंमध \left(१ - \frac{३}{२} \frac{फ}{पंमध} \right) \\ + \frac{१५}{२} (पंम)^२ ध^२ \left(१ - \frac{३}{२} \frac{फ}{पंमध} \right) \\ + \frac{३५}{२} (पंम)^१ ध^३ \left(१ - \frac{३}{२} \frac{फ}{पंमध} \right) \\ + \dots \dots \dots \end{array} \right\} \dots (५)$$

$$\frac{१}{(गस)^३} - वं^३ \left\{ \begin{array}{l} १ - ३ संमध \left(१ + \frac{३}{२} \frac{फ}{संमध} \right) \\ + \frac{१५}{२} (संम)^२ ध^२ \left(१ + \frac{३}{२} \frac{फ}{संमध} \right) \\ - \frac{३५}{२} (संम)^१ ध^३ \left(१ + \frac{३}{२} \frac{फ}{संमध} \right) \\ + \dots \dots \dots \end{array} \right\} \dots (६)$$

३६०. समीकरण (५) ला पंम ने गुणिले आणि ६ ला संम ने गुणिले. दोन्ही गुणाकारांचा बेरीज करून त्या बेरजेला - नम याने गुणिले तेव्हा- (फ, फ' ही पदे सूक्ष्म म्हणून गाळली आहेत)

$$+ नम \left\{ \frac{पंम}{(पग)^३} + \frac{संम}{(गस)^३} \right\} = (प्र२)$$

$$+ नम वं^३ [(पंम - संम)]$$

$$+ नम वं^३ \left[३ \left\{ (पंम)^२ - (संम)^२ \right\} ध - \frac{३}{२} \left\{ (पंम)फ + (संम)फ' \right\} \right]$$

$$+ नम वं^३ \left[\frac{१५}{२} \left\{ (पंम)^३ - (संम)^३ \right\} ध^२ - \frac{१५}{२} ध \left\{ (पंम)^२ फ - (संम)^२ फ' \right\} \right]$$

$$+ नम वं^३ \left[\frac{३५}{२} \left\{ (पंम)^४ - (संम)^४ \right\} ध^३ - \frac{१०५}{४} ध^२ \left\{ (पंम)^३ फ + (संम)^३ फ' \right\} \right]$$

३६१. प्रेरणामधील इतर पदे महत्त्व अशी आहेत. त्यापैकी प्र प्रेरणेतील तिसरें पद खाली दिल्याप्रमाणे आहे :

$$- नम \left\{ \frac{१}{(पग)^३} - \frac{१}{(गस)^३} \right\} गम कोभु पंमगं$$

ह्रस्वापैकी मगं = $\frac{१}{२}$ आणि ध = $\frac{१}{२}$ कोभुपमगं

मगं कोभुपमगं = $\frac{१}{२}$ कोभुपमगं = $\frac{१}{२}$ ध

म्हणून

$$- नस \frac{१}{२} \left\{ \frac{१}{(पग)^३} - \frac{१}{(गस)^३} \right\}$$

असें त्या पदाचे स्वरूप झालें.

$$\begin{aligned} & \left\{ + ३ (पंम + संम) ध - \frac{३}{२} (फ - फं) \right. \\ & - \frac{१५}{२} \left\{ (पंम)^३ - (संम)^३ \right\} ध^३ \\ & \cdot \frac{१५}{२} \left\{ (पंम) फ - (संम) फ \right\} ध \\ & \left. \left(\frac{१}{(पग)^३} - \frac{१}{(गस)^३} \right) \right\} व \left\{ \begin{aligned} & + \frac{३५}{२} \left\{ (पग)^३ - (संम)^३ \right\} ध^३ \\ & - \frac{१०५}{४} \left\{ (पंम)^३ फ - (संम)^३ फ \right\} ध^३ \\ & \dots\dots\dots (७) \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

ह्या समीकरणाचा - नस $\frac{१}{२}$ ह्या स्वरूपाने गुणिल्याने प्र प्रेरणेतोळ तिसरे पद होते म्हणून—

$$\begin{aligned} & - नस \left\{ \frac{मगं}{(पग)^३} - \frac{मगं}{(गस)^३} \right\} कोभुपमगं = \dots\dots\dots (प्र^३) \\ & - नस व \left[३ (पंम + संम) ध^३ - \frac{३}{२} (फ - फं) ध \right] \\ & \cdot नस व \left[\frac{१५}{२} \left\{ (पंम)^३ - (संम)^३ \right\} ध^३ - \frac{१५}{२} \left\{ (पंम) फ - (संम) फ \right\} ध^३ \right] \\ & - नस व \left[\frac{३५}{२} \left\{ (पंम)^३ - (संम)^३ \right\} ध^३ - \frac{१०५}{४} \left\{ (पंम)^३ फ - (संम)^३ फ \right\} ध^३ \right] \end{aligned}$$

३६२. वरचे समीकरण (७) याला—नस मगं सुपमगं ने गुणिल्याने त प्रेरणेंचे पद तयार होते.

$$\begin{aligned} & - सन \left\{ \frac{मगं}{(पग)^३} - \frac{मगं}{(गस)^३} \right\} भुपमगं \\ & = - नस \left\{ \frac{१}{(पग)^३} - \frac{१}{(गस)^३} \right\} \frac{१}{२} भुपमगं \end{aligned}$$

परंतु ध = वं कोभुपंमगं तेव्हां

$$\text{घ} \frac{1}{व} \text{भुपंमग} = \text{वं कोभु}^1 \text{मगं} \times \frac{1}{व} \text{भुपंमगं} = \frac{1}{2} \text{भुरपंमगं}$$

$$\text{च}^1 \frac{1}{व} \text{भुपंम}^1 = \text{वं}^1 \text{कोभु}^1 \text{पंम}^1 \times \frac{1}{व} \text{भुपंमगं}$$

$$= \frac{1}{2} \text{वं}^1 \text{भुरपंमगं} \times \text{कोभुपंमग}$$

$$= \frac{1}{2} \text{वं}^1 \text{भुरपंमगं} + \frac{1}{2} \text{वं}^1 \text{भुपंमगं}$$

$$\text{झ}^1 \frac{1}{व} \text{भुपंमग} = \text{वं}^1 \text{कोभु}^1 \text{पंमग} \times \frac{1}{व} \text{भुपंमगं}$$

$$= \frac{1}{2} \text{वं}^1 \text{कोभु}^1 \text{पंमग} \times \text{भुरपंमगं}$$

$$= \frac{1}{2} \text{वं}^1 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{कोभुरपंमगं} \right\} \times \text{भुरपंमगं}$$

$$= \frac{1}{4} \text{वं}^1 \text{भुरपंमगं} + \frac{1}{4} \text{वं}^1 \text{भुपंमगं}$$

$$\text{नस} \left\{ \frac{\text{मगं}}{(\text{पम})^2} - \frac{\text{मगं}}{(\text{मम})^2} \right\} \text{भुपंमगं} = \quad (\text{तं})$$

$$+ \frac{3}{2} \text{नसवं}^1 (\text{फ} - \text{फं}) \text{भुपंमगं}$$

$$+ \frac{3}{2} \text{नसवं}^1 (\text{पंम} + \text{संम}) \text{भुरपंमगं}$$

$$+ \frac{14}{8} \text{नसवं}^1 \left\{ (\text{पंम}) \text{फ} - (\text{संम}) \text{फं} \right\} \text{भुरपंमगं}$$

$$- \frac{14}{8} \text{नसवं}^1 \left\{ (\text{पंम})^2 - (\text{मम})^2 \right\} (\text{भुरपंमगं} + \text{भुपंमगं})$$

$$+ \frac{104}{16} \text{नसवं}^1 \left\{ (\text{पम})^2 \text{फ} - (\text{मम})^2 \text{फं} \right\} (\text{भुरपंमगं} + \text{भुपंमगं})$$

$$- \frac{34}{8} \text{नसवं}^1 \left\{ (\text{पंम})^2 + (\text{संम})^2 \right\} \text{भुरपंमगं}$$

$$- \frac{34}{16} \text{नसवं}^1 \left\{ (\text{पंम})^2 - (\text{संम})^2 \right\} \text{भुपंमगं}$$

३६३ प्रेरणाच्या किमनी वर ज्या तयार केल्या आहेत त्यान काही संयोगी संख्या राहिल्या आहेत; त्या स्पष्ट करून त्या ज्या ज्या पदांत योनावयाच्या आहेत, त्याचे स्पष्टीकरण खाली दिल्याप्रमाणे—

पम गेपेच्या दोन्ही टोकाशी प आणि स परिमाणाच्या प्रेरणा कार्य करितात. पस रेपेचे प आणि स प्रेरणाच्या व्यस्त प्रमाणात भाग केले असता असे अनुभवास येते

की लहान प्रेरणा आणि मोठा भाग यांचा गुणाकार, मोठी प्रेरणा आणि लहान भाग याच्या गुणाकाराबरोबर असतो. त्याप्रमाणे पम चे पम आणि मम असे दोन भाग केले तेव्हा—

$$प \times पम = सं \times संम$$

म्ह्यावरून

$$प : सं :: संम : पम$$

$$१ + \frac{प}{सं} = १ + \frac{संम}{पम}$$

$$सं + प : सं :: पम + संम : पम$$

म्हणून

$$पम = सं \times \frac{(पम + संम)}{सं + प} = \frac{सं}{व(सं + प)}$$

तसेच

$$सं : प :: पम : संम$$

$$सं + प : प :: पम + संम : संम$$

म्हणून

$$संम = प \times \frac{(पम + संम)}{सं + प} = \frac{प}{व(सं + प)}$$

तेव्हा

$$(पम - संम) = \frac{सं - प}{व(सं + प)} ; \left\{ (संम)^२ \cdot (पम)^२ \right\} = \frac{सं - प}{व^२(सं + प)},$$

$$\left\{ (पम)^२ + (संम)^२ \right\} = \frac{सं^२ + प^२}{व^२(सं + प)^२} ; \left\{ (पम)^२ - (संम)^२ \right\} = \frac{सं^२ - प^२}{व^२(सं + प)^२}$$

$$\left\{ (पम)^२ + (संम)^२ \right\} = \frac{सं^२ + प^२}{व^२(सं + प)^२} ;$$

$$\left\{ (पम)^२ - (संम)^२ \right\} = \frac{सं^२ - प^२}{व^२(सं + प)^२}$$

तसेच फ = $\frac{१}{व^२} (पम)^२$ आणि फ = $\frac{१}{व^२} (संम)^२$ हे रूपांकी पप गग मम ह्या अतिसूक्ष्म म्हणून गाल्ल्या आहेत.

३६४. प्रेरणाच्या किमती जरावर तयार केल्या आहेत त्यात अद्यापि काही सधोर्गी मर्यादा राहिल्या आहेत. आकर्षणाच्या कार्याने ज्या प्रेरणा उत्पन्न होतात त्याची कार्ये द्रष्ट दिशास्थि किती आहेत हे साधण्यासाठी अनेक सामान्य मर्यादा व त्यांचे सध गणित सांकेत्याकृतिना योजिले आहेत. आता त्या योजिलेल्या मर्यादा आणि इनर काही मर्यादांचा निरास करून प्रेरणाशी समीकरणे लिहिल्याची आहेत

त्यापैकी प्रथम प्र प्रेरणें समीकरण तयार करितो. प्र प्रेरणेंच्या किंमतीत तीन पदे आहेत. त्यापैकी प्रत्येक पदाचे स्वरूप लेख ३८९ मध्ये दाखविले आहे. त्या प्रत्येक पदाची किंमत खाली लिहित्याप्रमाणे—

$$[\text{प्र१}] \frac{स + प}{(पम)^3} कोभु पंमपं = अज'व' (१ अ')^{-\frac{3}{2}}$$

$$[\text{प्र२}] नम \left\{ \frac{पम}{(पम)^3} + \frac{मम}{(गम)^3} \right\}$$

ह्या पदामध्ये ७ मयुक्तापदे उत्पन्न झाली आहेत. लेख ३९० पहा. त्यापैकी प्रत्येक पदाचें स्पष्टीकरण क्रमानें देतों.—

$$(१) नसव' (पंम + संम) = नस \frac{व'}{व} (१)$$

$$(२) ३नसव' \left\{ (पंम)^3 - (संम)^3 \right\} ध$$

$$= ३नस \frac{व'}{व} \frac{स-प}{स+प} कोभु (व-व') (२)$$

$$(३) - \frac{३}{२} नसव' \left\{ (पंम) फ + (संम) फ \right\}$$

$$= - \frac{३}{२} नसव' \left\{ (पंम)^3 व' + (संम)^3 व' \right\}$$

$$= - \frac{३}{२} नस \frac{व'}{व} \frac{स^3 + प^3}{(स+प)^3} \dots (३)$$

$$(४) + \frac{१५}{२} नसव' \left\{ (पंम)^3 + (संम)^3 \right\} ध^३$$

$$= \frac{१५}{२} नसव' \frac{स^3 + प^3}{व^3 (स+प)^3} \times व'^३ कोभु^३ (व-व')$$

$$= \frac{१५}{४} नस \frac{व'}{व} \frac{स^3 - प^3}{(स-प)^3}$$

$$= \frac{१५}{४} नस \frac{व'}{व} \frac{स^3 - प^3}{(स+प)^3} \times व'^३ कोभु^३ (व-व') \dots (४)$$

$$\begin{aligned}
(५) & - \frac{१५}{२} नसवं^३ \left\{ (पंम)^३फ - (संम)^३फ \right\} घ \\
& - \frac{१५}{२} नसवं^३ \left\{ (पंम)^३ - (संम)^३ \right\} व कोभु (ब - बं) \\
= & \frac{१५}{२} नसवं^३ \frac{म^३ - प^३}{(स + प)^३} कोभु (ब - बं) \dots\dots\dots (५) \\
(६) & \frac{३५}{२} नसवं^३ \left\{ (पंम)^३ - (संम)^३ \right\} घ^३ \\
= & \frac{३५}{२} नसवं^३ \frac{स^३ - प^३}{(स + प)^३} \left\{ \frac{३}{२} कोभु (ब - बं) + \frac{३}{२} कोभु३ (ब - बं) \right\} \\
& \dots\dots\dots (६) \\
(७) & - \frac{१०५}{४} नसवं^३ \left\{ (पंम)^३फ, (गम)^३फ \right\} घ^३ \\
= & - \frac{१०५}{४} नसवं^३ \left\{ (पंम)^३ + (संम)^३ \right\} व^३ \\
& \left\{ \frac{३}{२} + कोभु२ (ब - बं) \right\} \\
= & - \frac{१०५}{८} नसवं^३ \frac{म^३ + प^३}{(म + प)^३} \left\{ १ + कोभु२ (ब - बं) \right\} \dots\dots\dots (७) \\
३६५. [प्र३] & नम \left\{ \frac{मग}{(पग)^३} - \frac{मग}{(गम)^३} \right\} कोभुपंमगं \\
& ह्या पदामध्ये ६ संयुक्त पदे आहेत. त्यापैकी प्रत्येकाचे स्पष्टीकरण खाली देतो \\
(१) & - ३नसवं (पंम + संम) घ^३ = - \frac{३}{२} नसवं^३ \\
& \left\{ १ + कोभु२ (ब - बं) \right\} \dots\dots\dots (१) \\
(२) & \frac{३}{२} नसवं (फ - फं) घ = \frac{३}{२} नसवं^३ \\
& \left\{ (पंम)^३ - (संम)^३ \right\} कोभु (ब - बं) \\
= & \frac{३}{२} नसवं^३ \frac{स - प}{(स + प)} कोभु (ब - बं) \dots (२)
\end{aligned}$$

$$(३) - \frac{१५}{२} नसवं \left\{ (पम)^३ - (सम)^३ \right\} व^३$$

$$= - \frac{१५}{२} नस \frac{व^६}{व^३} \frac{स-प}{स, प}$$

$$\left\{ \frac{३}{४} कोभु (व - व) ; \frac{३}{४} कोभु३ (व - व) \right\}$$

$$= \frac{४५}{८} नस \frac{व^६}{व^३} \frac{स-प}{स, प} कोभु (व - व)$$

$$\frac{१५}{८} नस \frac{व^६}{व^३} \frac{स-प}{स, प} कोभु३ (व - व) \dots \dots (३)$$

$$(४) \frac{१५}{२} नसवं \left\{ (पम)क - (सम)क \right\} व^३$$

$$= \frac{१५}{२} नस \frac{व^३}{व^३} \frac{स^३-प^३}{(स+प)^३} कोभु^३ (व-व)$$

$$= \frac{१५}{४} नस \frac{व^३}{व^३} \frac{स^३-प^३}{(स+प)^३} \left\{ १ ; कोभु२ (व-व) \right\} \dots \dots (४)$$

$$(५) - \frac{३५}{२} नसवं \frac{स^३+प^३}{व^३(स+प)^३} कोभु^३ (व-व)$$

$$= - \frac{३५}{१६} नस \frac{व^३}{व^३} \frac{स^३+प^३}{(स+प)^३}$$

$$\left\{ ३ - ४ कोभु२ (व - व) + कोभु४ (व-व) \right\} \dots \dots (५)$$

$$(६) \frac{१०५}{४} नसवं \left\{ (पम)^४ - (सम)^४ \right\} व^३ कोभु^३ (व-व)$$

$$= \frac{१०५}{८} नस \frac{व^६}{व^३} \frac{(स^४-प^४)}{(स+प)^४}$$

$$\left\{ \frac{३}{४} कोभु (व-व) + \frac{३}{४} कोभु३ (व-व) \right\} \dots \dots (६)$$

३६६. लेख ३४९ मध्ये तं प्रेरणेचें पद तयार केले आहे ते एकच आहे. त्याचे स्पष्टीकरण लेख ३६२ मध्ये आहे. त्यात भात पदे आहेत, त्याचे स्पष्टीकरण क्रमवार खाली केले आहे.—

$$\begin{aligned}
 (१) & + \frac{३}{२} नसवं^३ (फ - फं) मुपमगं \\
 & - \frac{३}{२} नमव^३ \left\{ व^३ (पंम)^३ - वं^३ (संम)^३ \right\} भु (व - वं) \\
 & = \frac{३}{२} नस \frac{वं^३}{व^३} \frac{स-प}{स+प} भु (व-वं) \quad (१)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (२) & - \frac{३}{२} नसवं^३ (पंम + संम) भुरपमगं \\
 & = - \frac{३}{२} नस \frac{वं^३}{व^३} भुर (व - वं) \dots \dots (२)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (३) & 1. \frac{१५}{८} नमव^३ \left\{ (पम) फ (गम) फ \right\} भूर पमगं \\
 & - \frac{१५}{८} नमव^३ \left\{ (पम)^३ वं^३ (संम)^३ वं^३ \right\} भूर पंमगं \\
 & = \frac{१५}{८} नस \frac{वं^३}{व^३} \frac{स^३-प^३}{(स+प)^३} भुर (व - वं) \dots \dots (३)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (४) & \frac{१५}{८} नमव^३ \left\{ (पम)^३ - (संम)^३ \right\} (मुपमगं - भुरपमगं) \\
 & = \frac{१५}{८} नम \frac{वं^३}{व^३} \frac{स-प}{स+प} \left\{ भुर (व - वं) + भु (व - वं) \right\} \dots (४)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (५) & + \frac{१०५}{१६} नसवं^३ \left\{ (पंम)^३ फ - (संम)^३ फ \right\} \\
 & \quad \left\{ मुपमगं + भुरपमगं \right\} \\
 & = \frac{१०५}{१६} नसवं^३ \left\{ (पंम)^३ वं^३ - (संम)^३ वं^३ \right\} \\
 & \quad \left\{ मु (व-वं) + भुर (व-वं) \right\} \\
 & = \frac{१०५}{१६} नस \frac{वं^३}{व^३} \frac{स^३-प^३}{(स+प)^३} \\
 & \quad \left\{ मु (व-वं) + भुर (व-वं) \right\} \dots \dots (५)
 \end{aligned}$$

$$(६) - \frac{३५}{१६} नसवं \left\{ (पम)^२ + (सम)^२ \right\} \\ \left\{ मु४ पमग + २मु२ पमग \right\} \\ \frac{३५}{१६} नस \frac{व^२}{व^३} \frac{स^२ + प^२}{(म + प)^२} \\ \left\{ २मु२ (ब-व) + मु४ (ब-व) \right\} \dots\dots (६) (७)$$

वर निघालेली सर्व पदे खाली एकत्र लिहिली आहेत :—

$$\left\{ \begin{aligned} & \left\{ - \frac{३}{८} नस \frac{व^२}{व} \frac{स-प}{म+प} \right. \\ & \quad \left. + \frac{१०५}{१६} नस \frac{व^२}{व^३} \frac{स^२-प^२}{(म+प)^२} \right\} मु (ब-व) \\ & \left\{ - \frac{३}{२} नस \frac{व^२}{व} \right. \\ & \quad \left. - \frac{५}{८} नस \frac{व^२}{व} \frac{स^२+१३प^२}{(म+प)^२} \right\} मु२ (ब-व) \\ & \left\{ - \frac{१५}{८} नस \frac{व^२}{व^३} \frac{स-प}{स+प} \right. \\ & \quad \left. + \frac{१०५}{१६} नस \frac{व^२}{व^३} \frac{स^२-प^२}{(म+प)^२} \right\} मु३ (ब-व) \\ & \quad - \frac{३५}{१६} नस \frac{व^२}{व^३} \frac{स^२+प^२}{(स+प)^२} मु४ (ब-व) \end{aligned} \right.$$

३६७. त ही प्रेरणा भोगाच्या दिशेतील नाही, कारण भोगाची दिशा चलत्रिज्ये वर लंब दिशेन सर्वदा नगन. ग्रह आपल्या कलेच्या उच्चस्थानी किंवा केंद्र मधियान विदून असेल त्याचवेळी त्याच्या गमनाची दिशा चलत्रिज्येवर लंब असते. इतर स्थानी त्याचे गमन, त्याचस्थानी कलेच्या वक्र रेघेची जी स्पर्शरेखा तिथेच त्या स्पर्शरेषेच्या दिशेचे असते. आणि ग्रहाच गमनाची दिशा तीच त्याच्या भागाची दिशा होय. तेव्हा आपणाम आतां त ह्या चलत्रिज्येवर लंब भ्रमणाच्या प्रेरणेच पृथ करण कहन स्पर्शरेषी प्रेरणा त ही आणि पाहिजे. ही प्रेरणा खाली दिलेल्या रीतीन आणिता येते. लेख ३३० पहा तेथे चलत्रिज्येवर लंब भ्रमण वेगवेगळी पृथ करण, स्पर्शरेषेच्या दिशेन आणि चल चलत्रिज्येच्या दिशेन केले आहे. वेगवेगळी आणि प्रेरणा एकत्र कार्य

वरणाच्या आहेत. त्यावे मिश्रत्व त्याची दाखवीत. येथे तं प्रेरणेचे पृथक्करण
स्पर्शरेषी दिशेत आणि चन्द्रविज्येच्या दिशेत करावयाचे—लेख ३३२ प्रमाणे—त

प्रेरणेला $\frac{र}{सय}$ ने गुणिले म्हणजे त प्रेरणा येते. सय -स्पर्शरेषेवर वेद्रापामून

टाकिलेला लंब होय ह्यास ल म्हटले आहे. येथे आपण $\frac{र}{सय}$ ह्यास $\frac{र}{ल}$ म्हणू आणि

त्याला संक्षिप्त नांव देऊं. $\frac{१}{सय} = थ$ हे अक्षर योजू तेव्हा

$$\frac{र}{सय} = \frac{र}{ल} = रथ = \frac{थ}{व} \text{ म्हणून}$$

$$त = \frac{थ}{व} त, \text{ अर्थात } तथ = तथ$$

म्हणून

$$\frac{त}{थ} = \frac{त}{व} \text{ म्हणून } \frac{त}{थ} = \frac{त}{व}$$

तसेच तं प्रेरणेचा दुसरा पृथग्भाग त प्रेरणेला खालच्या गुणकाने गुणिल्याने येतो.
तो गुणक (आ. ले. ३३२ मधील पहा).

$\frac{पय}{सय}$ हा होय.

$$\frac{पय}{सय} = \frac{१}{र} \frac{सूर}{सूव} = व \frac{सूर}{सूव}$$

$$\text{परंतु } \frac{सूर}{सूव} = - \frac{१}{व} \frac{सूव}{सूव} \text{ म्हणून}$$

$$\frac{पय}{सय} = - \frac{१}{व} \frac{सूव}{सूव}$$

१ सूव

व सूव

ह्या पदाने त प्रेरणेला गुणिले असता चन्द्रविज्येशी समांतर असा
पृथग्भाग तयार होईल.

१६८. प्रेरणा आणि गतिवृद्धि ह्या दोन्ही रेषांनी दाखवाव्या लागताना,
त्या सरळ रेषांचे घेतात. सरळ रेषेच्या दिशा दोन्ही टोकाकडे दान असताना त्यापैकी
रेषेबाबत (निच्या लांबाबा) विचार असता एक टोक र्म्भार टाकिलेले असते ह्या
-र्थार टोक पाहून दुसऱ्या टोकाला दिशा रेषा वाढविणे म्हणून ती घन मानिली

पाहिजे. चलत्रिज्येच्या रेपेच्या लांबीचा विचार करिताना चलत्रिज्या वाढविणारे पद धन होते. परंतु प्रेरणेचा विचार करिताना याच्या उलट चिन्ह येते. म्हणजे चलत्रिज्या वाढविणारी प्रेरणा ऋण असते ह्यावरून वरच्या लेखातील तं प्रेरणेचे पृथक्करण ज्या दोन भागात केलें, ते दोन भाग तं प्रेरणेला निरनिराळे दोन गुणकानी गुणून येतात. आणि त्या भागाची चिन्हे गुणकांच्या चिन्हाप्रमाणे असतात. तं प्रेरणेला स्पर्शरेषी गुणक $\frac{1}{v}$ हा धन आहे. पण चलत्रिज्येशी समांतर भागात नेणारा गुणक चलत्रिज्या कमी करणारा म्हणून तोहि धन आहे म्हणून $\frac{पय}{सय}$ हा गुणक धन आहे.

$$तेव्हां \quad तं \times \frac{पय}{सय} = तं \times \left(-\frac{1}{v} \frac{सूव}{सूव} \right) \quad \text{---} \quad \frac{तं}{व} \frac{सूव}{सूव}$$

हा प्र प्रेरणेतील एक भाग आहे. तो प्र ह्या प्रेरणेत घेऊं.

३६९. य प्रेरणेचें स्पष्टीकरण करावयाचे आहे ह्या प्रेरणेतील दोनच पद काढिली आहेत. त्यावरून शराची सूक्ष्मता उत्तम प्रकारे साधिली जाते. त्यापैकी पहिलें पद

$$(१) + \frac{स + प}{(पम)^3} भुपंमप$$

ह्यातील भुपंमप ची किंमत काढूं.

$$श = स्पशर = \frac{भुपंमप}{कोभुपंमप} \text{ म्हणून}$$

$$भुपंमप = श कोभुपंमप$$

$$तेव्हां \quad + \frac{स + प}{(पम)^3} भुपंमप = + श \frac{स + प}{(पम)^3} कोभुपंमप \dots (१)$$

$$(२) + \frac{नस}{(पम)^3} (पंप - संस)$$

$$\frac{पंप}{पंम} = स्पशर = श, \text{ म्हणून } पंप = श (पंम)$$

$$\frac{संस}{सम} = स्पशर = श, \text{ म्हणून } संस = श (सम)$$

$$\text{तेव्हां} \quad \text{पंप} - \text{संस} = \text{श} (\text{पंप} - \text{संस}) = \frac{\text{श}}{\text{व}} \frac{\text{स} - \text{प}}{\text{स} + \text{प}}$$

आता $\frac{\text{नस}}{(\text{पग})^3}$ ह्या पदाची किंमत काढू. त्याकरिता लेख ३५९ मधील समीकरण (५) याचा उपयोग करूं. त्यापैकी खालचे स्वरूप पुरे आहे.

$$\frac{\text{नस}}{(\text{पग})^3} = \text{नसवं}^1 (१ + ३ \text{पमव}) \\ = \text{नसवं}^1 + ३ \text{नसवं}^1 \text{पमव}$$

$$\begin{aligned} \text{तेव्हां} \quad \frac{\text{नस}}{(\text{पग})^3} (\text{पंप} - \text{संस}) &= \text{नसवं}^1 \frac{\text{शस} - \text{प}}{\text{वस} + \text{प}} \\ &+ ३ \text{नसवं}^1 \times \frac{\text{व}}{\text{व}} \text{कोभु} (\text{व} - \text{वं}) \times \frac{\text{शस} - \text{प}}{\text{वस} + \text{प}} \\ &= \text{शनस} \frac{\text{वं}^1 \text{स} - \text{प}}{\text{वस} + \text{प}} + ३ \text{शनस} \frac{\text{वं}^1 \text{स} - \text{प}}{\text{वस} + \text{प}} \text{कोभु} (\text{व} - \text{वं}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{म्हणून} \quad \text{प} \cdot \text{श} \frac{\text{स} - \text{प}}{(\text{पस})^3} \text{कोभुपंपमप} &+ \text{शनस} \frac{\text{वं}^1 \text{स} - \text{प}}{\text{वस} + \text{प}} \\ &+ ३ \text{शनस} \frac{\text{वं}^1 \text{स} - \text{प}}{\text{वस} + \text{प}} \text{कोभु} (\text{व} - \text{वं}) \dots (अ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{पण प्रश} &= \text{श} \frac{\text{स} + \text{प}}{(\text{पस})^3} \text{कोभुपंपमप} - ३ \text{शनस} \frac{\text{वं}^1 \text{स} - \text{प}}{\text{वस} + \text{प}} \\ &- ३ \text{शनस} \frac{\text{वं}^1 \text{स} - \text{प}}{\text{वस} + \text{प}} \text{कोभु} (\text{व} - \text{वं}) \end{aligned}$$

$$= ३ \text{नसवं}^1 \frac{\text{श}}{\text{व}} \text{कोभु} २ (\text{व} - \text{वं}) \dots \dots \dots (ब)$$

३७०. सूक्ष्माज समीकरणामध्ये प्र त प ह्या प्रेरणाम काही भाजक आहेत. यामाठी त्या भाजकांनी प्र त प यांना भागून सूक्ष्माज समीकरणात ज्या स्वरूपाची आहेत त्या स्वरूपाची करून त्याच्या किंमती खाली लिहितो. ती स्वरूपे

$$\frac{\text{प्र}}{\text{ज}^३ \text{वं}^३}, \quad \frac{\text{त}}{\text{थज}^३ \text{वं}^३}, \quad \frac{\text{प्रस} - \text{प}}{\text{ज}^३ \text{वं}^३} \text{ ही स्वरूपे अणुविद्याकरिता प्र आणि त}$$

यांना ज^३ वं^३ ह्या संस्थेने भागविद्याचे आहे. तिसरे $\frac{\text{प्रस} - \text{प}}{\text{ज}^३ \text{वं}^३}$ हे पद, हे तयार करण्याकरिता प्र प्रेरणेश य ने गृणून गुणाकारांत प प्रेरणेची पदें वजा करा आणि बाकीला ज^३ वं^३ ने भाग. वजाबाकी करण्याकरिता वरच्या लेखातील (ब) समीकरणांत (अ) समीकरण वजा करा.

३७२. ह्या प्रेरणाच्या किमती त्याचा कक्षेशी सबब दाखविणारी समीकरणे आणि त्या समीकरणावरून हाट माने कशी शोधावी याची माघने ह्या विषय ह्या प्रकरणात आणित जाते. हा विषय अत्यंत महत्त्वाचा आहे. उद्योगशास्त्र हे वेद्यने उच्च स्थितीला गेले आहे असे म्हणण्यापाश्चात्ते उच्च प्रतीच्या गणितशास्त्रानेच ह्या उच्च स्थितीला आले आहे. तुमचे वेद्य आपडे काहीच करू शकत नाहीत, वेद्यांना गणिताची आवश्यकताच अगत. वरून सर्व प्रतिपादन सामान्य आहे. कल्पनेच्या आधारावरच हा पृथ्वी ग्रह, सहा सूर्य आणि सहा पला आकर्षण करणारा कक्षेच्या केंद्रापासून भिन्न स्थाना असलेला आकर्षण करणारा ग्रह (पदार्थ) आहे असे निदर्शक घेतले आहे. ह्या प्रतिपादनाने पच्या स्थानी ग्रह सच्या स्थानी मगळ आणि सच्या स्थानी सूर्य मानिला आणि स प सच्या स्थानी सहा भौ अक्षर योजिल्याम ती समीकरणे गुत्ताच्या कक्षेची होतील. हीच समीकरणे चंद्र कक्षेला योजून चंद्राचे गणित करिता येते ते पुढच्या प्रकरणात केले आहे. त्या स्पष्टीकरणावरून ह्या प्रकरणातील विषयाचा चमत्कार होईल. सामान्य स्थूल अशा वेद्यांनी कक्षे-मधली जे पदे प्राप्त होतात ती समीकरणात योजून दृमया कार्ती पदाच्या किमती काढाव्या. जेता शीतीने एकमेकांचे स्थो-वनाने त्या पदांचे सुद्धीकरण करिता येत. ग्रहाच्या जल्योन्माकर्षणाचा विचार मागे घेतल्यास प्रकरण १० आणि ११ यावरून सर्व घटाने गणिता करिता येते, त्याची सामान्य समीकरणे त्या प्रकरणात मिळू शाली आहेत. प्रत्यक्ष किमती पुढून्याय करणाचे योजून प्रकृत चंद्राचे गणिताचे स्पष्टी-करण करण्याचे ठरविले आहे. म्हणजे पुढचे प्रकरणी चंद्र कक्षेच्या गणिताचा विचार केला आहे.



प्रकरण तेरावे

चंद्राच्या कक्षेचीं सूक्ष्मांश समीकरणे

३७३. चंद्राची कक्षा निर्माण करणारा ग्रह पृथ्वी हा होय. म्हणजे चंद्र हा पृथ्वीचा उपग्रह आहे. चंद्राची कक्षा दीर्घवर्तुळ असून त्या दीर्घवर्तुळाच्या एका केंद्राने म्हणजे केंद्रस्थानी पृथ्वी आहे. चंद्राची चलयित्र्या, सर आणि भोग ही अमुक इतकी असता काल किती हे ठरविणे, तसेच अमक्या काली चंद्राची चलयित्र्या किती, सर किती, भोग किती हे ठरविणे ही कार्ये कशी ठरवावी याचा येथे सोपपत्तिक विचार करावयाचा आहे. ही कार्ये गेल्या प्रकरणात जी सूक्ष्मांश समीकरणे मिळविली आहेत ती मोडविल्याने माध्य होताना वरची सूक्ष्मांश समीकरणे सामान्य स्वरूपाची आहेत. परंतु त्यामध्ये ज्या प्र त प प्रेरणाच्या किमती दिल्या आहेत त्याही सामान्य आहेत. त्या किमतीमध्ये पृथ्वी, चंद्र आणि सूर्य ही घटत प्रेरणाच्या किमती ठरवाव्या लागतात आणि त्या किमतीने ती समीकरणे सुटतात तीही एकदम सुटत नाहींत. प्रथम स्थूल मानावे, नंतर काहीशी सूक्ष्म, नंतर गुंथमतर आणि सूक्ष्मतर व शेवटी अतिगुंथम अशा पद्धीपद्धीने मोडवावी लागतात. अशी ती सूक्ष्मांश समीकरणे व त्यांमधील प्र त प च्या किमती ग्राही दिलीत. ही समीकरणे मागे दिलीही आहेतच पण त्यांनील आपणाम लागेल नितांत भाग घेऊन ही समीकरणे खात्री लिहिता -

$$\begin{aligned} \frac{\text{सू}^3\text{व}}{\text{सू}^3\text{व}} + \text{व} - \frac{\text{प्र}}{\text{जव}} - २\text{उ} \left[\frac{\text{त}}{\text{थजव}} \right] \text{सू}^3\text{व} \left\{ \frac{\text{सू}^3\text{व}}{\text{सू}^3\text{व}} + \text{व} \right\} \\ \frac{\text{सू}^3\text{श}}{\text{सू}^3\text{व}} + \text{श} = \frac{\text{प्रश-ष}}{\text{जव}^3} - \frac{\text{त}}{\text{थजव}^3} \left(\frac{\text{सू}^3\text{श}}{\text{सू}^3\text{व}} - \frac{\text{श}}{\text{व}} \frac{\text{सू}^3\text{व}}{\text{सू}^3\text{व}} \right) \\ - २\text{उ} \left(\frac{\text{त}}{\text{थजव}} \right) \text{सू}^3\text{व} \left\{ \frac{\text{सू}^3\text{श}}{\text{सू}^3\text{व}} - \text{श} \right\} \\ \frac{\text{सू}^3\text{क}}{\text{सू}^3\text{व}} = \frac{१}{\text{जव}} \left\{ १ + २\text{उ} \left(\frac{\text{त}}{\text{थजव}} \right) \text{सू}^3\text{व} \right\}^{-\frac{१}{२}} \end{aligned}$$

३७४. वरच्या समीकरणांत प्र त प त प्रेरणांच्या ज्या किमती आहेत त्या लेख ३७१ मध्ये आहेत, त्याच चंद्र कक्षेच्या अनुसृतन कक्षा स्वरूपाच्या होताना हे येथे दाखविले आहे. चंद्र कक्षेच्या केंद्रस्थानी पृथ्वी आहे; तिचे निदर्शक अक्षर प थोज कक्षा चंद्राची म्हणून चंद्राचे निदर्शक अक्षर च, हे पूर्वी दाखविलेल्या समीकरणात प ज्या स्थानी आहे त्या स्थानी लिहू, आणि केंद्राव्यतिरिक्त आकर्षक ग आहे त्या स्थानी

येथे म म्हणजे सूर्याने निदर्शक अक्षर लिहूं. म्हणजे पूर्वीच्या समीकरणांतील स प ग च्या ऐवजी आता प व म ही अक्षरे योजूं. पूर्वीच्या समीकरणान ग चे प्रकृत्यश व आकर्षण नम ने दाखविले आहे ने आतां म नेच दाखविले आहे.

$$\begin{aligned}
 \frac{प्र}{ज'व'} &= \left\{ \begin{aligned} &अ(१+श^३)^{-\frac{३}{२}} - \frac{१}{२} \frac{सव^३}{ज'व'} - \frac{३}{२} \frac{सव^३}{ज'व'} कोमु २ (व-व') \\ &- \frac{३}{२} \frac{सव^३}{ज'व'} \frac{प-च}{प+च} कोम (व-व') - \frac{३}{२} \frac{सव^३}{ज'व'} \frac{प-च}{प+च} \\ &कोम ३ (व-व') - \frac{३}{२} \frac{सव^३}{ज'व'} \frac{प-च}{प+च} \end{aligned} \right. \\
 \frac{व}{श'ज'व'} &= \left\{ \begin{aligned} &\frac{३}{२} \frac{सव^३}{ज'व'} भु३ (व-व') - \frac{३}{२} \frac{सव^३}{ज'व'} \frac{प-च}{प+च} भु (व-व') \\ &\frac{३}{२} \frac{सव^३}{ज'व'} \frac{प-च}{प+च} भ ३ (व-व') \end{aligned} \right. \\
 \frac{प्रस}{ज'व'} &= \left\{ \begin{aligned} &- \frac{३}{२} श \frac{सव^३}{ज'व'} - \frac{३}{२} श \frac{सव^३}{ज'व'} कोभु २ (व-व') \\ &- \frac{३}{२} श \frac{सव^३}{ज'व'} \frac{प-च}{प+च} कोभु २ (व-व') \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

३३१. ह्या समीकरणामध्ये सर्वच सख्या सामान्य आहेत आणि सामान्य अगुन अव्यक्त आहेत जसे व ही सख्या ही सामान्य असुन अव्यक्त आहे पण शिवाय ती चल आहे ह्या चल सख्येची किंमत आपणाला स्थिर संख्यांनी दाखवावयाची आहे. चंद्राची चलत्रिज्या र आहे आणि लेख १८५ (२) प्रमाणे

$$r = \frac{व(१-इ^३)}{१+इकोभुव} = \frac{१}{व}$$

तेव्हां

$$व = \frac{१+इकोभुव}{व(१-इ^३)}$$

याप्रमाणेच सूर्याची चलत्रिज्या र आहे तेव्हां

$$\frac{१}{र} = व = \frac{१+इ कोभुव}{व(१-इ^३)}$$

आता चंद्राचा केंद्रगमज (मुजाव) कभ याची किंमत लेख १७८ (१) प्रमाणे

$$\text{कभ} = \frac{c^2}{a} = \frac{(1 - e^2) a^2}{a} = (1 - e^2) a$$

पण a म्हणजे दीर्घवर्तुळाच्या वृहदक्षाचे अर्ध $=$ a असे लिहिले आहे.

आणि $\text{कभ} = \frac{1}{a}$ किंवा $\frac{1}{\text{कभ}} = a$ आहे.

$$\text{म्हणून } \text{कभ} = (1 - e^2) a \text{ आणि } a = \frac{1}{(1 - e^2) \text{कभ}}$$

याप्रमाणेच रवीचा केंद्रगमज यावरून

$$a' = \frac{1}{(1 - e'^2) \text{कभ}'}$$

यावरून

$$\begin{aligned} \frac{v'}{v} &= \frac{1 + e' \cos \mu \text{कभ}'}{1 + e \cos \mu \text{कभ}} \times \frac{(1 - e'^2) a'}{(1 - e^2) a} \\ &= \frac{1 + e' \cos \mu \text{कभ}'}{1 - e' \cos \mu \text{कभ}'} \times \frac{a'}{a} \end{aligned}$$

आणि

$$\frac{v'}{v} = \frac{a'}{a} (1 + e' \cos \mu \text{कभ}')^2 \times (1 + e \cos \mu \text{कभ})^{-2}$$

ह्या समीकरणातील v आणि v' ह्या माने चलसम्या आहेत.

३७६. वरच्या प्रेरणाच्या समीकरणामध्ये $\frac{a}{a'}$ ही सख्या आहे हिची किंमत शोधू.

स ही सूर्याकर्षण शक्ति, हिच्याशी समप्रमाणांत प्रकृत्यंश आहेत. सूर्याचे प्रकृत्यंश कक्षेच्या पदांनी समजतात. त्यावरून (ले. ३०७) —

$$s = m$$

$$\text{पृथ्वीचा सूर्यासभोवती प्रदक्षिणाकाल} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{s}}$$

$$\text{आणि चंद्राचा पृथ्वीसभोवती प्रदक्षिणा काल} = 2\pi \sqrt{\frac{a'^3}{s'}}$$

तेव्हां $\frac{\text{चं. प्र. का}}{\text{पृ. प्र. का}} = 2\pi \sqrt{\frac{v^3}{p}} \div 2\pi \sqrt{\frac{v^3}{s}} = \theta$

ठ हे अक्षरचिन्ह योजिले आहे, याची किंमत $\frac{3}{2} \times 10^8$ आहे.

वर्ग केला तर $\theta^2 = \frac{v^3}{v^3} \times \frac{m}{p}$ म्हणून

$$\frac{s}{p} = \theta^2 \frac{v^3}{v^3} = \frac{\{(1 - \frac{v^2}{c^2}) a\}^3}{\{(1 - \frac{v^2}{c^2}) a\}^3}$$

परंतु भूकक्षेसंबंधी जसे $m = \text{अज}^3$ तसे चंद्रकक्षेसंबंधी
 $p = \text{अज}^3$

तेव्हां $\frac{s}{p} = \frac{s}{\text{अज}^3} = \theta^2 \left(\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^3 \frac{a^3}{a^3}$
 $\frac{s}{\text{अज}^3} = \theta^2 \left(\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^3 \times \frac{a^3}{a^3} \dots \dots \dots (1)$

ह्या समीकरणाला $\frac{v^3}{v^3}$ ह्याच्या किंमतीने गुणू. ही मागच्या लेखांत मिळ
 केली आहे. त्यावरून

$$\frac{s v^3}{\text{अज}^3 v^3} = \theta^2 \frac{(1 - \frac{v^2}{c^2})^3 (1 + \frac{v^2}{c^2} \text{कोभुव})^3}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^3 (1 + \frac{v^2}{c^2} \text{कोभुव})^3}$$

३७७. चंद्रकक्षेची केंद्रच्युति इ ही सुमारे $\frac{1}{2}$ आहे. ह्या अनुरोधाने
 सूक्ष्मतेच्या पदव्या स्वीकारल्या आहेत. एखादी संख्या $\frac{1}{2}$ च्या सुमारे असेल
 तर ती सख्या पहिल्या पदवीची संख्या होय. तसेच जी संख्या $\frac{1}{2}$ च्या सुमारे
 असेल ती दुसऱ्या पदवीची संख्या समजावी आणि $\frac{1}{2}$ जवळची तिसऱ्या
 पदवीची संख्या होय. चंद्रकक्षेची केंद्रच्युति इ ही सख्या चंद्रमूर्त्याच्या गतीचे गुणोत्तर
 ठ, चंद्राच्या महत्तम गराची स्पर्शरेषा ल ह्या अक्षराने दाखवावयाचे ठरविले आहे.
 ती ल ही संख्या भूकक्षेची केंद्रच्युति ई ही सुमारे $\frac{1}{2}$ जवळ आहे; ही सुद्धा पहिल्याच
 पदवीची संख्या मानिली आहे. चंद्रकक्षेची सूक्ष्माद्य समीकरणे प्रथम पहिल्या पदवीने
 सोडवावयाची आहेत. नंतर दुसऱ्या, तिसऱ्या पदवीने सोडविता येतात. ही समी-
 करणे एकदम सोडविता येत नाहीत. प्रथम स्थूल किंमती शोधून नंतर त्यापेक्षा
 सूक्ष्म किंमती काढाव्या लागतात. चंद्रावर सूर्याचे आकर्षण दुसऱ्या पदवीची संख्या
 उत्पन्न करणारे आहे; कारण $\frac{s v^3}{\text{अज}^3 v^3}$ याची किंमत ठ या संख्येजवळ आहे. त्याचा

विचार दुसऱ्या पदवीच्या वेळी होईल. असे म्हणून ते बाजूम ठेविले तर चंद्रकक्षेची सूक्ष्मांश समीकरणे खाली लिहिल्याप्रमाणे होतील :-

$$\left\{ \frac{\text{सूक्ष्म}}{\text{सूत्र}} + \text{श} \right\} = ० \dots\dots\dots (१)$$

$$\left\{ \frac{\text{सूत्र}}{\text{सूत्र}} + \text{व} \right\} = \text{अ} \dots\dots\dots (२)$$

$$\frac{\text{सूत्र}}{\text{सूत्र}} = \frac{१}{\text{व}} \dots\dots\dots (३)$$

ह्यापैकी (२) व (३) ही समीकरणे मागे सोडवून दागविली आहेत. लेख ३१६, ३१७ आणि ३०५, ३०६ व ३०७ हे पुन लक्षपूर्वक पहा. विवक्षित समीकरणाचे संकलन त्या समीकरणाच्या सन्धित्वित्वरूनच करावे लागते. चलत्रिज्येसबधी विचार केला तर दिसून येते की, चलत्रिज्या ० बंधीही नमते, म्हणून तिच्या समीकरणात स्थिर मरुत्या असलीच पाहिजे. चलत्रिज्या केंद्र सन्निधानापासून वाढत जाते म्हणून व मरुत्या कमी होत जाईल म्हणून (२) हे समीकरण कोमुज्येचे आहे. पण (१) हे समीकरण शराचे आहे. ते मुज्येचे आहे.

ह्यावरून वरच्या तिन्ही समीकरणांचे संकलन गाली दिल्याप्रमाणे होते :-

$$\text{श} = \text{लभु (एव रा)} \dots\dots\dots (१)$$

$$\text{व} = \text{अ} \{ १ + \text{इकोमु (णब - उ)} \} \dots\dots\dots (२)$$

$$\text{कम} = \text{व} - २इभु (णब - उ) \dots\dots\dots (३)$$

३०८. वरच्या तीन समीकरणांपैकी समीकरण (२) चलत्रिज्येचे आहे याच्या संकलनासबधी लेख ३०१, मध्ये विशेष खुलासा केला आहे. तथापि तेथे (१ - ण) याची किमत ० मानिली आहे, म्हणजे ण - १ मानिली आहे. जर पृथ्वीच्या कक्षेत केंद्र सन्निधान म्हणजे तकअ कोन (आ. लेख ३४१) ज्यास उ म्हटले आहे तो स्थिर असता तर ण - १ असता. पण केंद्रस्थाकर्षणाशिवाय इतर आकर्षण असल्यास कअ रेखा (आ. ले. ३१३) स्थिर रहात नाही. तिला चलन प्राप्त होते. त्या चलनास उच्चाचे चलन म्हणतात. हे चलन आम्ही व ह्या चल संस्थेला ण हा गुणक देऊन त्यात मागील करून घेतले आहे. आणि उ ही सत्य ज्यावेळी व = ० असेल किंवा वास्तविक व ची कालाची समप्रमाणान असलेली क म सत्या ज्यावेळी ० असेल त्या कालाची केंद्रसन्निधानाची समस्या होय. ह्या स्थानी व आणि क म ह्या सत्या स्थूलमानाने समान आहेत असे घेतले आहे. प्रस्तुत आणण असे मानिले आहे की, चंद्रावर पृथ्वीशिवाय इतर कोणाचे आकर्षण नाही (भूयांचे आकर्षण दुसऱ्या पदवीचे आहे) म्हणून चंद्रकक्षा दीर्घवर्तुळ आहे. त्यास अनुसरून समीकरण (२) व (३) यांचा स्पष्ट खुलासा होतो. लेख ३१७ पहा.

३७९. समीकरण (१) हे शराचे आहे. खालच्या आकृतीत तद्दश हें क्रातिवृत्त आहे, आणि ह च हे चंद्राचे कक्षावृत्त आहे. त हे पौष्णांत स्थान असून ह बिंदु चंद्र-कक्षेचा व क्रातिवृत्ताचा छेदन बिंदु (कक्षापात) राहु आहे. आणि च हे चंद्राचे स्थान आहे. च बिंदूपासून त ह क्रातिवृत्तावर चश लंब काढिला आहे, अर्थात चश हा चंद्राचा शर आहे.



चंद्राचा हा गोलीय त्रिकोण असून त्याचा चंद्रास कोन काढायला आहे. नेहमी गोलीय त्रिकोण-मितीवरून :

स्प (चश) = स्प(चह) < भु(हश) [ले. ८७ स. (७)] यामध्ये स्प(चश) स्पशर श.

अणि स्प (चह) — ल ही मध्यम घेतली आहे. मध्यम मानाने चंद्राचा महत्तम शर ५ अंश ८ कला आहे. (अनेक महत्तम शराची बेधाने बेरीज घेऊन आलेल्या वेगवेगळी मगसरी) तसेच हश — तश — तह म्हणजे स्पष्ट चंद्र—राहु —ब—रा.

ह्यातील ह बिंदूचे स्थान स्थिर नाही. ते प्रतिक्षणी न पौष्णांत बिंदूकडे सरत आहे. म्हणजे राहुचा गति असून तो ऋण आहे. याकारिता ए ही मध्या जशी घेतली आहे की,

(ए-१) मध्यम चंद्रगति — राहु गति, द्या यांजनेने राहुची गति चंद्राच्या गतीने दाखविली जाते ती अशी :—

$$\begin{aligned} \text{मध्यम चंद्र} - \text{राहु} &= \text{मध्यम चंद्र} - \{ \text{राहु} - \text{राहुगति} \} \\ &= \text{म. चंद्र} - \text{रा} + (\text{ए} - १) \text{ म. चंद्र} \\ &= \text{म. चंद्र} - \text{रा} + \text{ए. म. च} - \text{म. चंद्र} \\ &= \text{ए. म. चंद्र} - \text{रा} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ह्यामध्ये स्थूल मानाने मध्यम चंद्र} &= \text{स्पष्ट चंद्र घेतला म्हणून} \\ \text{श} &= \text{ल भु (ए ब — रा)} \end{aligned}$$

वर जशी राहुची गति मध्यम चंद्राच्या ए हा गुणक योजून दाखविली तशीच मध्यम चंद्राच्या ण हा गुणक वाजून चंद्राच्या उच्चाची किंवा केंद्र मन्निधानाची गति दाखविता येते ती अशी :—

$$\text{चंद्राच गति} = \text{चंद्र मध्यम गति} \times (१ - \text{ण})$$

$$\text{च. मध्यम गति} - \text{चंद्रोच्चगति} = \text{ण} \times \text{च. म. गति} = \text{ण कम}$$

३८०. सूक्ष्मतेच्या परिमिता पदवी प्रमाणे चंद्राचा गर आणि रवि चंद्राची चल-
त्रिज्या आणि भांग ही समीकरणे सर्वांशी अशी मिळवाली आहेत. ती खाली
दिली आहेत. त्यात Δ हे रवीचे केंद्रसन्निधान आहे असे समजावे. सूर्याने
मध्यकेंद्र कम — Δ हे आहे. ह्याच क हा काल मध्यम रवि ज्या क्षणी पौष्णति
होता त्या क्षणापासून मोजलेला आहे असे समजावे. ग ही रवीची मध्यम गति
आहे क आणि क यामध्ये अंतर आहे आणि Δ ही सरूयाही चल आहे.
परंतु ते चलन अगदी थोडे असल्यामुळे दोन्ही म्हणजे क आणि क काली समाध
आहे म्हणजे Δ हेच आहे असे म्हणण्यास प्रत्यवाय नाही.

ती समीकरणे खाली दिल्याप्रमाणे—

$$\Delta = \text{ल भु (ए व — रा)} \quad \dots \dots (१)$$

$$\text{व} = \left\{ १ - \frac{१}{३} \text{को भु (ण व — उ)} \right\} \quad \dots (२)$$

$$\text{कम} = \text{व} - २ \text{इ भु (ण व — उ)} \quad \dots \dots (३)$$

$$\text{व} = \text{कम} + २ \text{इ भु (ण कम — उ)} \quad \dots \dots (४)$$

$$\text{ब} = \text{कंग} + २ \text{इ भु (कंग — द्र)} \quad \dots \dots (५)$$

$$\text{कंग} = \text{ब} - २ \text{इ भु (ब — द्र)} \quad \dots \dots (६)$$

$$\text{व} - \text{अ} = \left\{ १ - \frac{१}{३} \text{को भु (व — द्र)} \right\} \quad \dots \dots (७)$$

[सूक्ष्मतेची पहली पदवी]

सूक्ष्मतेची दुसरी पदवी

३८१. सूक्ष्मांश समीकरणात उजवीकडे जी व्यक्त सख्यात्मक पदे येतात त्या
पदांचे संकलन करवयाचे असते, त्यात चल सख्या एरुच असावी लागते, आणि जिच्या
सूक्ष्मांशाने सूक्ष्मांशगुण आलेला असेल तीच पाहिजे असो, म्हणजे संकलन करा
येते. वरच्या मिळ केलेल्या सूक्ष्मांश समीकरणात (लेख ३७३, ३७४) व च्या
सूक्ष्मांशा संबंधीच सूक्ष्मांशगुण आहेत, आणि त्या समीकरणाच्या किमती प्र त प
च्या किमती व ह्याच चल सख्येच्या रूपाने जाणिल्या आहेत. तथापि त्यात इतर
चल संख्या येऊ लागल्यास त्या व च्या रूपाने म्हणजे बऱ्या काही स्थीर गुणक योजून
ध्याव्या लागतात. लेख ३८० मध्ये व व कम याची (१), (२), (३) ही समीकरणे
दिली आहेत त्याच्या किमती व च्याच सचयाने दिल्या आहेत. परंतु व कंग आणि व
याच्या किमती व च्या सचयाच्या नाहीत. या रगिता त्या चल सख्याच्या किमती
आपणास व नें दाखविल्या पाहिजेत.

३८२. स्पष्ट रवि चंद्राचा एकमेकाशी कसा संबंध आहे तो कळण्यासारग्या
नाही. परंतु मध्यम रवि चंद्राचा एकमेकाशी जो संबंध आहे तो कळतो. अगोदर
कंग ह्या पदाची किमत ठरवू. काल मोजण्याचा आरंभ क्षण, ज्या क्षणी मध्यम चंद्र

पौष्णांत बिंदूत येईल तो क्षण घेतला आहे. त्यापामुन मोजलेला काल क आहे. ज्या क्षणी मध्यम चंद्र ० होता त्या क्षणी मध्यम रवि ० असे नेहमी सभवत नाही. मध्यम रवि ० होता तो काल क हा आहे. तेव्हा क-क ह्या कालातील रवीची मध्यम गति (क-क) ग इतकी असली पाहिजे. ही चाल 'घ' ह्या अक्षरानें दाखवू तेव्हा :

$$(क-क)ग = कग - कग = घ$$

म्हणून

$$कग = कग + घ.$$

क कालाचा आगणाळा स्पष्ट रवि पाहिजे आहे. म्हणजे बं ची किंमत आपणाळा ठरविली पाहिजे. मध्यम रवि वरून आपणाळा स्पष्ट रवि करिता येतो [ले. ३८० समी. (५)] त्याप्रमाणे

$$बं = कग + २ इं भु (कग - द्र)$$

$$= कग + घ + २ इं भु (कग + घ - द्र)$$

ह्या समीकरणान ग ही रवीची मध्यम गति आली आहे ती लुप्त करिता येने. त्या स्थानी म ह्या चंद्राच्या मध्यम गतीची योजना करता येने. ती खाली दिल्या-प्रमाणे :—

$$ग = २\pi \div \text{रवीचा पूर्ण प्रदक्षिणा काल}$$

$$म = २\pi \div \text{चंद्राचा पूर्ण प्रदक्षिणा काल}$$

$$\frac{ग}{म} = \frac{\text{चं. प्र. का}}{\text{र. प्र. का}} = ठ \quad [\text{ले. ३७६}]$$

$$ग = ठम$$

ही गची किंमत वरच्या समीकरणांत ठेवूं. तेव्हा

$$बं = उकन + घ + २ इं भु (५ रम - घ - द्र)$$

ह्या समीकरणान कम हा मध्यम चंद्र आलेला आहे तो स्पष्ट नाही. त्या स्थानी बहा स्पष्टचंद्र आणिला पाहिजे. हें कृत्य ले. ३८० म. (३) प्रमाणे करिता येने. कारण :

$$कम = बं - २ इं भु (गब - उ)$$

तेव्हां

$$बं = ठ \left\{ बं - २ इं भु (गब - उ) \right\} + घ$$

$$1. २ इं भु \left[ठ \left\{ बं - २ इं भु (गब - उ) \right\} + घ - द्र \right]$$

प्रस्तुत आपणास पहिल्याच पदवीच्या रूपाची जरूर आहे.

म्हणून

$$ब = ठब + घ + २ इं भु (ठब + घ - द्र)$$

वरचे समीकरण ब = ब यांतून वजा केलें तेव्हा

$$ब - ब = ब - ठब - घ - २ इं भु (ठब + घ - द्र)$$

$$२ (ब - ब) = (२ - २ ठ) ब - २ घ - ४ इं भु (ठब + घ - द्र)$$

३८३. कांहीं पारिभाषिक शब्दांचे अर्थ—

केंद्र—ह्या शब्दाचा व्यवहारातील अर्थ अनेक वस्तूच्या एकीकरणाचे स्थान असा आहे. परंतु येथे आम्ही दोन कोनाची किंवा कोनाच्या पटीची वजाबाकी किंवा बेरीज अशा अर्थाने केंद्र हा शब्द वापरून आहो. जसे. मदकेंद्र — ग्रहांचे मध्यम भाग — केंद्रसाक्षिधान मूयचि मदकेंद्र ब — द्र, किंवा चंद्राचा स्पष्ट भाग ब च्या किमतीने (ठब + घ - द्र) हे आहे, इत्यादि.

केंद्रगुणक—केंद्रात जी चळ सख्या असते, तिच्या गुणकाला केंद्रगुणक असें म्हटले आहे जसे (ठब + घ - द्र) ह्या केंद्रात घ आणि द्र हे कोन स्थीर आहेत, ब ही कोनाची सख्या चळ आहे, तिला ठ हा गुणक आहे म्हणून त्याला केंद्रगुणक म्हणावे.

पदगुणक—इच्छितल्या पदाचा जो गुणक त्याला पदगुणक म्हणावे.

लेखन मीकयकिरिता लाव लाव दोन-तीन-चार पदे ज्यामध्ये आहेत जगा केंद्रांना काहीं नामाक्षरें योजिली आहेत. त्याचा खुलासा येथे करून आहे. केंद्रातील स्थीर क्षेपक पदें घ, उ, रा, द्र, ही गाळून ठेवून केंद्रे ठिहावयाची आहेत. ही पदें गाळिल्याने काहीं मोह उत्पन्न होत नाही. ही स्थीरपदे केंद्र गुणकाशी संगत आहेत ब ला केंद्रगुणक १, २, ३ हे गुणक असेल तर त्यापुढे क्षेपक पद नाही. जसे. (२ ब) अने केंद्र असेल तर त्या केंद्रात स्थीर पद नाही. ब ला ण गुणक असेल तर क्षेपक पद

उ आहे असे म्हणावे, एहा गुणक असला तर — रा आहे. केंद्रगुणक ठ असता + घ हें क्षेपक पद असतें. ण रवीच्या, चंद्रगतीनें आणिलेल्या केंद्रात + घ द्र ही क्षेपक पद आहेत. यास्तव त्याठिकाणी ठ च्या जागी उ हा गुणक (केंद्रगुणक) योजिला आहे.

३८४. सूक्ष्माव समीकरण सोडवावयाचे म्हणजे त्यान जे अवलंबी पद असते त्याची किंमत ठरविणें होय. त्या समीकरणात जो सूक्ष्माव गुण असतो त्याची किंमत केवळ सख्यानी दिलेली असते त्या सख्यावरून त्या अवलंबी पदाची किंमत ठरते ह्याच्या कृतीला सकलत म्हटले आहे. प्रस्तुत विषयामध्ये म्हणजे ग्रहगणितात जी

सूक्ष्मांश समीकरणे आली आहेत, आणि त्याचे सकलन करण्याचे प्रसंग येतात त्यांची काल्पनिक एक-दोन उदाहरणे घेऊन त्यांचे सकलन कशा रीतीने करावे याची रीति खाली देतो. त्याकरिता एक काल्पनिक पद सामान्य स्वरूपाचे घेतो :—

$$\frac{सू^1 व}{सू^2 व} + व = + थ कोभु (पव - स) (१)$$

ह्या समीकरणाचे सकलन कसे येते हे माहित आहे. डावीकडच्या पेट्यात व ही संख्या येते आणि उजवीकडे कोभु (पव - स) हेच पद येते. पण त्याला गुणक कोणता येतो हे माहित नाही. समजा तो गुणक फ हा येतो म्हणजे सकलन

$$व = + फ कोभु (पव - स) .. (२)$$

याचा शून्यलब्धिगुण.

$$\frac{सू^1 व}{सू^2 व} = - फ कोभु (पव - स) .. (३)$$

तसेच :

$$\frac{सू^1 व}{सू^2 व} - - प^१ कोभु (पव - स) .. (४)$$

समीकरण (२) व (४) यांची बेरीज केली तर

$$\frac{सू^1 व}{सू^2 व} + व = (१ - प^१) कोभु (पव - स) (५)$$

समीकरण (१) याचे सकलन समीकरण (२) हे आहे कारण (२) ह्या समीकरणापासून समीकरण (१) मधील डावीकडचा पेटा नष्ट होतो आणि असे टप्पे की, समीकरण (१) आणि (५) ही दोन्ही एकच आहेत. म्हणून

$$\begin{aligned} + थ कोभु (पव - स) &= + (१ - प^१) कोभु (पव - स) \\ थ &= (१ - प^१) फ \\ फ &= \frac{थ}{१ - प^१} \end{aligned}$$

ह्यावरून रीति ठरते ती अशी :—

रीति (१) व आणि व याच्या सूक्ष्मांश समीकरणाने सकलन करावयाचे असले तर, ज्या पदाचे सकलन करावयाचे त्याच्या केंद्रगुणकाचा वर्ग १ ह्या मध्येन वजा करून आलेल्या बाकीने त्या पदाच्या गुणकाला भागावे, हा भागाकार सकलित पदाचा गुणक होतो. सकलनाने केंद्रगुणक किंवा क्षेत्रक पद यात बदल होत नाही. सकलन ज्या पदाचे असेल त्याशीच सकलन कार्याचा संबंध असतो, इतर पदाशी नसतो.

ह्या पद्धतीनेच कालाच्या म्हणजे कम च्या समीकरणाचे संकलन कसे करावे ते ठरवू. त्याकरिता काल्पनिक पद घेऊं.

$$\frac{\text{सूक}}{\text{सूब}} = \dots \dots \dots + \text{ब कोभु (पब-स)}$$

याचे संकलन

$$\text{क} = \dots \dots \dots + \text{फ भु (पब-स)}$$

याचा सूक्ष्मांश गुण

$$\frac{\text{सूक}}{\text{सूब}} = \dots \dots \dots + \text{पफ कोभु (पब-स)}$$

$$\text{पफ} = \text{ध}$$

$$\text{फ} = \frac{\text{ध}}{\text{प}}$$

यावरून रीति ठरते ती खाली दिली आहे. कौमुज्येचे संकलन + भज्या ह्या पदानें येते, आणि मुज्येचे संकलन—कौमुज्येने येते.

रीति (२) कालाच्या सूक्ष्मांश समीकरणाचे म्हणजे $\frac{\text{सूक}}{\text{सूब}}$ याचे

किंवा त प्रेरणेच्या पदाचे संकलन करावयाचे असेल तर, ज्या पदाचे संकलन करावयाचे त्या पदाच्या गणकाचा त्याचदा केंद्रगुणाने भागावे भागावर हा संकलित पदाचा गुणक होतो. केंद्रान काही बदल होत नाही.

३८५. वरच्या लेखातील विचारावरून आपणारा हे कळते की, संकलनानंतर विवक्षित पदाचा पदगुणक बदलतो, त्यामुळे किथ्थेक पदाची पदवी भिन्न होते. जर आणि चरित्रिया ह्याची पदवी चरवीची निमरी, निमरीची दुसरी, पाचवीची चवथी याप्रमाणें होत. ज्या पदाचा केंद्रगुणक १ ह्या मध्येजवळ असेल तर (१ केंद्रगुण) हा भाजक लहान झाल्याने, संकलनानंतर येणारा पदगुणक मोठा होतो आणि वर-प्रमाणे पदवी सूक्ष्मतेच्या अर्थाकडे येते म्हणजे निमरीची दुसरी होते पण केंद्र-गुणक ३ ते ५ ह्या मध्या मधीप असेल तर पदवी सूक्ष्मतेकडे जाते म्हणजे निमरीची चवथी होते. कालाच्या समीकरणान केंद्रगुणक ० ह्या मध्येजवळ असता त्याने भागिल्याने पद गुणक वाढतो. ह्यावरून संकलनानंतर ज्या पदवीची पदे आध्यात्म इष्ट असतील, त्या अनुसंधानानें समीकरणान पदे गोळा केली पाहिजेत. कालाच्या समीकरणात येणाऱ्या $\frac{\text{सू}}{\text{धज्येव}}$ याच्या किमतीपासून येणाऱ्या पदाचे दोन वेळा संकलन होते. म्हणून त्यातील ० मधीप केंद्रगुणाची पदे दोन पदव्या पुढची घ्यावी लागतात.

३८६. चंद्राची मूशमांदा समीकरणे दुसऱ्या पदवीने सोडविण्यास आता सुरुवात करूं. समीकरणात जी पदे घ्यावयाची ती कोणत्या पदवीची घ्यावी याचा गणित-कार्याच्या आधी उमज घडावा याकरिता समीकरणातील गुणक कोणत्या पदवीचे आहेत हे त्वरित लक्षात यावे म्हणून त्याचे स्पष्टीकरण प्रथम वाढतो. हे मुख्य गुणक चार आहेत. तें असे

$$(१) \frac{सर्व^१}{ज'व^१}, \quad (२) \frac{सर्व^२}{ज'व^२}, \quad (३) \frac{सर्व^३}{ज'व^३}, \quad (४) \frac{सर्व^४}{ज'व^४}$$

$$(१) \frac{सर्व^१}{ज'व^१} = अठ^३ (१ - इ कोभुडव)^१ / (१ - इ कोभुणव)^{-३}$$

ह्यावरून हे पद दुसऱ्या पदवीपामून तिसरी चवथी वगैरे हव्या त्या पदवीपर्यंत आहे.

ह्या पहिल्या पदाचा व — अ (१ - इ कोभुणव) याचे गुणिते

$$(२) \frac{सर्व^२}{ज'व^२} = ठ^३ (१ - इ कोभुडव)^२ \times (१ - इ कोभुणव)^{-६}$$

$$(३) \frac{सर्व^३}{ज'व^३} = \frac{अ}{अ} अठ^३ (१ - इ कोभुडव)^३ \times (१ - इ कोभुणव)^{-९}$$

$$(४) \frac{सर्व^४}{ज'व^४} = \frac{अ}{अ} ठ^३ (१ - इ कोभुडव)^४ \times (१ - इ कोभुणव)^{-१२}$$

भु (व-व) तसेच कोमु (व — व) तसेच (व-व) ची कोणतीही पट याची भुजव्या किंवा कोभुजव्या ह्या पदवी कमजास्त करीत नाहीत. पण याच्या विस्तारात आ पदे येतील त्यांना काही गुणक येतात त्या गुणकानुषंग त्या पदाची पदवी असते. (३) आणि (४) हे गुणक चवथ्या पदवीचे आहेत. कारण—

$$\begin{array}{l} अ \quad प \quad व \\ अ \quad प \quad व \quad - \quad ४३० \quad आहे, \end{array}$$

३८७. प्रथम जगचे समीकरण घेऊ ह्या समीकरणात ३ पदे आहेत ते. ३७३ पहा. ती क्रमाने घेऊन त्याच्या किमती काढू. ह्या किमतीत दुसऱ्या पदवीची सर्व पदे, आणि ज्याचा त्रिगुणक १ त्या सर्वत्रयल आहे अशी तिसऱ्या पदवीची पदे इतकीच घ्यावयाची आहेत.

$$\begin{aligned} \text{प्रश्न—व} &= - ३ ण \frac{सर्व^१}{ज'व^१} \left\{ १ - कोभु २ (व व) \right\} \\ &= - ३ ठलभुएव \left\{ १ + कोभु (२ - २ ठ) व \right\} \\ &= - ३ ठलभुएव + ३ ठलभु (२ - २ ठ - ए) व \end{aligned}$$

ह्या स्पष्टीकरणांत निम्नया पदवींचें आणखी एक पद मिळतें, ते
 ३ ठंलमु (२-२५ ए) व हें आहे. पण याचा वेद गुणक (२ ए) हा ३ मध्ये-
 भवळ आहे कारण ए १. म्हणून ते घेतले नाही. वरच्या पदाच्या निम्नची मधील
 ग $\frac{\text{सव}^{\text{१}}}{\text{जव}^{\text{१}}}$ हा गुणक पांचव्या पदवीचा आहे. समीकरणातील दुसरे पदाचे
 स्पष्टीकरण:—

$$\text{श} = \text{लभुएव}$$

$$\frac{\text{सूय}}{\text{सूव}} = \text{लएकोमुएव} = \text{लकोमुएव} [\text{कारण ए} = १]$$

$$\begin{aligned} - \frac{\text{त सूय}}{\text{यजव सूव}} &= - \frac{\text{सव}^{\text{१}}}{\text{जव}^{\text{१}}} \text{मु० (व-व)} / \text{लकोमुएव} \\ &= ३ ठंम (२-२५) व \times \text{लकोमुएव} \\ &= + ३ ठंलमु (२-२५-ए) व \end{aligned}$$

त प्रेम्णेच्या किमतीपासून निम्नया पदवींचे इष्ट पद यारेआ आणखी निघत
 नाही शराच्या समीकरणातील निम्नया पदाला $\left\{ \frac{\text{सूश}}{\text{सूव}} \text{ श} \right\}$ हा गुणक आहे
 ह्याची पहिल्या पदवीची किमत शून्य आहे. आणि गणित करीत आहोत एवें निम्नया
 पदवीची पदे आहेत ठंल हा गुणक निम्नया पदवीचा आहे. ठं $\left(\frac{\text{त}}{\text{यजव}} \right) \text{सूव}$
 ह्यातील पाहिले पद ठं आहे म्हणजे दुसऱ्या पदवीचे आहे. म्हणून शराच्या
 समीकरणात वर निघालेल्या पद निघालेले पद निघत नाही. म्हणून

$$\frac{\text{सूश}}{\text{सूव}} = \text{श} \quad ३ ठंलंमएव \quad ३ ठंलमु (२-२५-ए) व$$

ह्या समीकरणाचे सकलन केले म्हणजे शची किमत काढेल. किंवा २८४
 मधील रीति (१) प्रमाणे कृति करावयाची. तेव्हा
 $(-३ ठंल) \div (१ ए) =$

पण मुएव ह्या पदाचा गुणक ल आहे असे भूमितीरात्या मिळ आहे.
 अर्थात एथेही तोच गुणक असला पाहिजे. म्हणून

$$(-३ ठंल) \div (१-ए) = \text{ल}$$

$$\begin{aligned} \text{तेव्हा} \quad १-ए &= -३ ठं ; ए = १-३ ठं \\ ए &= १ + ३ ठं \end{aligned}$$

हवाप्रमाणे पथे आपणाला एक महत्त्वाचा मित्रान मांडला आहे. तो अमा की, ए ही सध्या मध्यम चंद्रगतीशी संबंध दाखविने आणि त्यावरून राहुगतीचा मध्यम चंद्रगतीशी संबंध कळता. लेख ३७१ मध्ये दाखविले आहे की,

$$(१ - ए) \times \text{मध्यम चंद्रगति} = \text{राहुगति} \\ = - \frac{३}{४} \theta^{\circ} \text{ मध्यम चंद्रगति}$$

$$\text{राहुगति} = - \frac{३}{४} \theta^{\circ} \text{ चंद्राची मध्यमगति}$$

$$\text{चंद्राची मध्यम गति } ७९० \text{ कला आहे आणि } \theta^{\circ} = १\frac{१}{२} \text{ तेव्हा}$$

$$\text{राहुगति} = - \frac{३}{४} \times १\frac{१}{२} \times ७९० = - ३\frac{१}{४} = - ३.२९ \text{ कला.}$$

सूक्ष्मांश समीकरणार्चा ही दुसरीच पदवी आहे, म्हणून आलेली राहुगति स्थूल आहे.

आता दुसऱ्या पदाने संकलन करू. त्यासाठी त्या पदाना संकलन गुणक तयार करू.

$$\left\{ १ - (२ - २\theta - ए)^२ \right\} = \left\{ १ - (१ - २\theta)^२ \right\} \\ = \left\{ १ - (१ - ४\theta) \right\} \\ = + ४\theta$$

$$\frac{१}{१ - (२ - २\theta - ए)^२} = \frac{१}{४\theta} \text{ हा संकलन गुणक होय}$$

तेव्हा

$$\frac{३}{४} \theta^{\circ} \times \frac{१}{४\theta} = \frac{३}{१६} \theta^{\circ}$$

$$\text{म्हणून ते दुसरे पद} = + \frac{३}{१६} \theta^{\circ} \text{ मु } (२ - २\theta - ए) \text{ व}$$

यावरून

$$श = \text{लभुएव} + \frac{३}{१६} \theta^{\circ} \text{ मु } (२ - २\theta - ए) \text{ व} \\ [\text{शराची दुसरी पदवी}]$$

३८८. आता श्रावण चरित्रांमध्ये समीकरण मोडविण्यास येऊ. चरित्रांमध्ये म्हणण्याचे जागी आपण त्यास व ते समीकरण म्हणू कारण $\frac{१}{४}$ व अंशद्विज्येच्या म्हणजे व च्या सूक्ष्मांश समीकरणांत दोन पदे आहेत. त्यापैकी पहिले पद $\frac{३}{१६} \theta^{\circ}$ हे आहे. याची किंमत लेख ३७४ मध्ये दिली आहे. त्या किंमतीत सहा पदे आहेत.

ती क्रमानें घेऊन त्यानील दुसऱ्या पदवीची सर्व आणि ज्याचा केंद्रगुणक १ हा सत्य समीप आहे अशी तिसऱ्या पदवीची पदे गोळा करूं.

$$(१) \quad a(1 + a^2)^{-\frac{3}{2}} = a(1 - \frac{3}{2}a^2 + \dots)$$

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2}a^3 &= -\frac{3}{2}a^3 + \frac{3}{2}a^3 \text{ कोभु२ एव} \\ &= -\frac{3}{2}a^3 + \frac{3}{2}a^3 \text{ कोभु२ एव} \end{aligned} \quad [१]$$

$$\begin{aligned} (२) \quad -\frac{\frac{3}{2}a^3}{\frac{3}{2}a^3} &= -\frac{3}{2}a^3(1 + \frac{3}{2}a^2 \text{ कोभु३ व}) (1 - \frac{3}{2}a^2 \text{ कोभु३ व}). \\ &= -\frac{3}{2}a^3 + \frac{3}{2}a^3 \text{ कोभु३ व} \end{aligned} \quad [२]$$

$$\begin{aligned} (३) \quad -\frac{\frac{3}{2}a^3}{\frac{3}{2}a^3} \text{ कोभु२ (व-ब)} &= २(-\frac{3}{2}a^3 + \frac{3}{2}a^3 \text{ कोभु३ व}) \text{ कोभु (२-२ठ) व} \\ &= -\frac{3}{2}a^3 \text{ कोभु (२-२ठ) व} \\ &+ \frac{3}{2}a^3 \text{ कोभु (२-२ठ-ण) व.} \end{aligned} \quad [३]$$

(४) (५) यातील किंमत चवथ्या पदवी पुढील आहे

$$(६) \quad \frac{t}{a \frac{3}{2} a^3 \frac{3}{2} a^3} = + \frac{\frac{3}{2} a^3}{\frac{3}{2} a^3} \text{ भु (२-२ठ) व} \times \frac{\frac{3}{2} a^3}{\frac{3}{2} a^3} + \dots$$

यातील पुढची दोन पदे चवथ्या पदवीची आहेत. तेव्हा

$$\begin{aligned} -\frac{t}{a \frac{3}{2} a^3 \frac{3}{2} a^3} &= \frac{3}{2}a^3(1 - \frac{3}{2}a^2 \text{ कोभु३ व}) \text{ भु (२-२ठ) व} \frac{\frac{3}{2} a^3}{\frac{3}{2} a^3} \\ &= a(1 + \frac{3}{2}a^2 \text{ कोभु३ व}) \end{aligned} \quad [\text{ले. ३८०}]$$

$$\frac{\frac{3}{2} a^3}{\frac{3}{2} a^3} = -a \text{ कोभु३ व} = -a \text{ कोभु३ व} \quad [\text{ण} = १]$$

$$-\frac{t}{a \frac{3}{2} a^3 \frac{3}{2} a^3} = -\frac{3}{2}a^3 \text{ कोभु (२-२ठ-ण) व} \quad [६]$$

आता व च्या समीकरणातील दुसरे पदापासून येणारा किंमत काढू. त्या दुसऱ्या पदान दोन अवयव आहेत. त्यापैकी एक अवयव खाली दिल्याप्रमाणे आहे. लेख ३७७ स. (२) पहा.

$$२\left\{\frac{\frac{3}{2} a^3}{\frac{3}{2} a^3} + v\right\} = २a$$

दुसरा अवयव $\frac{त}{यजं वं}$ सू. व. यातील

$$\begin{aligned}\frac{त}{यजं वं} &= - \frac{३}{२} \frac{सर्वं}{जं वं} भु (व - वं) \\ &= - \frac{३}{२} ठ (१ - ४ इ कोभुण व) भु (२ - २ठ) व \\ &= - \frac{३}{२} ठ भु (२ - २ठ) व + ३ ठ इ भु (२ - २ठ - ण) व\end{aligned}$$

या समीकरणाने सकलन करावयाचे. लेख १८८ रीति (२). तेव्हा

$$\begin{aligned}\frac{त}{यजं वं} सू. व. &= + \frac{३}{२} \frac{ठ}{२ - २ठ} कोभु (२ - २ठ) व \\ &= ३ \frac{ठ इ}{२ - २ठ - ण} कोभु (२ - २ठ - ण) व \\ &= \frac{३}{२} ठ कोभु (२ - २ठ) व - ३ ठ इ कोभु (२ - २ठ - ण) व\end{aligned}$$

तेव्हां

$$\begin{aligned}&- २ \left\{ \frac{सर्वं}{सू. वं} + व \right\} \times \frac{त}{यजं वं} सू. व. \\ &= - \frac{३}{२} अठ वामु (२ - २ठ) व + ३ अठ इ वामु (२ - २ठ - ण) व\end{aligned}$$

वर वाढिलेल्या $\frac{प्र}{जं वं}$ या पदाची किंमत आणि दुसऱ्या पदाची किंमत वरची दोन पदे ही एकत्र केली. तेव्हा,

$$\left\{ \frac{सर्वं}{सू. वं} + व \right\} = अ \left\{ \begin{aligned} &१ - \frac{३}{२} ल - \frac{३}{२} ठ, \frac{३}{२} ठ इ वामु ण व \\ &+ \frac{३}{२} ल कोभु २ ए व - ३ ठ कोभु (२ - २ठ) व \\ &- \frac{३}{२} ठ इ कोभु (२ - २ठ - ण) व \end{aligned} \right.$$

ह्या समीकरणाने सकलन खालच्या लेखात केले आहे.

३८९. व च्या समीकरणाने संकलन करावयाचे. ह्या समीकरणाने — $\frac{३}{२} ल - \frac{३}{२} ठ$ ही आणि यांना गुणक अ अशी स्थीर पदे आहेत परंतु, ह्या समीकरणाने अमलेल्या स्थीर पदाने (बंदान्वितस्थीर पदाने) कोणत्याही प्रकारचा विपर्यास होत नाही. हे महज लक्षात घेण्यासारखे आहे. कारण सूक्ष्माद्य-गुण वर्तविताना विकारी पदाशी असंयुक्त पदे लुप्त होतात. पण ह्या समीकरणाने व हे विकारीपदे मिळविणे असल्यामुळे सकलनात ती पदे जशीची तशी येतात.

सूक्ष्माद्य गणित व त्यास महाद्यभूत विक्रीमिति आदिकरून उच्चगणितात्मक भाग याच्या सहाय्याने अनेक चमत्कृतिजनक सिद्धांत व शोध लागले आहेत. त्या-पैकीच चंद्राचा कक्षापात म्हणजे राहु याची गति केवळ गणिताने साध्य होणे, तशीच

चंद्रोच्च अथवा वक्राचे केंद्रसंज्ञिधान याचीही गति माध्य होत. चंद्रोच्चगति वरच्या समीकरणावरून कशी माध्य होत हे राहगति लेख २८३ मध्ये दाखविली आहे त्याच-प्रमाणे साध्य होते. तीं खाली दिल्याप्रमाणे.

भूमिनिरीत्या मिद्ध केले आहे की, व ह्या पदाच्या किंमतीत कोभुणव ह्या पदाला इ हा गुणक आहे. आणि आकर्षण कार्य नमने तर त्यात बदल झाला नसता.

सकलनानें त्या पदाला $+ ३ \frac{\delta^3 \text{इ}}{१ - \text{ण}}$ हा गुण येतो. अर्थात हे दोन्ही गुणक समान आहेत. म्हणून,

$$\begin{aligned} & ३ \delta^3 \text{इ} : (१ - \text{ण}) - \text{इ} \\ & १ - \text{ण} \quad ३ \delta^3 ; \quad \text{ण} \quad १ \quad ३ \delta^3 \\ & \text{ण} - १ - ३ \delta^3 \end{aligned}$$

२९०. व च्या समीकरणाचे सकलन करण्याकरिता सकलन गुणक तयार करू. म्हणजे त्या गुणकाने ज्याच्या त्या पदाला गुणितवाने सकलन होत. तो गुणक व गुणाकार खाली दिल्याप्रमाणे एथे गुणक न क्विता - ३, - ३, १, ४ ठ हे भाजकच तयार केले आहेत.

$$\begin{aligned} & ३ \delta^3 : (१ - ४ \text{ए}) \quad ३ \delta^3 : (१ - ४) = - ३ \delta^3 \\ & - ३ \delta^3 : \{१ - (२ - २\delta)^2\} - ३ \delta^3 : (१ - ४) = + \delta^3 \\ & - \frac{१}{२} \delta^3 \text{इ} : \{१ - (२ - २\delta - \text{ण})^2\} = \frac{१}{२} \delta^3 \text{इ} : ४\delta \\ & = + \frac{१}{२} \delta^3 \text{इ}. \end{aligned}$$

ह्यावरून व चें समीकरण खाली दिल्याप्रमाणे झाले.

$$\begin{aligned} \text{व} - \text{अ} \left\{ \begin{aligned} & १ - \frac{१}{२} \delta^3 - ३ \delta^3 + \text{इ कोभुणव} - \frac{१}{२} \delta^3 \text{कोभु} २ \text{ए व} \\ & + \delta^3 \text{कोभु} (२ - २\delta) \text{ व } + \frac{१}{२} \delta^3 \text{कोभु} (२ - २\delta - \text{ण}) \text{ व} \end{aligned} \right\} \\ \text{[व ची दुसरी पदवी]} \end{aligned}$$

२९१. शर आणि चलत्रिज्या यांची सूक्ष्मांश समीकरणे दुसऱ्या पदवीपर्यंत सोडविली. आतां कालाचे म्हणजे कम चे समीकरण दुसऱ्या पदवी पर्यंत सोडवावयाचे. पण ते सोडविण्यास व च्या किंमतीची काही पदे निमऱ्या पदवीची घ्यावी लागतात म्हणजे ज्या पदाचा केंद्रगुणक ० ह्या सत्येजवळ असेल अशी निमऱ्या पदवीची पदे शोधावी लागतात. याकरिता व चें समीकरण निमऱ्या पदवीपर्यंत पूर्णत्वाने सोडवि-ल्यावर कम चें समीकरण सोडवू. शर आणि चलत्रिज्या यांची समीकरणे निमऱ्या पदवीने सोडविण्यास कम च्या दुसऱ्या पदवीच्या पदाची आवश्यकता नाही.

२९२. चलत्रिज्या आणि शर याच्या समीकरणातील पदे दुसऱ्या पदवी-करिता जशी गोळा करिता आली, तशी पुढच्या पदवीकरिता गोळा करणे अति कठीण काम होईल. वरच्या समीकरणाच्या कृतीवरून आपणाम हे समजून आले

आहे की, समीकरण इष्ट पदवीनें सोडविण्याकरितां विवक्षित पदे गोळा करावी लागतात. म्हणजे नियमित पदवीची आणि नियमित केंद्रगुणकाची पदे शोधावी लागतात. प्रत्यक्ष पदे गुणाकार वगरे करून न काढिता विवक्षित पदे शोधिता याची अशाकरिता खालची युक्ति योजिली आहे. या युक्तीत अशी योजना केली आहे की, प्रत्येक पदाची किंमत दाखविण्याम अव्यक्त अशी पदे घेऊन त्याच्या गुणाकाराने (नुसते गुण्य गुणक माडून) त्या पदाची किंमत इष्ट पदवीपर्यंत दाखविशी आहे. त्या गुण्य गुणक स्वरूपापासून इष्ट पदे शोधिता येतात. संयुक्त पदापासून निर्माण होणारी असंयुक्त पदे कोणत्या केंद्रगुणकाची आहेत व कोणत्या पदवीची होतील हे प्रत्यक्ष गुणाकार न करिता कळतें याचें स्पष्टीकरण पृष्ठे दिल्याप्रमाणें. उदाहरणार्थ, एक, दोन अवयवाचे संयोगी पदे घेऊ व त्याची असंयुक्त पदे करू तो गुणाकार असा—

$$प कोभु न व \times द कोभु म व$$

हे दोन अवयवाचे संयोगी पद आहे, ह्यात प हा पहिल्या पदवीचा गुणक असून द हा दुसऱ्या पदवीचा गुणक आहे. तेव्हा पद हा निम्न्या पदवीचा गुणक होईल म्हणजे असंयुक्त असे प्रत्येक पद निम्न्या पदवीचे होईल, आणि त्याचे केंद्रगुणक याची लिहिल्याप्रमाणे होतील.

$$\frac{१}{२} प कोभु (न + म) व + \frac{१}{२} प कोभु (न - म) व$$

ह्यावरून उघड होते की, संयुक्त पद ज्या दोन पदांच्या गुणाकारापासून झालेले असेल, त्याच्या पदगुणकाच्या गुणाकाराचे अर्थ हा असंयुक्त पदाचा गुणक असतो. आणि ह्या गुणकावरून तें पद कोणत्या पदवीचे आहे हे समजते. तसेच त्या दोन अवयवाचे जे केंद्रगुणक असतील, त्याच्या बेरजेबरोबर एका असंयुक्त पदाचा केंद्रगुणक असून दुसऱ्या पदाचा केंद्रगुणक वजावाकी बरोबर असतो. एथे हेही कळेल की, पद हा चवथ्या पदवीच्या पदाचा गुणक आहे. संयुक्तपद दोहोपेक्षा जास्त अवयवाचे असले तरी ही पदाच्या गुणकाच्या गुणाकाराने असंयुक्त पदाची पदवी कळेल, आणि केंद्रगुणकाच्या बेरजा वजावाक्या ह्यावरून असंयुक्त पदाचा केंद्रगुणक शोधिता येतो. ह्या योजनेनें विवक्षित पदे म्हज बेचिता येतात.

३९३. आपण आता ज्या सूक्ष्मांश समीकरणाचे मकलन करीत आहोत, त्याच्यामधील पदांच्या किंमती सामान्य स्वरूपाच्या आणि अव्यक्त संख्यात्मक घेऊ, आणि त्या अव्यक्त संख्या संघ रूपानें घेऊ. ते सध कमे हे खालच्या स्पष्टीकरणावरून कळेल. श व आणि कम यांच्या किंमती सामान्य स्वरूपाने आणि सध रूपाने खाली लिहिल्याप्रमाणें घेतल्या आहेत.

$$श = (श_१) + (श_२) + (श_३) + (श_४) \dots \dots (१)$$

$$\frac{१}{अ} व == (व_१) + (व_२) + (व_३) + (व_४) \dots \dots (२)$$

$$कम = ब + (क_१) + (क_२) + (क_३) \dots \dots (३)$$

श चे आणि व चे सूक्ष्मांश समीकरण दुसऱ्या पदवीपर्यंत सोडविलेले आहे त्यावरून (श_१), (श_२) यांच्या किमती व्यक्त झाल्या आहेत त्या अशा.

$$(श_१) = ल भु ए व$$

$$(श_२) = \frac{३}{४} ठ ल भु (२ - २ठ - ए)$$

तसेच व च्या किमती खाली दिल्याप्रमाणे

$$(व_१) = अ इ को भु ण व$$

$$(व_२) = -\frac{१}{४} अ ठ - \frac{३}{४} अ ल - \frac{१}{४} अ ल को भु र ए व$$

+ अठ को भु (२ - २ठ) व + $\frac{१}{४}$ अठ को भु (२ - २ठ - ण) व
ह्यांपैकी प्रत्येक पद. अशा संघाच्या स्वरूपाने (व_२) हे अव्यक्त पद योजिले आहे.

एथे अमेठी लक्षाने अमावे की, (व_२)^३ ह्या संघेचा अथ वरच्या पावही पदाच्या एकूणाची वर्ग.

३१.८. चद्राच्या गणितातील सूक्ष्मता सूक्ष्मतेच्या चवथ्या पदवीपर्यंत त्याचा अशा हेतूने हें गणित करावयाचें आहे. तेव्हा त्या मानाने अव्यक्त पदे घेतली आहेत. प्रेरणाच्या किमतीमध्ये प्रत्येक प्रेरणेमध्ये आहे अशी माधारण पदे आहेत. त्या पदाच्या किमती सामान्य स्वरूपाने आधि तयार करू, म्हणजे त्यावरून प्रत्येक प्रेरणेची किमत सहज तयार होईल. ही सामान्य पदे खाली दिल्याप्रमाणे.

$$\begin{aligned} (१) श, & (५) भु (ब - ब'), & (९) भु३ (ब - ब'), \\ (२) व, & (६) को भु (व - व'), & (१०) को भु३ (व - व') \\ (३) क, & (७) भु२ (ब - ब'), & (११) [१] ब - द \\ (४) व, & (८) को भु२ (व - व'), & (११) (२) को भु (ब - द) \\ (१२) [१] ब, & (१२) [२] ब', & (१२) [३] ब'' \\ (१३) [१] \frac{१}{व}, & (१३) [२] \frac{१}{व'}, & (१३) [३] \frac{१}{व''} \end{aligned}$$

$$(१४) \frac{स}{ज}$$

$$(१५) [१] \frac{स व'}{ज व'} ; (१५) [२] \frac{स व''}{ज व''}$$

$$(१५) [३] \frac{स व'''}{ज व'''} ; (१५) [४] \frac{स व''''}{ज व''''}$$

ह्या पदांच्या किमती, व्यक्त पदे असल्यास त्यानी, आणि व्यक्त पद नसल्यास अव्यक्त पदांनी प्रथम तयार करूं. नंतर त्यांच्या निदर्शनाने प्रेरणाच्या किमती ठिहूं. ह्या किमती मधून आपणास इष्ट पदवीची पदे वेचून घेऊन समीकरणे मांडता येतील.

३९५. वरच्या २० पदांपैकी (१), (२), (३) यांची स्वरूपे स्पष्टीकरणासह ३९३ लेख यामध्ये दाखविली आहेत.

(४) व सूर्याचे स्पष्ट भोग सूक्ष्माग समीकरणात अवलंबी पद व आणि क ह्या पैकी एक, आणि विकारी पद व हे एकच असले पाहिजे. ह्या त्रिवाय चतुस्रूपा तसली पाहिजे त्या शिक्क्य असलेला चतुस्रूपा व च्या पटीनेच दाखविली पाहिजे. तेव्हां

$$व = ठकम + घ + २इंभु (ठकम + घ - द्र)$$

$$+ ३इंभु२ (ठकम + घ - द्र)$$

[लेख ३२०, ३२५, ३८२]

ह्या समीकरणान कम हे पद आहे ते यातून लुप्त केले पाहिजे.

$$कम = व + (क_१) + (क_२) + (क_३)$$

ह्या समीकरणाचा ठ ने गुणून त्यात घ - द्र ही मधीगद धनर्ण केली तेव्हां.

$$ठकम + घ - द्र - ठव + घ - द्र + ठ(क_१) - ठ(क_२) - ठ(क_३)$$

ह्या पदाची व याच्या दुपटीच्या पदाची भुज्या केली पाहिजे.

(हे कृत्य लेख २५६ प्रमाणे करावे.)

एक पटीची भुज्या चवथ्या पदवीपर्यंत पुढे, आणि दुपटीची भुज्या दुसऱ्या पदवीपर्यंत असावी. त्या भुज्याना अनुक्रम २इं आणि ३इं हे गुणक यावयाचे आहेत. इं ही सख्या फार सूक्ष्म (ह्) असल्यामुळे इं पेशा जास्त सूक्ष्मतेची आवश्यकता नाही ठकम + घ - द्र ह्यातील घ - द्र ह्या सख्या गालून ठ च्या जागी इ हा केंद्र गुणक केला. असे घेऊन :—

$$भ (ठकम + घ - द्र) = भुडव + ३इं (क_१) भुडव + ठ(क_१) कोभुड + ठ(क_२) कोभुड + ठ(क_३) कोभुड$$

आणि भ (ठकम + घ - द्र) भुडव + ३इं (क_१) कोभुड तेव्हा

$$व = \left\{ \begin{array}{l} ठव + घ + ठ(क_१) + ठ(क_२) + ठ(क_३) \\ + २इंभुडव + २इंठ(क_१) कोभुडव \\ + २इंठ(क_२) कोभुडव + २इंठ(क_३) कोभुडव \\ - ३इं (क_१) भुडव + ३इंभुडव \\ + ३इंठ(क_१) कोभुडव \dots \dots \dots (४) \end{array} \right.$$

३९६. (५) मु(व - वं), हे पद तयार करण्याकरिता व चंद्राचे स्पष्ट भोग यामध्ये व म्हणजे सूर्याचे स्पष्ट भोग वजा करावयाचे. अर्थात समीकरण (४) वजा करावयाचे. आणि जी वजावाकी येईल त्या वाकीची भुज्या करावयाची आहे. (हे कृत्य लेख २५६ प्रमाणे करावे.)

प्रथम व-वं यांची वजावाती लिहिली पाहिजे, ती खाली दिली आहे. ती सर्व न देता निमऱ्या पदवीपर्यंत फार सूक्ष्म होते. पण दिली आहे.

$$व-वं = (१-ठ)व - २इंमुडव - ठ(क_१) - ठ(क_२)$$

$$\begin{aligned} भु(व-वं) &= भु(१-ठ)व - २इंमुडवकोभु(१-ठ) व \\ &- ठ(क_१)कोभु(१-ठ)व - २इंमुडवकोभु(१-ठ) व \\ &- ३इंमुडवकोभु(१-ठ)व \dots\dots (५) \end{aligned}$$

(६) या पदाची सूक्ष्मता दुसऱ्या पदवीपर्यंत पुरे आहे.

$$\begin{aligned} कोभु(व-वं) कोभु(१-ठ)व | २इंमुडवकोभु(१-ठ)व \\ + ठ(क_१) कोभु(१-ठ)व - २इंमुडवकोभु(१-ठ)व \\ + ३इंमुडवकोभु(१-ठ)व \dots\dots (६) \end{aligned}$$

(७) मुर(व-वं) ह्या पदाच्या धिक्तागत ४ व्या पदवीपर्यंत सूक्ष्मतेची आवश्यकता आहे. तिला २ (व-वं) ची किमत लिहू नंतर त्याची भुज्या करू. भुज्या लेख २५६ प्रमाणे करावी.

$$\begin{aligned} २(व-वं) &= \left\{ \begin{aligned} &(२-२ठ)व - ४इंमुडव - २ठ(क_१) - २ठ(क_२) \\ &- २ठ(क_१) - ४इंठ(क_१)कोभुडव - ४इंठ(क_२)कोभुडव \\ &- ६इंमुडव - ५इंठ(क_१)कोभुडव \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

ह्याची भुज्या करिता त्यान जो भु(२-ठ) व आणि कोभुड याच्या गुणा-वाराची पदे घेतली त्याचा गुणाकार करून आलेली पदे खाली लिहिली आहेत. म्हणजे मुडवकोभु(२-२ठ) = ३भु(२-२ठ-ड) आणि -६भु(२-२ठ-ड) अशा रीतीने गुणाकार करून पदे घेतली आहेत.

$$\begin{aligned} भु(२-वं) &= \left\{ \begin{aligned} &+ भु(२-२ठ)व - २इंभु(२-२ठ + ड)व \\ &+ २इंभु(२-२ठ - ड)व - ४^१भु(२-२ठ)व \\ &- ३इंभु(२-२ठ + २ड)व + ३इंभु(२-२ठ-२ड)व \\ &- २ठ(क_१)कोभु(२-२ठ)व - २ठ(क_२)कोभु(२-२ठ)व \\ &+ २ठ(क_१)इंकोभु(२-२ठ + ड)व \\ &- ६ठ(क_१)इंकोभु(२-२ठ-ड)व \\ &- २ठ(क_२)कोभु(२-२ठ)व \\ &- २ठ^१(क_१)^३भु(२-२ठ)व \\ &+ २ठ(क_२)इंकोभु(२-२ठ + ड)व \\ &- ६ठ(क_२)इंकोभु(२-२ठ - ड)व \\ &- ८ठ(क_१)इंभु(२-२ठ + २ड)व \\ &- ८ठ(क_१)इंभु(२-२ठ - २ड)व \dots\dots (७) \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

(८) कोभु २(ब-बं) ह्या पदाची किंमत निम्नया पदवीपर्यंत पुरे आहे.
ही कोभुज्या २५६ लेखाप्रमाणे केली कोभु २(२-२४) असे गुणाकार
केले आहेत.

$$\begin{aligned}
 &+ \text{कोभु } (२-२४)ब - २इकोभु (२-२४ + ड)ब \\
 &- ४इकोभु (२-२४)ब + २इकोभु (२-२४ - ड)ब \\
 &+ २ ठ (क_१) भु (२-२ ठ)ब + २ ठ (क_१) भु (२-२ ठ)ब \\
 &+ ६ ठ (क_१) इभु (२-२ ठ-ड) - २ ठ (क_१) डभु (२-२ ठ + ड)ब \\
 &+ \frac{१३}{४} इकोभु (२-२ ठ-२ ड)ब + \frac{३}{४} इकोभु (२-२ ठ + २ ड)ब
 \end{aligned}$$

(९) भु३(ब-बं) ह्या पदाला स्थीर पदाचा गुणक चवथ्या पदवीचा आहे
म्हणून याची भुज्या कोभुज्या पहिल्या पदवीची पुरे आहे.

$$३(ब-बं) = (३-३ ठ)ब - ६ इभुडब$$

म्हणून

$$\text{भु३ (ब-बं)} = \text{भु}(३-३ ठ)ब - ६ इभुडब \text{ कोभु } (३-३ ठ)ब \dots (९)$$

$$\begin{aligned}
 (१०) \text{ कोभु३ (ब-बं)} &= \text{कोभु}(३ - ३ ठ) \\
 &+ ६ इभुडब \text{ कोभु } (३ - ३ ठ)ब \dots (१०)
 \end{aligned}$$

३९७. (११) हे पद भूकक्षेच्या चलविषयेच्या व्युत्क्रया पदाचे आहे.
बं ची किंमत भूमितीरीत्या सिद्ध झालेली आहे.
ती अशी.

$$बं = अ \left\{ १ + इकोभु(बं-ब) \right\}$$

लेख ३९५ समीकरण (४) प्रमाणे.

$$\begin{aligned}
 ब-ब - \left\{ \begin{aligned} &डब + ठ (क_१) + ठ (क_१) + २ इ भुडब \\ &\frac{१}{४} ड भुडब + २ ठ इ (क_१) कोभुडब. \end{aligned} \right. \dots (११) [१]
 \end{aligned}$$

ह्याची कोभुज्या लेख २९६ प्रमाणे केली आणि निल्या इ ह्या पदानें गुणित
तेव्हा

$$\begin{aligned}
 \text{कोभु (बं-ब)} &= \left\{ \begin{aligned} &\text{कोभुडब} - २इ भु डब - \frac{१}{४} इ भु डब भुडब \\ &- ठ (क_१) भुडब - २ इ भु डब कोभु डब \\ &- ठ (क_१) भुडब - २ ठ इ (क_१) कोभुडब भुडब \end{aligned} \right. \dots (११) [२]
 \end{aligned}$$

ह्या उल्लेखांतील इ ची पदे नको आहेत.

(१२) [१] व =

$$अ \left\{ १ + इ कोभु (' - अ) \right\} =$$

$$व = अ \left\{ \begin{array}{l} १ \quad इ कोभुडव \quad इ + इ कोभुर डव - ठइ (क_१) भुडव \\ - ठइ (क_२) भुडव - २ ठइ (क_३) कोभुड वं भुडव (१२) [१] \end{array} \right.$$

$$(१२) [१] \frac{व^१}{अ^१}, [२] \frac{व^२}{अ^२} याच्या किमती ह्या किमती (११)$$

ह्या समीकरणाचा घन आणि चतुर्घात केल्याने येतात.

$$\frac{व}{अ} = (१ + ध), \text{ तर } \frac{व^१}{अ^१} = (१ + ध)^१$$

$$\frac{व^१}{अ^१} = १ + ३ ध + ३ ध^२$$

$$\text{आणि } \frac{व^२}{अ^२} = १ + ४ ध + ६ ध^२$$

ह्या विस्तारान इ^१ चे पदाची आवश्यकता मज्जीच नाही. यामुळे व^१ तील पदे शोधू.

$$३ ध^२ = ३ इ^२ (१ + ३ कोभुडव) - ६ ठ (क_१) इ^३ भुडव को भुड$$

म्हणून

$$व^१ - अ^१ \left\{ \begin{array}{l} १ + ३ इ कोभुडव - ३ इ^२ + ३ इ कोभुर डव \\ - ३ ठ (क_१) भुडव \quad ३ ठ (क_२) भुडव \\ - २ ठ इ^३ (क_३) भुडव (१२) [२] \end{array} \right.$$

तसेच

$$६ ध^२ = ३ इ^२ + ३ इ^२ को भुडव$$

म्हणून

$$व^२ = अ^२ \left\{ \begin{array}{l} १ + ४ इ कोभुडव - इ^२ + ७ इ कोभुर डव \\ \dots \dots \dots (१२) [३] \end{array} \right\}$$

३.१. (१३) $\frac{१}{व}$ ह्या पदाचा घन, चतुर्घात आणि पंचघात करावयाचा

आहे. व ची किमती दुसऱ्या पदवीपर्यंत आपणाला कळली आहे. परंतु ती न घेता सामान्य स्वरूपाची लेख ३९३ मधील घेऊ. ती अशी

$$व = अ \left\{ १ + (व_१) + (व_२) + (व_३) + (व_४) \right\}$$

$$v = a \left[1 + \left\{ (v_1) + \theta \right\} \right]$$

$$\frac{a^x}{v^x} = \left[1 + \left\{ (v_1) + \theta \right\} \right]^{-x}$$

$$= [1 - 3 \left\{ (v_1) + \theta \right\} + 6 \left\{ (v_1) + \theta \right\}^2 \dots \dots]$$

यांतील

$$+ 6 \left\{ (v_1) + \theta \right\}^2 - 6 (v_1)^2 + 12 (v_1) \theta + 6 \theta^2$$

$$6 \theta^2 = 6 (v_1)^2$$

$$10 \left\{ (v_1) + \theta \right\}^3 = + 10 (v_1)^3 + 30 (v_1)^2 \theta$$

तेव्हा

$$\frac{1}{v^x} - \frac{1}{a^x} \left\{ \begin{array}{l} 1 - 3 (v_1) - 3 (v_1) + 6 (v_1)^2 \\ - 10 (v_1)^3 - 3 (v_1) + 12 (v_1) (v_2) \\ - 3 (v_1) + 6 (v_1) (v_2) + 12 (v_1)^2 \\ - 30 (v_1)^2 (v_2) + 12 (v_1) (v_2) \end{array} \right. \dots \dots \dots (13) \quad [1]$$

$$\frac{a^x}{v^x} = \left[1 + \left\{ (v_1) + \theta \right\} \right]^{-x}$$

$$\frac{a^x}{v^x} = 1 - x \left\{ (v_1) + \theta \right\} + 10 \left\{ (v_1) + \theta \right\}^2$$

$$- 20 \left\{ (v_1) + \theta \right\}^3 + 35 (v_1)^4$$

यांतील

$$10 \left\{ (v_1) + \theta \right\}^2 = 10 (v_1)^2 + 20 (v_1) \theta + 10 (v_1) \theta^2$$

$$- 20 \left\{ (v_1) + \theta \right\}^3 = - 20 (v_1)^3 - 60 (v_1)^2 \theta$$

तेव्हा

$$\frac{1}{v^x} - \frac{1}{a^x} \left\{ \begin{array}{l} 1 - x (v_1) - x (v_1) + 10 (v_1)^2 \\ - x (v_1) - 20 (v_1)^3 + 20 (v_1) (v_2) \\ - x (v_1) + 10 (v_1) (v_2) + 20 (v_1) (v_2) \\ - 60 (v_1)^2 (v_2) + 35 (v_1)^4 \end{array} \right. \dots \dots \dots (13) \quad [2]$$

ह्या प्रमाणेंच

$$\frac{१}{व} - \frac{१}{अ} \left\{ १ - ५(व_१) - ५(व_२) - १५(व_३) \right\} \dots \dots \dots (१३) [३]$$

३९९. (१४) $\frac{स}{ज}$ ह्या पदाची किंमत लेख ३०६ सभा. (१)

$$\frac{म}{ज} - अं \left(\frac{१ - इ^३}{१ - इ} \right) \frac{अ^३}{अ} - अंस्थ \frac{अ^३}{अ} \dots \dots \dots (१४)$$

$$\left(\frac{१ - इ^३}{१ - इ} \right)^३ = स्थ. लेखन सौकर्याकरिता.$$

$$(१५) [१] \frac{स वं^३}{ज व} , [२] \frac{स वं^३}{ज व} , [३] \frac{स वं^३}{ज व} , [४] \frac{स वं^३}{ज व}$$

ह्या मधील प्रत्येक पदात ३ अवयव आहेत. $\frac{स}{ज}$ हा एक दुसरा व चा

घन किंवा चतुर्घात आणि तिसरा $\frac{१}{व}$ चा घन चतुर्घात किंवा पचघात. त्यापैकी

पहिल्या अवयवाची किंमत (१४) मध्ये अंस्थ $\frac{अ^३}{अ}$ ही आहे. व च्या घाताच्या

किंमती (१२) मध्ये आहेत आणि $\frac{१}{व}$ ह्या अवयवाच्या घाताच्या किंमती (१३)

मध्ये आहेत. प्रत्येक अवयवाची किंमत घेऊन गुणाकार केला म्हणजे वरच्या चार पदांपैकी प्रत्येक पदाची किंमत तयार होईल. त्याप्रमाणे गुणाकार करून किंमती खाली लिहिल्या आहेत.

$$[१] \frac{स वं^३}{ज व} = \frac{स}{ज} \times वं^३ \times \frac{१}{व}$$

$$- \frac{२}{३} \frac{स वं^३}{ज व} - अंस्थ \left\{ \begin{array}{l} \frac{३}{३} + \frac{३}{३}(व_१) - \frac{३}{३} इंभुडव \\ - ३(व_१)^३ + \frac{३}{३}(व_१) + \frac{३}{३}(व_१) इकोमुडव \\ + \frac{३}{३} इ^३ - \frac{३}{३} इ^३ कोमुडव \\ + \frac{३}{३}(व_१) इ कोमुडव - ९(व_१)^३ इंकोमुडव \\ - \frac{३}{३}(व_१) इ^३ + \frac{३}{३}(व_१) इ^३ कोभुरडव \\ + \frac{३}{३}(व_१) + ५(व_१)^३ - ६(व_१)(व_१) \\ + \frac{३}{३} ठ(क_१) इंभुडव \dots \dots \dots (१५) [१] \end{array} \right.$$

$$[२] \frac{\text{सव}^३}{\text{ज}^३\text{व}^३} = \frac{\text{स}}{\text{ज}^३} \times \text{व}^३ \times \frac{१}{\text{व}^३}$$

$$- \frac{\text{सव}^३}{\text{ज}^३\text{व}^३} = \text{ठ}^३\text{थ} \left\{ \begin{array}{l} - ३ + ६(\text{व}_१) - ३ \text{इ}^३\text{कोभुडव} \\ + ६(\text{व}_२) - १५(\text{व}_१)^२ + १८(\text{व}_१) \text{इ}^३\text{कोभुडव} \\ + ३ \text{इ}^३ - ३ \text{इ}^३\text{कोभुडव} \\ + ६(\text{व}_२) : ३०(\text{व}_१)^२ - ९(\text{व}_१) \text{इ}^३ \\ \quad + १८(\text{व}_२) \text{इ}^३\text{कोभुडव} \\ + ३ \text{ठ} (\text{क}_१) \text{इ}^३\text{भुडव} - ४५(\text{व}_१)^२ \text{इ}^३\text{कोभुडव} \\ + २७(\text{व}_१) \text{इ}^३\text{कोभुडव} - ३०(\text{व}_१)(\text{व}_२) \\ + ६(\text{व}_२) - ३ \text{इ}^३\text{कोभुडव} - १८(\text{क}_१)(\text{व}_१) \text{इ}^३\text{भुडव} \\ + ९०(\text{व}_१)^२ \text{इ}^३\text{कोभुडव} - १५(\text{व}_१)(\text{व}_२) \\ \quad - ३०(\text{व}_१)(\text{व}_२) \\ + १८(\text{व}_१) \text{इ}^३\text{कोभुडव} + ९०(\text{व}_१)(\text{व}_२) \\ + ३ \text{ठ} (\text{क}_२) \text{इ}^३\text{भुडव} - ९०(\text{व}_१)(\text{व}_२) \text{इ}^३\text{कोभुडव} \\ - ९(\text{व}_२) \text{इ}^३ + \frac{४}{३}(\text{व}_१)^२ \text{इ}^३ + २७(\text{व}_२) \text{इ}^३\text{कोभुडव} \\ - \frac{१०}{३}(\text{व}_१)^२ \text{इ}^३\text{कोभुडव} (२६) \dots \dots (१५) [२] \end{array} \right.$$

$$[३] \frac{\text{सव}^४}{\text{ज}^४\text{व}^४} = \frac{\text{स}}{\text{ज}^४} \times \text{व}^४ \times \frac{१}{\text{व}^४}$$

$$= \text{अठ}^३\text{स्थ} \times \frac{\text{अ}^३}{\text{अ}^३} \times \frac{\text{अ}^४}{\text{अ}^४} \times (\text{इतर पदें})$$

$$= \text{अठ}^३\text{स्थ} \frac{\text{अ}^३}{\text{अ}^३} (\text{इतर पद समूह})$$

$\frac{\text{अ}^३}{\text{अ}^३}$ हैं पद दुसऱ्या पदवीचें आहे. तेव्हां $\text{ठ}^३ \frac{\text{अ}^३}{\text{अ}^३}$ हा गुणक चवथ्या पदवीचा आहे. याकारिता इतर पदें दुसऱ्या पदवीपर्यंत घेतली. तेव्हा

$$- \frac{\text{सव}^४}{\text{ज}^४\text{व}^४} = \text{अठ}^३\text{स्थ} \frac{\text{अ}^३}{\text{अ}^३} \left\{ \begin{array}{l} - १ + ४(\text{व}_१) - ४ \text{इ}^३\text{कोभुडव} \\ + ६(\text{व}_२) - १०(\text{व}_१)^२ - ३ \text{इ}^३ - ७ \text{इ}^३\text{कोभुडव} \\ + १६(\text{व}_१) \text{इ}^३\text{कोभुडव} \dots \dots \dots [३] \end{array} \right.$$

$$[४] \frac{\text{सव}^५}{\text{ज}^५\text{व}^५} = \frac{\text{स}}{\text{ज}^५} \times \text{व}^५ \times \frac{१}{\text{व}^५}$$

$$= \text{अठ}^३\text{स्थ} \times \frac{\text{अ}^३}{\text{अ}^३} \times \frac{\text{अ}^५}{\text{अ}^५} \times (\text{इतर पदें})$$

$$= \text{ठ}^३\text{स्थ} \frac{\text{अ}^३}{\text{अ}^३} (\text{इतर पद समूह})$$

$$-\frac{\text{सर्व}^{\text{४}}}{\text{ज}^{\text{२}}\text{व}^{\text{२}}} = \text{ठ}^{\text{२}}\text{स्थ} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} \left\{ \begin{array}{l} १ + ५ (व_१) - ४ \text{इं कोमुज} \\ + ५ (व_२) - १५ (व_१)^२ + ६^२ - ७ \text{इं कोमु२ डव} \\ + २० (व_१) \text{इं को भुडव} \dots \dots \dots [४] \end{array} \right.$$

४००. गृधमांश समीकरणामध्ये प्र, त, प प्रेरणांची तीन पदे आहेत. ती लेख ३७६ मध्ये दिली आहेत. ते प्रत्येक पद ज्या संख्यांनी बनते ती प्रत्येक संख्या सामान्य स्वरूपाने ३९३ लेखापासून ३९९ लेखांपर्यंत दाखविली आहे आना प्रेरणेचे प्रत्येक पद त्या सामान्य संख्यांनी दाखविली आहे. म्हणजे $\frac{\text{सर्व}^{\text{१}}}{\text{ज}^{\text{२}}\text{व}^{\text{२}}}$ ह्या पदाची किंमत वगळ्या लेखान [२] ह्या अंकी ज्या संख्यांनी दाखविली आहे तसल्याच संख्यांनी प्र, त, प ला प्रेरणामध्ये जीं अनेक पदे आहेत, त्या पदाच्या किमती व्यक्त अव्यक्त अशा संख्यांनी दाखविली.

४०१. प्रथमतः त प्रेरणेची किंमत लिहिली. ह्या प्रेरणेच्या किमतीमध्ये तीन पदे आहेत. लेख ३७४ पहा. त्यापकीं पहिलें पद

$$-\frac{३}{२} \frac{\text{सर्व}^{\text{१}}}{\text{ज}^{\text{२}}\text{व}^{\text{२}}} \text{भु२} (व - व')$$

हे आहे ह्या पदाचे अवयव दोन मुख्य आहेत पहिल्या $-\frac{३}{२} \frac{\text{सर्व}^{\text{१}}}{\text{ज}^{\text{२}}\text{व}^{\text{२}}}$ ह्या अवयवाचा विस्तार ३९९ व्या लेखातील (१५) [२] ह्या अंकी दिला आहे. आणि दुसऱ्या अवयवाचा विस्तार म्हणजे भु (२व - २व') ह्या पदाचा विस्तार ३९६ व्या लेखाच्या (३) ह्या अंकी दिला आहे. तेव्हा ह्या दोन पदमघाता गुणाकार करवाचा आहे. अर्थात हा गुणाकार, एका मघातातील प्रत्येक पदाने दुसऱ्या मघातातील प्रत्येक पदामु गुणिल्यात येता. हे गुणाकार करिताना, २५७ ह्या लेखातील मजगत्या आणि कोमुच्या यांचे गुणाकार कसे होताना ते १ ते ४ अंकी दाखविले आहेत, त्याकडे विशेष लक्ष असावे. त्यापैकी २ व ४ यात चिन्ह चुकण्याचा फार सभव असतो. ह्या गुणाकारान गुणून आलेल्या किंवा येणाऱ्या पदाचा पदवी कोणती आहे हे ही पाहिलें पाहिजे. गुणक व गुण्य ह्या दोन पदांच्या पदव्यांच्या बेरजेउनकी गुणाकाराची पदवी असते. तसेच गुणून आलेल्या पदाचा केंद्र गुणक कोणता आहे हे ही ठरविले पाहिजे हा केंद्र गुणक, गुण्य आणि गुणक यांच्या केंद्र गुणाकाच्या मन्तिष्ठ बेरजेबरोबर असतो त प्रेरणेच्या पाचव्या आणि सहाव्या पदवीच्या प्रत्येक पदाचा केंद्र गुणक नियमित असावा लागतो. म्हणजे पाचव्या पदवीच्या प्रत्येक पदाचा केंद्र गुणक १ किंवा ० ह्या संख्ये समीप असला पाहिजे, आणि सहाव्या पदवीचा केंद्र गुणक ० ह्या संख्ये समीप असाच असला पाहिजे. केंद्रगुणक तसा तसल्यास ते पद गुणाकारात न घेतां सोडून द्यावे.

ह्याप्रमाणे गुणाकार करून पदे पदवीच्या क्रमाप्रमाणे म्वाली लिहिली आहे. ही त प्रेरणेच्या पहिल्या पदाची किंमत होय.

$$- \frac{3}{2} \frac{\text{सर्व}^3}{\text{ज}^3 \text{व}^3} \text{भु} (२\text{व} - २\text{व}^3) -$$

दुसरी आणि तिसरी पदवी.

$$\begin{aligned} & - \frac{3}{2} \text{ठ}^3 \text{भु} (२ - २\text{ठ}) \text{व} \\ & + \frac{3}{2} \text{ठ}^3 \text{ड} \text{भु} (२ - २\text{ठ} - \text{ण}) \text{व} \quad + \frac{3}{2} \text{ठ}^3 \text{इ} \text{भु} (२ - २\text{ठ} - \text{ण}) \text{व} \\ & - \frac{3}{4} \text{ठ}^3 \text{ई} \text{भु} (२ - २\text{ठ} - \text{ड}) \text{व} \quad + \frac{3}{4} \text{ठ}^3 \text{ई} \text{भु} (२ - २\text{ठ} - \text{ड}) \text{व} \end{aligned}$$

चवथी पदवी.

$$\begin{aligned} & + \frac{3}{2} \text{ठ}^3 \text{ई} \text{भु} (२ - २\text{ठ}) \text{व} \quad + \frac{3}{4} \text{ठ}^3 \text{ई} \text{भु} (२ - २\text{ठ}) \text{व} \\ & + \frac{3}{2} \text{ठ}^3 \text{ड} \text{भु} (२ - २\text{ठ} - \text{ण}) \text{व} \quad - \frac{3}{2} \text{ठ}^3 \text{ड} \text{भु} (२ - २\text{ठ} - \text{ण}) \text{व} \\ & + \frac{3}{2} \text{ठ}^3 \text{ई} \text{भु} (२ - २\text{ठ} - \text{ण} - \text{ड}) \text{व} \quad - \frac{3}{2} \text{ठ}^3 \text{ई} \text{भु} (२ - २\text{ठ} - \text{ण} - \text{ड}) \text{व} \\ & + \frac{3}{2} \text{ठ}^3 \text{ई} \text{भु} (२ - २\text{ठ} - \text{ण} - \text{ड}) \text{व} \quad - \frac{3}{2} \text{ठ}^3 \text{ई} \text{भु} (२ - २\text{ठ} - \text{ण} - \text{ड}) \text{व} \\ & - \frac{3}{4} \text{ठ}^3 \text{ई} \text{भु} (२ - २\text{ठ}) \text{व} \quad - \frac{3}{4} \text{ठ}^3 \text{ई} \text{भु} (२ - २\text{ठ} - २\text{ड}) \text{व} \\ & - \frac{3}{4} \text{ठ}^3 \text{ई} \text{भु} (२ - २\text{ठ} - २\text{ण}) \text{व} \quad - \frac{3}{4} \text{ठ}^3 \text{ई} \text{भु} (२ - २\text{ठ} - २\text{ण}) \text{व} \\ & + \frac{3}{2} \text{ठ}^3 (\text{व}_3) \text{भु} (२ - २\text{ठ}) \text{व} \end{aligned}$$

पांचवी पदवी.

$$\begin{aligned} & + (\frac{3}{2} \text{ठ}^3 \text{ई} - \frac{3}{4} \text{ठ}^3 \text{ई}^3) \text{भु} (२ - २\text{ठ} - \text{ण}) \text{व} \quad + \frac{3}{4} \text{ठ}^3 \text{ई} \text{भु} (२ - २\text{ठ} - ३\text{ण}) \text{व} \\ & + \frac{3}{4} \text{ठ}^3 \text{ई}^3 \text{भु} (२ - २\text{ठ} - \text{ण} - \text{ड}) \text{व} \quad - \frac{3}{4} \text{ठ}^3 \text{ई}^3 \text{भु} (२ - २\text{ठ} - \text{ण} - \text{ड}) \text{व} \\ & - \frac{3}{4} \text{ठ}^3 \text{ई}^3 \text{भु} (२ - २\text{ठ} - २\text{ण} - \text{ड}) \text{व} \quad + \frac{3}{4} \text{ठ}^3 \text{ई}^3 \text{भु} (२ - २\text{ठ} - २\text{ण} - \text{ड}) \text{व} \\ & - \frac{3}{2} \text{ठ}^3 \text{ई} \text{भु} (२ - २\text{ठ} - २\text{ण}) \text{व} \quad + \frac{3}{2} \text{ठ}^3 \text{ई}^3 \text{भु} (२ - २\text{ठ} - \text{ण} - २\text{ड}) \text{व} \\ & - \frac{3}{4} \text{ठ}^3 \text{ई} (\text{व}_3) \text{भु} (२ - २\text{ठ} - \text{ण}) \text{व} \quad - \frac{3}{4} \text{ठ}^3 \text{ई} (\text{व}_3) \text{भु} (२ - २\text{ठ} - \text{ण}) \text{व} \\ & + \frac{3}{2} \text{ठ}^3 \text{ई} (\text{व}_3) \text{भु} (२ - २\text{ठ} - \text{ड}) \text{व} \quad - \frac{3}{2} \text{ठ}^3 \text{ई} (\text{व}_3) \text{भु} (२ - २\text{ठ} - \text{ड}) \text{व} \\ & + \frac{3}{2} \text{ठ}^3 (\text{व}_3) \text{भु} (२ - २\text{ठ}) \text{व} \quad + \frac{3}{2} \text{ठ}^3 (\text{क}_3) \text{भु} (२ - २\text{ठ}) \text{व} \end{aligned}$$

त प्रेरणेच्या ६ व्या पदवीचा पदसंघ येथे तयार केला नाहीं. ना पुढे तयार करू. त्या पदवीचा आवश्यकता कम चे समीकरण ४ व्या पदवीने सोडविताता उत्पन्न होते. शर आणि चलत्रिज्या यांच्या चवथ्या पदवीला त्याची आवश्यकता नाही म्हणून ती पदे यथा प्रसंगी तयार करूं.

४०४. त प्रेरणेचे दुसरें आणि तिसरें पद खाली लिहिल्याप्रमाणे आहे

$$\text{दुसरें पद} = \frac{3}{2} \frac{\text{सर्व}^{\text{प}}}{\text{ज}^{\text{व}}^{\text{प}}} \frac{\text{प} - \text{च}}{\text{प} + \text{च}} \text{भु} (\text{ब} - \text{बं})$$

$$\text{तिसरें पद} = \frac{1}{2} \frac{\text{सर्व}^{\text{प}}}{\text{ज}^{\text{व}}^{\text{प}}} \frac{\text{प} - \text{च}}{\text{प} + \text{च}} \text{भु} (\text{ब} - \text{बं})$$

ह्या दोन्ही पदांमध्ये साधारण असा $\frac{\text{सर्व}^{\text{प}}}{\text{ज}^{\text{व}}^{\text{प}}} \frac{\text{प} - \text{च}}{\text{प} + \text{च}}$ हा अवयव आहे. ह्या-

माल $\frac{\text{प} - \text{च}}{\text{प} + \text{च}}$ हा एक स्थीर गुणक आहे. प हे पृथ्वीचे प्रकृत्यंश आणि च हे चंद्राचे प्रकृत्यंश आहेत. पृथ्वीचे प्रकृत्यंश एक परिमाण मानिले तर चंद्राचे प्रकृत्यंश $\frac{1}{81}$ आहेत असे सिद्ध होते तेव्हां

$$\frac{\text{प} - \text{च}}{\text{प} + \text{च}} = \frac{1 - \frac{1}{81}}{1 + \frac{1}{81}} = \frac{80}{82} \text{ हा गुणक आहे.}$$

पदवीच्या दुर्दैर्घ्ये हा गुणक १ आहे असे मानिले तर पदवीमध्ये बदल होत नाही म्हणून तो एक ह्या मर्यादेतला आहे. आणि दुसरा अवयव याची किंमत लेख ३९९ [४] मध्ये दिली आहे. तसेच भु (ब - बं) आणि भु३ (ब - ब) ह्या पदाच्या किमती ३९६ व्या लेखान (५) आणि (९) ह्या अंकी दिल्या आहेत. ह्या किमती घेऊन गुणाकार करून त प्रेरणेची जी वरवी दोन पदे त्यामध्ये घेणारी पदे खाली दिली आहेत.

त्यापैकी भु (ब - बं) याचा क्षेत्र गुणक ३ असल्यामुळे आणि $\frac{\text{सर्व}^{\text{प}}}{\text{ज}^{\text{व}}^{\text{प}}}$ याचा

स्थीर गुण $\frac{80}{82}$ हा चवथ्या पदवीचा असल्यामुळे त्यात ५ व्या व सहाव्या पदवींचे, आपणाम दृष्ट असे पद निघत नाही. ह्यापमाके गुणाकार करून आलेली दृष्ट अशी पदे खाली दिली आहेत.

$$-\frac{3}{8} \frac{\text{सर्व}^{\text{प}}}{\text{ज}^{\text{व}}^{\text{प}}} \text{भु} (\text{ब} - \text{बं}) =$$

$$\text{चवथी पदवी} = \frac{3}{8} \frac{\text{अ}}{\text{अ}} \text{ठ}^{\text{भु}} (१ - ४) व$$

$$\begin{aligned}
\text{पांचवी पदवी} & \left\{ \begin{aligned} & + \frac{15}{16} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} \text{ ठं इ भु (१ - ठ - ण) व} \\ & - \frac{9}{8} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} \text{ ठं इं भु (१ - ठ - ड) व} \\ & \frac{3}{8} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} \text{ ठं इं भु (१ - ठ - ड) व} \end{aligned} \right. \\
\text{सातवी पदवी} & \left\{ \begin{aligned} & + \frac{15}{16} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} \text{ ठं इ इ भु (१ - ठ - ण - ड) व} \\ & - \frac{85}{16} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} \text{ ठं उ इं भु (१ - ठ - ण - ड) व} \\ & - \frac{177}{128} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} \text{ ठं इ भु (१ - ठ - ण) व } \dots (२) \end{aligned} \right. \\
& - \frac{15}{8} \frac{\text{मवं}}{\text{अं}} \text{ भु३ (व - वं) } \dots - \frac{15}{8} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} \text{ ठं भु (३ - ३ ठ) व} \\
& \dots (३)
\end{aligned}$$

४०५. वरच्या गणित कार्यात जशीत प्रेरणेची किंमत तीन पदामध्ये विशद घेली तशी आता प्र प्रेरणेची किंमत विशद करू. प्र प्रेरणेमध्ये रुहा पदे आहेत त्यापैकी प्रत्येक पद घेऊन त्याचें स्पष्टीकरण करितो. त्यापैकी पहिले पद साली लिहिल्याप्रमाणे.

$$(१) \text{ अ (१ + अ')} - \frac{३}{४} \text{ अ (१ - ३ अ' + १५ अ'')}$$

घातविस्ताराविषयी २४, २५, २६ हे लेख पहा.

श ची सामान्य स्वरूपाची किंमत लावी दिल्याप्रमाणे आहे

$$\text{श} = (\text{श}_1) + (\text{श}_2) + (\text{श}_3) + (\text{श}_4)$$

तेव्हा

$$\begin{aligned}
- \frac{३}{४} \text{ अ}^३ &= - \frac{३}{४} (\text{श}_1)^३ - ३ (\text{श}_1) (\text{श}_2) - \frac{३}{४} (\text{श}_2)^३ \\
&\quad - ३ (\text{श}_1) (\text{श}_3) - ३ (\text{श}_1) (\text{श}_4) - ३ (\text{श}_2) (\text{श}_3) \\
+ \frac{१५}{४} \text{ अ}^४ &= + \frac{१५}{४} (\text{श}_1)^४ + \frac{१५}{४} (\text{श}_2)^३ (\text{श}_1)
\end{aligned}$$

ह्यामध्ये (श_१) आणि (श_२) ह्या सख्या व्यस्त झाल्या आहेत. [३८७ लेख.]

$$\text{श}_1 = + \text{ल भु ए व आणि } \text{श}_2 = + \frac{३}{४} \text{ ल भु (२ - २ ठ - ए) व.}$$

$$- \frac{३}{४} (\text{श}_1)^३ = - \frac{३}{४} \text{ ल}^३ \text{ भु}^३ \text{ ए व} = - \frac{३}{४} \text{ ल}^३ + \frac{३}{४} \text{ ल}^३ \text{ को भु२ ए व.}$$

$$\begin{aligned}
 - ३ (श_१) (श_२) &= - ३ ल भु ए व \times \frac{३}{२} ठ ल भु (२-२ठ-ए) व \\
 &+ \frac{३}{२} ठ ल^३ को भु (२-२ठ) व \\
 &\quad \frac{३}{२} ठ ल^३ को भु (२-२ठ-२ए) व. \\
 - \frac{३}{२} (श_१)^२ &= - \frac{३}{२} \cdot \frac{३}{२} ठ^२ ल^३ भु^३ (२-२ठ-ए) व \\
 &+ \frac{३}{२} \cdot \frac{३}{२} ठ^२ ल^३ \\
 &+ \frac{३}{२} \cdot \frac{३}{२} ठ^२ ल^३ को भु (४-४ठ-२ए) व. \\
 - ३ (श_१) (श_३) &= - ३ (श_१) ल भु ए व \\
 - ३ (श_१) (श_४) &= - ३ (श_१) ल भु ए व \\
 - ३ (श_२) (श_३) &= - \frac{३}{२} (श_२) ठ ल भु (२-२ठ-ए) व. \\
 - \frac{३}{२} (श_१)^३ &+ \frac{३}{२} ल^३ भु^३ ए व \\
 &+ \frac{३}{२} ल^३ (\frac{३}{२}-\frac{३}{२} को भु २ ए व + \frac{३}{२} को भु ४ ए व). \\
 &+ \frac{३}{२} ल^३ - \frac{३}{२} ल^३ को भु २ ए व \\
 &+ \frac{३}{२} ल^३ को भु ४ ए व. \\
 + \frac{३}{२} (श_१)^३ (श_२) &= \frac{३}{२} ल^३ भु^३ ए व \\
 &\times \frac{३}{२} ठ ल भु (२-२ठ-ए) व. \\
 &= + \frac{३}{२} ठ ल^३ (\frac{३}{२} भु ए व - \frac{३}{२} मु ३ ए व) \\
 &\quad भु (२-२ठ-ए) व. \\
 &+ \frac{३}{२} \cdot \frac{३}{२} ठ ल^३ को भु (२-२ठ-२ए) व.
 \end{aligned}$$

सर्व पदों एकत्र केलीं तेव्हां

$$\begin{aligned}
 अ(१+श^३)^{-\frac{३}{२}} &= अ \left\{ \begin{aligned}
 &- \frac{३}{२} ल^३ \cdot \frac{३}{२} ल^३ - \frac{३}{२} ठ^२ ल^३ \\
 &+ \frac{३}{२} ल^३ को भु २ ए व. \\
 &+ \frac{३}{२} ठ ल^३ को भु (२-२ठ) व \\
 &- \frac{३}{२} ठ ल^३ को भु (२-२ठ-२ए) व \\
 &+ \frac{३}{२} ठ^२ ल^३ को भु (४-४ठ-२ए) व \\
 &- \frac{३}{२} ल^३ को भु २ ए व \\
 &+ \frac{३}{२} ल^३ को भु ४ ए व \\
 &- ३ (श_१) ल भु ए व \\
 &- ३ (श_२) ल भु ए व \\
 &- \frac{३}{२} (श_३) ठ ल भु (२-२ठ-ए) व \\
 &+ \frac{३}{२} \cdot \frac{३}{२} ठ ल^३ को भु (२-२ठ-२ए) व \\
 &\dots\dots\dots प्र (१)
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

४०६ प्र प्रेरणचें दुसरे पद खाली लिहिच्याप्रमाणें आहे. त्याची सामान्य स्वरूपाची विमत ३९९ (१५) [१] मध्ये दिली आहे. तीच येथे देत आहे. त्यात ४०० वा लेखान दानविल्याप्रमाणे (व_१), (व_२) आणि स्थ यांच्या व्यक्त संख्या त्यांच्या जागी लिहून गणाद्वार करून आलेला पदमघ खाली लिहीत आहे त्यांत (व_३) ची व्यक्त किंमत ले. ३९० प्रमाणे घेतली आहे.

$$- \frac{1}{2} \frac{सं०}{जं०} = अ$$

- १ ठ^१ + ३ ठ^३ इ कोभु ण व — ३ ठ^३ इ कोभु ड व
- १ ठ^१ इ^२ — ३ ठ^३ इ^२ कोभुर ण व
- १ ठ^१ इ^२ कोभुर ड व
- + १ ठ^१ इ^२ कोभु (ण + ड) व
- + १ ठ^१ इ^२ कोभु (ण - ड) व
- १ ठ^१ — १ ठ^१ ल^३ — १ ठ^१ ल^३ कोभुर ए व
- + ३ ठ^३ कोभु (२ - २ ठ) व
- + १ ठ^१ इ^२ कोभु (२ - २ ठ - ण) व
- + (३ ठ^३ इ + १ ठ^१ ल^३ इ + १ ठ^१ इ^२ इ
- + १ ठ^१ इ^२) कोभु ण व
- + १ ठ^१ इ^२ इ कोभु (ण + २ ड) व
- + १ ठ^१ इ^२ इ कोभु (ण - २ ड) व
- १ ठ^१ इ^२ इ कोभु (२ ण - ड) व
- १ ठ^१ इ^२ इ कोभु (२ ण - ड) व
- + १ ठ^१ ल^३ इ कोभु (२ ए + ण) व
- + १ ठ^१ ल^३ इ कोभु (२ ए - ण) व
- १ ठ^१ ल^३ इ कोभु (२ ए + ड) व
- १ ठ^१ ल^३ इ कोभु (२ ए - ड) व
- + १ ठ^१ इ^२ इ कोभु (२ - २ ठ - ण + ड) व
- + १ ठ^१ इ^२ इ कोभु (२ - २ ठ - ण - ड) व
- + १ ठ^१ इ^२ कोभु (२ - २ ठ - ड) व
- + १ ठ^१ इ^२ कोभु (२ - २ ठ + ड) व
- + १ ठ^१ इ^२ कोभु (ण + ड) व
- १ ठ^१ इ^२ कोभु (ण - ड) व
- ३ ठ^३ इ कोभु (२ - २ ठ - ण) व
- ३ ठ^३ इ कोभु (२ - २ ठ + ण) व
- १ ठ^१ इ^२ कोभु (२ - २ ठ - २ ण) व
- १ ठ^१ इ^२ कोभु (२ - २ ठ) व
- (१ ठ^१ इ^२ इ + १ ठ^१ इ + १ ठ^१ ल^३ इ) कोभु ड व
- + १ ठ^१ इ^२ कोभु ण व + ३ ठ^३ (व_१)

..... प्र (२)

४०७. प्र प्रेरणेच्या निमन्या पदाची किमन वरच्या पदसंघाम ३कोभु२ (ब बं) यात गुणिल्याने येते. वरच्या पदमघान पाचव्या पदवीचीही सर्वत्र पदे घेतली आहेत. वस्तुतः ती ० आणि १ ह्या संख्ये सल्लिच ज्याचा केंद्रगुण आहे अर्थाच अमावी लागतात. पण त्यांना ३कोभु२ (ब - बं) या पदाच्या सचानील पदांनी गुणनाता गुणाकाराचा केंद्रगुणक समजावा म्हणून ती सर्वत्र दिली आहेत. आता ह्या निमन्या पदाच्या किमनांत, चवथ्या पदवर्षपर्यंत सर्व पदे आणि पाचव्या पदवीची ० आणि १ ह्या संख्या समीप केंद्रगुणाची पदे घेऊन इतर पदे गाळावी. कोभु२ (ब-बं) ह्या पदाच्या किमनीचा पदमघ ३१,६ ह्या लेखान आठव्या अर्का दिला आहे. त्यातील प्रत्येक पदाने वरच्या प्र (२) ह्या पदमघाम गुणावयाने आहे. हे गुणाकार वरच्याच रितीनी करावयाचे आहेत. ते करत आलेल्या पदसंघ खाली लिहिला आहे.

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{l} - \frac{3}{4} \text{ ठ}^3 \text{ कोभु } (२-२४) \text{ ब} \\ + \frac{1}{2} \text{ ठ}^3 \text{ इ कोभु } (२-२४-ण) \text{ ब} \\ \quad + \frac{1}{4} \text{ ठ}^3 \text{ इ कोभु } (२-२४+ण) \text{ ब} \\ - \frac{3}{4} \text{ ठ}^3 \text{ इ कोभु } (२-२४-ड) \text{ ब} \\ \quad + \frac{1}{4} \text{ ठ}^3 \text{ इ कोभु } (२-२४+ड) \text{ ब} \\ + \frac{1}{4} \text{ ठ}^4 - \left(\frac{1}{2} \text{ ठ}^3 \text{ ल} + \frac{1}{4} \text{ ठ}^4 \right) \\ \quad - \frac{1}{4} \text{ ठ}^4 \text{ कोभु } (२-२४) \text{ ब} \\ - \frac{1}{4} \text{ ठ}^3 \text{ ल कोभु } (२-२४-२ए) \text{ ब} \\ \quad - \frac{1}{4} \text{ ठ}^3 \text{ ल कोभु } (२-२४+२ए) \text{ ब} \\ - \frac{1}{4} \text{ ठ}^3 \text{ इ कोभु } (२-२४-२ण) \text{ ब} \\ \quad - \frac{1}{4} \text{ ठ}^3 \text{ इ कोभु } (२-२४+२ण) \text{ ब} \\ + \frac{1}{4} \text{ ठ}^3 \text{ इ कोभु } (२-२४-ण-ड) \text{ ब} \\ \quad - \frac{1}{4} \text{ ठ}^3 \text{ इ कोभु } (२-२४-ण+ड) \text{ ब} \\ + \frac{1}{4} \text{ ठ}^3 \text{ इ कोभु } (२-२४+ण-उ) \text{ ब} \\ \quad - \frac{1}{4} \text{ ठ}^3 \text{ इ कोभु } (२-२४+ण+ड) \text{ ब} \\ + \frac{1}{3} \frac{3}{2} \text{ ठ}^3 \text{ इ कोभु } (४-४४-ण) \text{ ब} \\ \quad + \frac{1}{3} \frac{3}{2} \text{ ठ}^3 \text{ इ कोभु } (४-४४-ण) \text{ ब} \\ + ३ \text{ ठ}^3 \text{ इ कोभु } (२-२४-ण) \text{ ब} \\ \quad - ३ \text{ ठ}^3 \text{ इ कोभु } (२-२४+ण) \text{ ब} \\ + \frac{1}{4} \text{ ठ}^3 \text{ कोभु } (४-४४) \text{ ब} \\ \quad - \frac{1}{4} \text{ ठ}^3 \text{ इ कोभु } (२-२४-२ड) \text{ ब} \\ + \frac{1}{2} \text{ ठ}^3 \text{ ल कोभु } (२-२४-२ण) \text{ ब} - १ \text{ ठ}^3 \text{ इ कोभु } (४-४४) \text{ ब} \\ + \left(\frac{1}{2} \text{ ठ}^3 \text{ ल} + \frac{1}{4} \text{ ठ}^3 \text{ ल} + \frac{1}{4} \text{ ठ}^3 \text{ ल} \right) \\ \quad - \frac{1}{4} \text{ ठ}^3 \text{ ल कोभु } (२-२४-ण) \text{ ब} \end{array} \right) = \text{अ}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{2} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} \text{अं}^3 \text{इ}^3 \text{कोभु} (२-२४-१-२३) \text{ व} \\
& \quad - \frac{3}{2} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} \text{अं}^3 \text{इ}^3 \text{कोभु} (२-२४-१-२३) \text{ व} \\
& + \frac{1}{2} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} \text{अं}^3 \text{इ}^3 \text{कोभु} (२-२४-२९-१) \text{ व} \\
& \quad + \frac{1}{2} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} \text{अं}^3 \text{इ}^3 \text{कोभु} (२-२४-२९+१) \text{ व} \\
& + \frac{3}{4} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} \text{अं}^3 \text{इ}^3 \text{कोभु} (१-३) \text{ व} \\
& \quad - \frac{3}{4} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} \text{अं}^3 \text{इ}^3 \text{कोभु} (१+३) \text{ व} \\
& + \frac{3}{4} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} \text{अं}^3 \text{इ}^3 \text{कोभु} (२-२४-१-३) \text{ व} \\
& \quad - \frac{3}{4} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} \text{अं}^3 \text{इ}^3 \text{कोभु} (२-२४-१+३) \text{ व} \\
& - \frac{3}{2} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} \text{अं}^3 \text{इ}^3 \text{कोभु} (२-२४-२१-३) \text{ व} \\
& \quad + \frac{3}{2} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} \text{अं}^3 \text{इ}^3 \text{कोभु} (२-२४-२१+३) \text{ व} \\
& - \frac{3}{2} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} \text{अं}^3 \text{इ}^3 \text{कोभु} (२-२४-२९-३) \text{ व} \\
& \quad + \frac{3}{2} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} \text{अं}^3 \text{इ}^3 \text{कोभु} (२-२४-२९+३) \text{ व} \\
& - \frac{1}{2} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} \text{अं}^3 \text{इ}^3 \text{कोभु} (२-२४-२१) \text{ व} + \frac{3}{4} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} \text{अं}^3 \text{इ}^3 \text{कोभु} (३) \text{ व} \\
& + \frac{3}{2} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} \text{अं}^3 \text{इ}^3 \text{कोभु} (२-२४) \text{ व} - \frac{3}{2} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} \text{अं}^3 \text{इ}^3 \text{कोभु} (२-२४) \text{ व} \\
& \quad \dots \text{प्र (३)}
\end{aligned}$$

४०८. प्र प्रेरणेच्या (४) आणि (५) ह्या पदांच्या किमती, ३९९ व्या लेखातील (१५) [३] अर्की जे पद आहे त्याच्या अनुक्रमे १ कोभु (ब — बं) आणि $\frac{1}{2} \frac{\text{अं}}{\text{अ}}$ कोभु (ब — बं) ह्या पदांनी मर्यादित येतात ह्या कामाच्या पद किमती ३९६ व्या लेखाच्या अनुक्रमे (६) आणि (१०) ह्या अर्की दिव्या आहेत.

$$- \frac{1}{2} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} \text{अं}^3 \text{इ}^3 \text{कोभु} (ब-बं) =$$

$$- \frac{1}{2} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} \text{अं}^3 \text{इ}^3 \text{कोभु} (१-३) \text{ व} - \frac{२९}{८} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} \text{अं}^3 \text{इ}^3 \text{कोभु} (१-३-३) \text{ व}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} \text{अं}^3 \text{इ}^3 \text{कोभु} (१-३+३) \text{ व}$$

$$+ \frac{१}{४} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} \text{अं}^3 \text{इ}^3 \text{कोभु} (१-३-१) \text{ व} \quad \dots \dots \dots \text{प्र (४)}$$

$$- \frac{१५}{८} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} \text{अं}^3 \text{इ}^3 \text{कोभु} (ब-बं) = - \frac{१५}{८} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} \text{अं}^3 \text{इ}^3 \text{कोभु} (३-३३) \text{ व}$$

$$\dots \dots \dots \text{प्र (५)}$$

४०९. प्र प्रेग्णेचे सहावे पद न प्रेग्णेच्या किमतीच्या पदसघानें बनते. तेव्हा ते मागाहून तयार करूं. त्याकरिता न प्रेग्णेचा पदमघ प्रथम तयार करूं. भागे न प्रेग्णेची चवथ्या पदवापर्यंत सर्व पदे तयार केली आहेत, त्यान $+ ६ ठ^१ (ब_३) भु (२ - २ठ)$ ह्याच एका संयुक्त पदाची किमत काढिली नाही. त्यांत खाली लिहिलेली सहा पदे निघतात. तीं अशीं

$$\begin{aligned} & - (३ठ^१ + ३ ठ^१ ल^१) भु (२-२ठ) ब + ३ ठ^१ भु (४-४ठ) ब \\ & - ३ ठ^१ ल^१ भु (२-२ठ-२ए) ब - ३ ठ^१ ल^१ भु (२-२ठ + २ए) ब \\ & + \frac{४५}{८} ठ^१ इ भुणब + \frac{४५}{८} ठ^१ इ भु (४-४ठ-ण) ब. \end{aligned}$$

ही ६ पदे ४०३ व्या लेखानेंल १३ पदान मिळविली आणि ४०४ व्या लेखानील दोन पदे मिळून २५ पदे खाली एकत्र लिहिली आहेत.—

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} & - \frac{३}{२} ठ^१ भु (२-२ठ) ब \\ & + ३ ठ^१ इ भु (२-२ठ-ण) ब + ३ ठ^१ इ भु (२-२ठ+ण) ब \\ & + \frac{२१}{४} ठ^१ इ भु (२-२ठ-३) ब + \frac{३}{४} ठ^१ इ भु (२-२ठ+३) ब \\ & - (३ठ^१ + ३ ठ^१ इ + \frac{९}{२} ठ^१ ल^१ - \frac{१५}{४} ठ^१ इ^१) भु (२-२ठ) ब \\ & - \frac{३}{४} ठ^१ ल^१ भु (२-२ठ-२ए) ब - \frac{३}{४} ठ^१ ल^१ भु (२-२ठ+२ए) ब \\ & - \frac{१५}{४} ठ^१ इ भु (२-२ठ-२ण) ब - \frac{१५}{४} ठ^१ इ भु (२-२ठ+२ण) ब \\ & + \frac{४५}{८} ठ^१ इ भुणब - \frac{४५}{८} ठ^१ इ भु (४-४ठ-ण) ब \\ & + ३ ठ^१ इ भु (२-२ठ-ण) ब - ३ ठ^१ इ भु (२-२ठ+ण) ब \\ & + \frac{२१}{२} ठ^१ इ इ भु (२-२ठ-ण-३) ब - \frac{३}{२} ठ^१ इ इ भु (२-२ठ-ण+३) ब \\ & + \frac{२१}{२} ठ^१ इ इ भु (२-२ठ+ण-३) ब - \frac{३}{२} ठ^१ इ इ भु (२-२ठ+ण+३) ब \\ & + ३ ठ^१ भु (४-४ठ) ब - \frac{५१}{४} ठ^१ इ भु (२-२ठ-२३) ब \\ & - \frac{३}{८} अ^१ ठ^१ भु (१-ठ) ब - \frac{१५}{८} अ^१ ठ^१ भु (३-३ठ) ब [चवथी पदवा] \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

४१०. वरच्या पदमघाचें संकलन करावयाचें. संकलन म्हणजे शून्य लब्धिगुणापासून तो ज्या पदमघाचा म्हणजे मघाचा लब्धिगुण आहे तो सचय मघा-वयाचा. संकलन म्हणजे काय, लेख ३१६ पहा. आणि लेख ३८४ पहा. वरचे संकलन करावयाचे असता पदगुणकाला केंद्रगुणकानें भागावे लागते. त्याचे जागी केंद्रगुणकानें १ ह्या संख्येला भासुन गुणक तयार करुन त्या गुणकानें पदगुणकाला गुणित्यानें तेच कार्य होते. त्याला संकलन गुणक म्हणू. ते खाली तयार करुन लिहिले आहेत. भुज्येचे संकलन कोभुज्येने होते. एथे ऋणचिन्ह संकल-नालाच दिले आहे.

$$\begin{array}{lcl}
 (२-२४)^{-१} = १ - \frac{१}{२} + \frac{१}{२} \theta - \frac{१}{२} \theta^2 & | & (४-४४)^{-१} = १ - \frac{१}{२} \\
 (२-२४-७)^{-१} = १ + २४ + \frac{१}{४} \theta^2 & | & (४-४४)^{-१} = १ - \frac{१}{४} \\
 (२-२४+७)^{-१} = १ + \frac{१}{२} + \frac{२}{९} \theta & | & (२-२४-२४)^{-१} = १ + \frac{१}{२} \\
 (२-२४-३)^{-१} = १ - \frac{१}{२} + \frac{३}{४} \theta & | & (२-२४+२४)^{-१} = १ + \frac{१}{२} \\
 (२-२४-३)^{-१} = १ - \frac{१}{२} - \frac{१}{४} \theta & | & (२-२४+७-३)^{-१} = (२-३४)^{-१} = \frac{१}{३} \\
 (२-२४-७-३)^{-१} = (१-४)^{-१} = १ + \theta & | & (२-२४-७-३)^{-१} = १ + ३\theta \\
 (२-२४-२७)^{-१} = १ - \frac{१}{२\theta} - \frac{३}{८} & | & (२-२४-२७)^{-१} = -\frac{१}{२\theta} + \frac{३}{८}
 \end{array}$$

यांतिल ७ = $१ - \frac{३}{४}\theta$ आणि ७ = $१ + \frac{३}{४}\theta$ घेतला आहे. ३८९ व ३८७ ले. पहा.

$$--\theta \left(\frac{\theta}{यजव} \right) सूत्र =$$

$$\begin{array}{l}
 - \frac{३}{४}\theta^३ कोभु(२-२४)व - \frac{३}{४}\theta^३ कोभु(२-२४)व \\
 + ३\theta^३ कोभु(२-२४-७)व + ३\theta^३ कोभु(२-२४+७)व \\
 - \frac{२१}{८}\theta^३ कोभु(२-२४-३)व + \frac{३}{८}\theta^३ कोभु(२-२४+३)व \\
 - \frac{३}{८}\theta^३ कोभु(२-२४-२७)व - \frac{१५}{८}\theta^३ कोभु(२-२४-२७)व
 \end{array}$$

—ॐ $\left(\frac{त}{यज'व'} \right) सूव -$ —चाटू.

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{१५}{८} ठ'इ' - \frac{९}{४} ठ' - \frac{३}{२} ठ'इ' - \frac{९}{४} ठ'ल' \right) कोभु (२-२ठ) व \\
 & + १ठ'इ कोभु (२-२ठ-ण) व - \frac{१}{३} ठ'इ कोभु (२-२ठ+ण) व \\
 & - \frac{६३}{१६} ठ'इ कोभु (२-२ठ-ड) व - \frac{३}{१६} ठ'इ कोभु (२-२ठ+ड) व \\
 & + \frac{४५}{३२} ठ'इ कोभु (२-२ठ-२ण) व - \frac{१५}{१६} ठ'इ कोभु (२-२ठ+२ण) व \\
 & - \frac{९}{३२} ठ'ल कोभु (२-२ठ-२ए) व - \frac{३}{१६} ठ'ल कोभु (२-२ठ+२ए) व \\
 & - \frac{५१}{८} ठ'इ कोभु (२-२ठ-२ड) व - \frac{३}{८} अं ठ' कोभु (१-३) व \\
 & + \frac{२१}{२} ठ'इ कोभु (२-२ठ-ण-ड) व - \frac{३}{२} ठ'इ कोभु (२-२ठ-ण+ड) व \\
 & + \frac{७}{२} ठ'इ कोभु (२-२ठ-ण-ड) व - \frac{१}{२} ठ'इ कोभु (२-२ठ-ण+ड) व \\
 & + \frac{१५}{८} ठ'इ कोभु (४-४ठ-ण) व + \frac{४५}{८} ठ'इ कोभु णव \\
 & + \frac{३}{४} ठ' कोभु (४-४ठ) व - \frac{५}{८} अं ठ' कोभु (३-३ठ) व
 \end{aligned}$$

ह्या मकलनामध्ये निम्न्या पदवाच्या पदापासून आणि खवथ्या पदवाच्या पदापासून वाही पदे पाचव्या पदवाची निघण्याचा सभव आहे.

६११. चद्राच्या कक्षेचे निमरे सूक्ष्माज समीकरण लिहल्या व दुसऱ्या समीकरणाहून निघ आहे. ह्या समीकरणाने $\frac{सूव}{सूक}$ हे एकच पद आहे. ज्ञानाल पदे अव्यक्त स्वरुपाची घेऊन त्यांनी ह्या पदाचा किमत्त ठरवून, ते समीकरण खाली लिहिल्याप्रमाणे.—

$$\frac{सूक}{सूव} = \frac{१}{जव'} \left[१ + २ॐ \left(\frac{त}{यज'व'} \right) सूव \right]^{-२}$$

लेखन सौकर्याकरिता संकलन हे कमातीच पद प्रथम क्ष ने दाखवितो.

तेव्हां

$$\begin{aligned}\frac{\text{सूक्ष्म}}{\text{सूत्र}} &= \frac{1}{ज^2 व^2} (1 + 2क्ष)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{ज^2 व^2} \left(1 - क्ष + \frac{3}{2} क्ष^2\right)\end{aligned}$$

एथें क्ष म्हणजे ४०२ ह्या लेखांत जो पदसमूह नयार होईल त्याचें संकलन करून आलेली पदें. ह्यामध्ये पहिले पद दुसऱ्या पदवीचें येतें आणि पांचव्या पदवीपेक्षां सूक्ष्म पदें आपणास नको आहेत. यावरिचा क्ष चा सामान्य स्वरूपाचा किंमत खाली दिल्याप्रमाणें होते.

$$\begin{aligned}-क्ष &= (सं_०) + (स_१) + (स_२) + (स_३) \\ + \frac{3}{2} क्ष^2 &= + \frac{3}{2} (सं_०)(सं_१) + ३ (सं_१)(सं_१)\end{aligned}$$

आणि

$$\begin{aligned}व &= अ [1 + (व_१) + (व_२) + (व_३) + (व_४) + (व_५)] \\ &= अ [1 + \{(व_१) + व\}] \\ \frac{अ^2}{व^2} &= [1 + \{(व_१) + व\}]^{-2} \\ &= 1 - २ \{(व_१) + व\} \\ &\quad + ३ \{(व_१) + व\}^2 \\ &\quad - ४ \{(व_१) + व\}^3 \\ &\quad + ५ \{(व_१) + व\}^4 - ६ (व_१)^५ \\ &+ ३ \{(व_१) + व\}^3 = + ३ (व_१)^३ + ६ (व_१) व + ३ व^३ \\ &- ४ \{(व_१) + व\}^4 = - ४ (व_१)^४ - १२ (व_१)^३ व - १२ (व_१) व^२ \\ &+ ५ \{(व_१) + व\}^५ = + ५ (व_१)^५ + २० (व_१)^४ व + २० (व_१)^३ व^२\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -६(व_१)^१ &= -६(व_१)^१ \\ +३व_१^३ &= ३(व_१)^३ + ६(व_२)(व_३) \end{aligned}$$

तेव्हा

$$\frac{१}{जव^३} = \frac{१}{जअ^३} \left\{ \begin{aligned} &१ - २(व_१) - २(व_२) + ३(व_१)^३ + ६(व_१)(व_२) - ४(व_३)^३ \\ &- २(व_३) + ६(व_१)(व_३) + ३(व_२)(व_३) \\ &- १२(व_१)^३(व_२) \\ &+ ५(व_१)^६ - २(व_१) - ६(व_१)(व_२) - १२(व_१)^३(व_३) \\ &+ ६(व_२)(व_३) - १२(व_१)(व_२)(व_३) \\ &+ २०(व_१)^३(व_३) - ६(व_१)^६ - २(व_२) \\ &\dots\dots (ब) \end{aligned} \right.$$

वरचे नमोकरण (अ) आणि (ब) याचा सुगावाच मेल्या म्हणजे ^{सूक्त} ह्या पदार्चा किंमत येते, ती पांचव्या पदवीपर्यंत खाली दिली आहे

$$\frac{\text{सूक्त}}{\text{सूव}} = \frac{१}{जअ^३} \left\{ \begin{aligned} &१ - २(व_१) + [३(व_१)^३ - २(व_२) + (स_१)] \\ &+ [६(व_१)(व_२) - ४(व_१)^३ - २(व_१)(स_२) - २(व_१)(स_३)] \\ &- \left[\begin{aligned} &५(व_१)^६ - १२(व_१)^३(व_२) - ३(व_२)(व_३) - २(व_१) \\ &- ६(व_१)(व_३) - (स_१) + ३(स_२)(स_३) \\ &+ ३(व_१)^३(स_२) - २(व_१)(स_३) - २(व_२)(स_३) \end{aligned} \right] \\ &+ \left[\begin{aligned} &- ६(व_१)(व_२) - २(व_१) - १२(व_१)(व_२)(व_३) \\ &+ २०(व_१)^३(व_३) - १२(व_१)^३(व_३) + ६(व_२)(व_३) \\ &+ ३(स_२)(स_३) - २(स_२)(व_१) - ६(व_१)^६ \\ &+ ३(व_१)^३(स_१) - २(व_१)(स_२) - ३(व_१)(स_२)(स_३) \\ &+ (स_२) - ४(व_१)^३(स_२) - २(व_२)(स_१) \\ &+ ६(व_१)(व_२)(स_३) \end{aligned} \right] \end{aligned} \right.$$

हे नमोकरण काम की किंमत वरच्या पदवीपर्यंत पूर्णपणे वाढण्याच्या उपयोगी पडेल. यांतील पदे पदवीच्या क्रमाने दिली आहेत.

प्रकरण चवदावें
चंद्रकक्षेच्या सूक्ष्मांश समीकरणांचें संकलन
तिसरी पदवी

४१२. चंद्राच्या दाराचें सूक्ष्मांश समीकरण आतां आपण तिसऱ्या पदवीचें सोडवूं. हें समीकरण ३७३ ह्या लेखांत दिलें आहे. त्यांनील पहिलें पद $\frac{\text{प्रश}-\text{प}}{\text{ज}^2 \text{व}^2}$ हें आहे. याची किंमत प्रथम तयार करितो. ह्या पदव्याच्या किमतींत तीन पदें आहेत, त्यापैकी निमरें पद असें आह्मे की, त्यांनील पहिलेच पद पाचव्या पदवीचें असून चंद्रगुणक ० किंवा ० ह्या मत्स्या समीप असल्यामुळे तें आपणाला विचागत ध्यावयाचेच नाहीं. याकी दोन पदे प्र प्रेरणेचीच आहेत. मात्र त्यांना $३ \frac{\text{श}}{\text{व}}$ आणि $\frac{\text{श}}{\text{व}}$ यांनी गुणावे लागत. म्हणून प्रथम आपण $\frac{\text{श}}{\text{व}}$ ची किंमत तयार करूं. ही किंमत दुसऱ्या पदवीची पुरे आहे.

$$\text{श} = \text{लभुएव} + \frac{१}{२} \text{ठलभु}(२-२४-ए)व$$

$$\text{व} = \text{अ} (१ + ३ \text{ कोभुणव} + \dots)$$

$$\frac{\text{श}}{\text{अ}} = \text{श} \times (१ + ३ \text{ कोभुणव})^{-१}$$

$$= \text{लभुएव} + \frac{१}{२} \text{ठलभु}(२-२४-ए)व$$

$$= \frac{१}{२} \text{इलभु}(ए-ण)व - \frac{१}{२} \text{इलभु}(ए+ण)व \dots (अ)$$

यांनी ३ प्र (२) व प्र (३) ह्या पदमधाला गुणून पदे गाळा येथी त्यांत तिसऱ्या पदवीची सर्व पदें, आणि चवथ्याही पदवीची सर्व पदे घेतली. हे पदमध ४०६ व ४०७ ह्या लेखांत आहेत. हा गुणाकार करिताना त्या दोन्ही पदमधार्ताल तीन तीन पदांना गुणावें लागते.

$$\frac{\text{प्रश}-\text{प}}{\text{ज}^2 \text{व}^2} = \left\{ \begin{array}{l} - (\frac{१}{२} \text{ठल} - \frac{१}{२} \text{इल}) \text{भुएव} \\ + (\frac{१}{२} \text{ठल} - \frac{१}{२} \text{इल}) \text{भु}(२-२४-ए)व \\ - \frac{१}{२} \text{ठलभु}(२-२४+ए)व \\ \quad - \frac{१}{२} \text{इलभु}(४-४४-ए)व \\ + \frac{१}{२} \text{ठलइभु}(२-२४-ए-ड)व \\ \quad - \frac{१}{२} \text{इलइभु}(२-२४-ए+ड)व \\ - \frac{१}{२} \text{ठलइभु}(२-२४+ए-ड)व \\ \quad - \frac{१}{२} \text{इलइभु}(२-२४+ए+ड)व \\ - \frac{१}{२} \text{ठलइभु}(ए-ड)व - \frac{१}{२} \text{इलइभु}(ए+ड)व \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + ३\text{ठ}^{\circ}\text{लइभु} (ए + ण) व + ३\text{ठ}^{\circ}\text{लइभु} (ए - ण) व \\
 & + ३\text{ठ}^{\circ}\text{लइभु} (२ - २ठ + ए - ण) व \\
 & \quad - ३\text{ठ}^{\circ}\text{लइभु} (२ - २ठ - ए + ण) व \\
 & + ३\text{ठ}^{\circ}\text{लइभु} (२ - २ठ + ए + ण) व \\
 & \quad - ३\text{ठ}^{\circ}\text{लइभु} (२ - २ठ - ए - ण) व \\
 & \quad \dots \dots (१)
 \end{aligned}$$

४१३. शराच्या सूक्ष्मांश समीकरणांत जें दुसरे पद आहे त्या दुसऱ्या पदाला $(\frac{\text{सुश}}{\text{सुव}} - \frac{\text{शसुव}}{\text{वसुव}})$ हा गुणक आहे. ह्या गुणकाची किंमत प्रथम नकार वळ.

$$\text{श} = \text{लभुएव} + \frac{३}{४} \text{ठलभु} (२ - २ठ - ए) व$$

$$\frac{\text{सुश}}{\text{सुव}} = \text{लकोभुएव} + \frac{३}{४} \text{ठलकोभु} (२ - २ठ - ए) व \dots (ब)$$

बगच्या लेखांत $\frac{\text{श}}{\text{व}}$ अ ह्या पदाची किंमत काढिली आहे. आणि त्याला गुणक

$\frac{\text{सुव}}{\text{सुव}}$ आहे. ह्या गुणकाची किंमत त्याची लिहिल्याप्रमाणे :—

$$\text{व} \frac{१}{\text{अ}} \left\{ \begin{aligned} & + \text{इकोभुणव} - \frac{३}{४} \text{लकोभु} २ एव \\ & + \text{ठकोभु} (२ - २ठ) व + \frac{१}{४} \text{ठइकोभु} (२ - २ठ - ण) व \end{aligned} \right.$$

तेव्हां

$$\frac{१}{\text{अ}} \frac{\text{सुव}}{\text{सुव}} - \left\{ \begin{aligned} & - \text{इभुणव} + \frac{३}{४} \text{लभु} (२ एव) \\ & \quad - \text{ठभु} (२ - २ठ) व - \frac{१}{४} \text{ठइभु} (२ - २ठ - ण) व \dots (ब) \end{aligned} \right.$$

म्हणून

$$- \frac{\text{त}}{\text{अजव}} \left(\frac{\text{सुश}}{\text{सुव}} - \frac{\text{शसुव}}{\text{वसुव}} \right) =$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{३}{४} \text{ठलभु} (२ - २ठ - ए) व + \frac{३}{४} \text{ठलभु} (२ - २ठ + ए) व \\
 & + \frac{१}{४} \text{ठलइभु} (२ - २ठ - ए - ङ) व - \frac{१}{४} \text{ठलइभु} (२ - २ठ - ए - ङ) व \\
 & - \frac{३}{४} \text{ठलइभु} (२ - २ठ - ण - ङ) व - \frac{३}{४} \text{ठलइभु} (२ - २ठ - ए - ङ) व \\
 & - \frac{१}{४} \text{ठलइभु} (२ - २ठ - ए - ण) व - \frac{१}{४} \text{ठलइभु} (२ - २ठ - ए - ण) व \\
 & - \frac{१}{४} \text{ठलइभु} (२ - २ठ - ए - ण) व - \frac{१}{४} \text{ठलइभु} (२ - २ठ - ए - ण) व \\
 & + \frac{३}{४} \text{ठलभुएव} + \frac{३}{४} \text{ठलभु} (४ - ४ठ - ए) व \\
 & \dots \dots (२)
 \end{aligned}$$

४१४. शराच्या सूक्ष्मांश समीकरणातील तिसरे पद अत्यंत सूक्ष्म आहे. त्यातील पहिलेच पद पाचव्या पदवीचे आहे. त्याचा विचार मानातून वळ. शराच्या दात लेखातील पदसंघ (१) व (२) यांमध्ये चवथ्या पदवीपर्यंत सर्व पदे

आली आहेत. याचें संकलन केले तर चवथ्या पदवीपर्यंत सर्व पदें येणार नाहीत. न्याय थोडे वैगुण्य राहिले. पण व्याकृति अशी योजना करू की, पाचव्या पदवीची १ केंद्रगुणवासणीय ज्याचे केंद्रगुणक आठ्वी पदें जोडून, त्याचें संकलन चवथ्या पदवीचे होईल. ती पद ह्या संकलनात घेतली म्हणजे ते वैगुण्य नाहीसे होईल. म्हणून ४ व्या पदवीपर्यंत सर्व पदें घेऊन त्याचें संकलन करू. ती सर्व पदें खाली लिहिल्याप्रमाणें :—

$$\left\{ \frac{\text{सूक्ष्म}}{\text{सूक्ष्म}} + \text{श} \right\} =$$

$$\begin{aligned} & - (१\frac{१}{२}\text{ठंल} - १\frac{१}{२}\text{ठंल})\text{मूणव} - (१\frac{१}{२}\text{ठंल} - १\frac{१}{२}\text{ठंल})\text{मू}(२-२ठ-ए)व \\ & - १\frac{१}{२}\text{ठंलइंमू}(२-२ठ-ए-ड)व - १\frac{१}{२}\text{ठंलइंमू}(२-२ठ-ए-ड)व \\ & - १\frac{१}{२}\text{ठंलइंमू}(ए-ड)व - १\frac{१}{२}\text{ठंलइंमू}(ए, ड)व \\ & १\frac{१}{२}\text{ठंलइंमू}(२-२ठ-ए-ण)व - १\frac{१}{२}\text{ठंलइंमू}(२-२ठ-ए-ण)व \\ & + १\frac{१}{२}\text{ठंलइंमू}(२-२ठ-ए-ण)व - १\frac{१}{२}\text{ठंलइंमू}(२-२ठ-ए-ण)व \\ & - १\frac{१}{२}\text{ठंलइंमू}(ए-ण)व + १\frac{१}{२}\text{ठंलइंमू}(ए-ण)व \end{aligned}$$

८१५. प्रातिवृत्ताच्या चतुर्भागांने छेदिल्यामुळे होणारे दोन विट्टे ज्यांना राहु आणि केतु अशीं दान नावे आहेत. हे दोन विट्टे स्थिर नाहीत, त्यांना गति आहे. ही गति चंद्राच्या मध्यम गतीच्या (१-ए) इतक्या पटीं बरोबर असते. ह्या गतीला कारण सूर्याचें आकर्षण होय. चंद्र-सूर्याच्या मध्यम गतीचें गुणोत्तर ठ ही संख्या आहे. ठ ह्या संख्येच्या विशेष घातांनी ए ही संख्या ठरविता येते. ३८३ ह्या लघुमान हे उचट केले आहे. तेथे ठ च्या वर्गापर्यंत मिमन काढिली ती एचे घनतापर्यंत मापडतें, ती अशी—

$$\begin{aligned} \text{ल} &= - (१\frac{१}{२}\text{ठंल} - १\frac{१}{२}\text{ठंल}) \div (१-ए^३) \\ १-ए^३ &= - १\frac{१}{२}\text{ठंल} - १\frac{१}{२}\text{ठंल} \\ ए^३ &= १ + १\frac{१}{२}\text{ठंल} - १\frac{१}{२}\text{ठंल} \\ ए &= १ + १\frac{१}{२}\text{ठंल} - १\frac{१}{२}\text{ठंल} \end{aligned}$$

४१६. शर आणि चन्द्राच्या याचे संकलन करण्याकृति प्रत्येक पदाच्या गुणकाच्या, केंद्रगुणाच्या वर्गा १ ह्या संख्येस वजा करून जी संख्या होते तिनें भागावे लागतें. ह्या भाजकानें १ ह्या संख्येस भागून त्या भाजकाच्या गुणकाचे स्वरूप दिलें आहे. ह्या गुणकांना 'संकलन गुणक' म्हणा. ते शराच्या समीकरणाचे संकलन गुण खाली तयार केले आहेत :—

$$\frac{१}{१-(\text{केंद्रगुणक})^२} = \left\{ १ - (\text{केंद्रगुणक})^२ \right\}^{-१}$$

ह्या पद्धतीने म्हणजे वजाबाकी केल्यानंतर — १ घात कगवयाचा आहे, आणि ठ ही सख्या उ बरोबर आहे असे मानिले आहे. ए आणि ण यांच्या किमती ठ च्या रूपाने घ्यावयाच्या आहेत. स्पष्टीकरणासाठी कांही वेळाचे संकलन गुणक तयार करून दाखविलीं.

$$\begin{aligned}
 & \{1 - (2 - 2\theta - \epsilon)^3\} \\
 &= \{1 - (8 + 8\theta^3 + \epsilon^3 - 12\theta - 4\epsilon + 8\theta\epsilon)\} \\
 &= \left\{ -3 - 12\theta - 8\theta^3 - 3 - 4\epsilon - \frac{3}{2}\epsilon^3 - \frac{12\epsilon}{16}\epsilon^3 \right\} \\
 & \quad + 8\theta - \frac{4}{2}\epsilon^3 - \frac{12\epsilon}{16}\epsilon^3 = 8\theta \left(1 - \frac{4}{2}\epsilon - \frac{12\epsilon}{64}\epsilon^3 \right) \\
 & \{1 - (2 - 2\theta - \epsilon)^3\}^{-1} \\
 &= \frac{1}{8\theta} \left(1 - \frac{4}{2}\epsilon - \frac{12\epsilon}{64}\epsilon^3 \right)^{-1} \\
 &= \frac{1}{8\theta} \left(1 + \frac{4}{2}\epsilon + \frac{12\epsilon}{64}\epsilon^3 \right)
 \end{aligned}$$

संकलन गुणक

$$= \frac{1}{8\theta} + \frac{4}{32} + \frac{12\epsilon}{256}\theta.$$

पुढचे संकलन गुणक पाहिलाना ए आणि ण यांच्या किमती १ $\frac{3}{4}\theta^3$ आणि १ $-\frac{3}{4}\theta^3$ अशा अनुक्रमे घ्याव्या.

$$\begin{aligned}
 & \{1 - (2 - 2\theta - \epsilon - \delta)^3\} \\
 &= \{1 - (2 - 2\theta - 1 - \frac{3}{4}\theta^3)^3\} \\
 &= \{1 - (1 - 2\theta - \frac{3}{4}\theta^3)^3\} \\
 & \{1 - (2 - 2\theta - \epsilon - \delta)^3\}^{-1} \\
 &= \{1 - (1 - 2\theta - \frac{3}{4}\theta^3)^3\}^{-1} \\
 &= \left\{ 1 - 2\theta - \frac{3}{4}\theta^3 \right\}^{-1} \\
 &= \frac{1}{1 - 2\theta - \frac{3}{4}\theta^3}
 \end{aligned}$$

याप्रमाणेच

$$\{1 - (\text{ए ड})\}^{-1} = \frac{1}{28} + \frac{1}{8};$$

$$\{1 - (2 - 28 - \text{ए} - \text{ण})\}^{-1} = 1;$$

$$\{1 - (\text{ए} + \text{ड})\}^{-1} = \frac{1}{28} + \frac{1}{8};$$

$$\{1 - (2 - 28 + \text{ए} - \text{ण})\}^{-1} = -\frac{1}{3};$$

$$\{1 - (2 - 28 - \text{ए} + \text{ड})\}^{-1} = \frac{1}{28} - \frac{1}{8};$$

$$\{1 - (2 - 28 - \text{ए} + \text{ण})\}^{-1} = -\frac{1}{3};$$

$$\{1 - (\text{ए} - \text{ण})\}^{-1} = 1$$

$$\{1 - (2 - 28 + \text{ए} + \text{ण})\}^{-1} = -\frac{1}{14}$$

$$\{1 - (\text{ए} + \text{ण})\}^{-1} = -\frac{1}{3}$$

वरचे सकलत गुणक घेऊन ज्याच्या त्या पदाच्या गुणकाच्या गुणिले म्हणजे शराची पदे होतात. हे शराचे समीकरण आपणाला चवथ्या पदवीपर्यंत त्यावयाचे आहे. शराचे समीकरण पाचव्या पदवीची १ सत्येसमीप वेदगुणाची पदे घेऊन त्यात जी पदे निघतील ती मागाहून तयार केली म्हणजे चवथी पदवी पूर्ण होईल.

$$(\text{ल भु ए व} + (\frac{1}{28}\text{ठ ल} + \frac{1}{8}\text{ठ ल} - \frac{1}{14}\text{ठ ल}))$$

$$\text{भु}(2 - 28 - \text{ए}) \text{ व}$$

$$+ \frac{1}{28}\text{ठ ल} \text{ व } \text{भु}(2 - 28 - \text{ए} - \text{ड}) \text{ व}$$

$$+ \frac{1}{8}\text{ठ ल} \text{ व } \text{भु}(2 - 28 - \text{ए} - \text{ड}) \text{ व}$$

$$+ \frac{1}{28}\text{ठ ल} \text{ व } \text{भु}(2 - 28 - \text{ए} + \text{ड}) \text{ व}$$

$$+ \frac{1}{8}\text{ठ ल} \text{ व } \text{भु}(2 - 28 - \text{ए} + \text{ड}) \text{ व}$$

$$\text{श} = \left\{ -\frac{1}{28}\text{ठ ल} \text{ व } \text{भु}(\text{ए} - \text{ड}) \text{ व} - \frac{1}{8}\text{ठ ल} \text{ व } \text{भु}(\text{ए} - \text{ड}) \text{ व} \right.$$

$$+ \frac{1}{28}\text{ठ ल} \text{ व } \text{भु}(\text{ए} + \text{ड}) \text{ व} - \frac{1}{8}\text{ठ ल} \text{ व } \text{भु}(\text{ए} + \text{ड}) \text{ व}$$

$$- \frac{1}{28}\text{ठ ल} \text{ व } \text{भु}(2 - 28 - \text{ए} - \text{ण}) \text{ व}$$

$$+ \frac{1}{8}\text{ठ ल} \text{ व } \text{भु}(2 - 28 - \text{ए} - \text{ण}) \text{ व}$$

$$- \frac{1}{28}\text{ठ ल} \text{ व } \text{भु}(2 - 28 - \text{ए} - \text{ण}) \text{ व}$$

$$+ \frac{1}{8}\text{ठ ल} \text{ व } \text{भु}(2 - 28 - \text{ए} - \text{ण}) \text{ व}$$

$$\left. + \frac{1}{28}\text{ठ ल} \text{ व } \text{भु}(\text{ए} - \text{ण}) \text{ व} - \frac{1}{8}\text{ठ ल} \text{ व } \text{भु}(\text{ए} - \text{ण}) \text{ व} \right.$$

अपूर्ण चवथी पदवी.

४१३. चलत्रिज्येचे समीकरण आता निम्न्या आणि अपूर्ण अशा चवथ्या पदवीपर्यंत सोडविता येईल. याकरिता सर्व पदे चवथ्या पदवीपर्यंत निघतील ती काढून ठेवू. परंतु, मकळन मात्र निम्न्या पदवीपर्यंत करू. ह्या समीकरणात दोन पदे आहेत. दुसरे पद तयार आहे. पहिल्या पदाने प्र प्रेरणेची सहा पदे आहेत. त्यांपैकी पहिल्या पदात ३ (श_३) ल भु ए व हे पद तयार करावयाचे, आणि ६ वे पद सर्वत्र करावयाचे ही कार्ये क्रमाने करू.

— ३ (श_३) ल भु ए व = — $\frac{३}{४} \theta^3 \text{ ल } \frac{३}{४} \text{ को भु } (२ - २\theta - २ए) व$

$$\begin{aligned} & \frac{३}{४} \theta^3 \text{ ल } \frac{३}{४} \text{ को भु } (२ - २\theta) व \\ & - \frac{३}{४} \theta^3 \text{ ल } \frac{३}{४} \text{ को भु } (२ - २\theta - २ए - ड) व \\ & + \frac{३}{४} \theta^3 \text{ ल } \frac{३}{४} \text{ को भु } (२ - २\theta - २ए + ड) व \\ & - \frac{३}{४} \theta^3 \text{ ल } \frac{३}{४} \text{ को भु } (२ - २\theta + ड) व \\ & - \frac{३}{४} \theta^3 \text{ ल } \frac{३}{४} \text{ को भु } (२ए - ड) व \\ & + \frac{३}{४} \theta^3 \text{ ल } \frac{३}{४} \text{ को भु } (२ए + ड) व \end{aligned}$$

४१८. प्र प्रेरणेतील सहावे पद — $\frac{त}{थ ज^३ व^३} \frac{सू व}{सू व}$ हे आहे. ह्यातील पहिल्या अवयवाची किंमत ८०० व्या लेखाने दिली आहे आणि दुसऱ्या अवयवाची किंमत ४१३ व्या लेखाने (व) ह्या पदमघाने दिली आहे. याचा गुणाकार करावयाचा. गुणाकाराने चवथ्या पदवीपर्यंत सर्व पदे घ्यावयाची आहेत आणि आलेल्या गुणाकाराचे लक्षात लिहावयाचे आहे.

$$- \frac{त}{थ ज^३ व^३} \frac{सू व}{सू व} =$$

$$\begin{aligned} & - \frac{३}{४} \theta^3 \text{ ल } \frac{३}{४} \text{ को भु } (२ - २\theta - २ए - ड) व : \frac{३}{४} \theta^3 \text{ ल } \frac{३}{४} \text{ को भु } (२ - २\theta - २ए) व \\ & + \frac{३}{४} \theta^3 \text{ ल } \frac{३}{४} \text{ को भु } (२ - २\theta - २ए) व - \frac{३}{४} \theta^3 \text{ ल } \frac{३}{४} \text{ को भु } (२ - २\theta - २ए) व \\ & - \frac{३}{४} \theta^3 \text{ ल } \frac{३}{४} \text{ को भु } (२ - २\theta - २ए - ड) व + \frac{३}{४} \theta^3 \text{ ल } \frac{३}{४} \text{ को भु } (२ - २\theta + ड) व \\ & + \frac{३}{४} \theta^3 \text{ ल } \frac{३}{४} \text{ को भु } (२ - २\theta - २ए + ड) व - \frac{३}{४} \theta^3 \text{ ल } \frac{३}{४} \text{ को भु } (२ - २\theta + ड) व \\ & + \frac{३}{४} \theta^3 \text{ ल } \frac{३}{४} \text{ को भु } (२ - २\theta - २ए) व - \frac{३}{४} \theta^3 \text{ ल } \frac{३}{४} \text{ को भु } (२ - २\theta - २ए) व \\ & - \frac{३}{४} \theta^3 + \frac{३}{४} \theta^3 \text{ को भु } (४ - ४\theta) व \\ & - \frac{३}{४} \theta^3 \text{ ल } \frac{३}{४} \text{ को भु } (४ - ४\theta - २ए) व + \frac{३}{४} \theta^3 \text{ ल } \frac{३}{४} \text{ को भु } (४ - ४\theta - २ए) व \end{aligned}$$

४१९. चलत्रिज्येच्या समीकरणात दुसरे पद

$$२ \theta^2 \left(\frac{त}{थ ज^३ व^३} \right) \frac{सू व}{सू व} \times \left\{ \frac{सू व}{सू व} \cdot व \right\}$$

हे आहे. ह्यातील पहिल्या अवयवाची किंमत ४१० व्या लेखाने दिली आहे. आणि दुसऱ्या अवयव चलत्रिज्येचे समीकरण हाच आहे. पण ते पूर्वीच्या ३८८ व्या लेखातील जे समीकरण आहे, त्यामधील पदे घ्यावयाची. आपणाला चवथ्या पदवीपर्यंत

४२१. सूर्याच्या आकर्षणाने, चंद्रकक्षेच्या बृहदक्षाम गति प्राप्त होते. अर्थात त्या अक्षाची टोके जी चंद्रोच्च आणि केद्र सन्निधान यांनाही गति उत्पन्न होते. लेख ३८९ पहा. चंद्राच्या केद्र सन्निधानाची गति ह्या निम्नच्या पदवीच्या समीकरणावरूनही साध्य होते. ती अशी—

$$d = \left(\frac{3}{2} \theta^2 d + \frac{3}{2} \frac{3}{2} \theta^2 d \right) \div (1 - \eta^2)$$

कोभूणत्र ह्या केद्राचा केद्रगुणक ण आहे. याचा वर्ग १ ह्या सूर्येन वजा करून वजा-वाचीने पदगुणकाला भागिल्याने त्या पदाचे सकलन होते. कोभूणत्र ह्या पदाचे सकलन d कोभूणत्र असे आहे, हे भूमिनीच्या गिद्धांतानी सिद्ध जाले आहे म्हणून—

$$d = \left(\frac{3}{2} \theta^2 d + \frac{3}{2} \frac{3}{2} \theta^2 d \right) \div (1 - \eta^2)$$

$$1 - \eta^2 = \frac{3}{2} \theta^2 + \frac{3}{2} \frac{3}{2} \theta^2$$

$$\eta^2 = 1 - \frac{3}{2} \theta^2 - \frac{3}{2} \frac{3}{2} \theta^2$$

$$\eta = 1 - \frac{3}{2} \theta^2 - \frac{3}{2} \frac{3}{2} \theta^2$$

४२२. समीकरणाने सकलन करण्याकरिता प्रत्येक पदाच्या गुणकाला एक उणा केद्रगुणाचा वर्ग याने भागावे लागते. त्याकरिता त्या भाजकाच्या गुणकाचे रूप देऊन गुणक तयार केले आहे त्याच्या सकलन गुणक जम म्हटले आहे. ३८७ व्या लेखात असा गुणक तयार केला आहे. तसेच ३९० वरा लेखात गुणक भाजक तयार केले आहेत. ते गुणक आपण तयार करू. सामान्यत्वे—

$$\frac{1}{1 - (\text{कें. गु.})^2} = \left\{ 1 - (\text{कें. गु.})^2 \right\}^{-1}$$

ह्या पद्धतीने गुणक तयार केले ते असे—

$$\begin{aligned} \left\{ 1 - (2-2\theta)^2 \right\}^{-1} &= \left\{ -2 \left(1 - \frac{3}{2} \theta + \frac{3}{2} \theta^2 \right) \right\}^{-1} \\ &= -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{2} \theta - \frac{3}{2} \theta^2 + \frac{9}{4} \theta^3 \right) \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \theta + \frac{3}{4} \theta^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\{ 1 - (2\eta)^2 \right\}^{-1} &= \left\{ 1 - 4 \left(1 - \frac{3}{2} \theta^2 \right) \right\}^{-1} \\ &= \left\{ -2 \left(1 + 2\theta^2 \right) \right\}^{-1} \\ &= -\frac{1}{2} \left(1 - 2\theta^2 \right) = -\frac{1}{2} + \theta^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\{ 1 - (2-2\theta-\eta)^2 \right\}^{-1} &= \left\{ 1 - (\phi - \eta)^2 \right\}^{-1} \\ &= \left\{ 1 - \phi^2 + 2\phi\eta - \eta^2 \right\}^{-1} \end{aligned}$$

$$\phi^2 = 4 - 4\theta + 4\theta^2; \quad \eta^2 = 1 - \frac{3}{2} \theta^2 - \frac{3}{2} \frac{3}{2} \theta^2$$

$$२ फण = (४ - ४ ठ) (१ - \frac{३}{४} ठ^२ - \frac{२२५}{३२} ठ^३)$$

$$= ४ - ३ ठ^२ - \frac{२२५}{८} ठ^३ - ४ ठ + ३ ठ^३$$

$$= ४ - ४ ठ - ३ ठ^२ - \frac{२०१}{८} ठ^३$$

$$\begin{aligned} \left\{ १ - फ - २ फण - ण \right\}^{-१} &= \left\{ १ - ४ ठ - \frac{११}{२} ठ^२ \right. \\ &\quad \left. - \frac{१७७}{१६} ठ^३ \right\}^{-१} \\ &= \left\{ + ४ ठ (१ - \frac{११}{८} ठ \right. \\ &\quad \left. - \frac{१७७}{६४} ठ^२) \right\}^{-१} \\ &= \frac{१}{४} ठ (१ - \frac{११}{८} ठ - \frac{१७७}{६४} ठ^२)^{-१} \\ &= \frac{१}{४} ठ (१ + \frac{११}{८} ठ + \frac{१७७}{८} ठ^२) \\ &\quad \frac{१}{४} ठ : \frac{११}{८} ठ : \frac{१७७}{८} ठ \end{aligned}$$

ह्याप्रमाणे सर्व केंद्रांचे केंद्र गुणक घेऊन मकलन गुणक वाढून ते सर्व खांदी एकत्र लिहिले आहेत:—

$$(२ - २ ठ) \quad याचा \quad सं. गुणक = \frac{३}{४} - \frac{६}{४} ठ + \frac{१३३}{३२} ठ^३;$$

$$२ ए \quad " \quad " \quad = \frac{३}{४} + \frac{३}{४} ठ^३;$$

$$(२ - २ ठ + ण) \quad " \quad " \quad = \frac{३}{४} - \frac{१३}{४} ठ;$$

$$(२ - २ ठ - ण) \quad " \quad " \quad + \frac{३}{४} ठ + \frac{३१}{३२} ठ + \frac{१६६९}{३२७६८} ठ^३;$$

$$(२ - २ ठ - २ ण) \quad " \quad " \quad + १ + ४ ठ^३;$$

$$(२ - २ ठ - २ ए) \quad " \quad " \quad + १ + ४ ठ^३;$$

$$(२ - २ ठ - ड) \quad " \quad " \quad = \frac{३}{४} - \frac{३}{४} ठ;$$

$$(२ - २ ठ + ड) \quad " \quad " \quad = \frac{३}{४} - \frac{६}{४} ठ;$$

$$(२ - २ ठ - ण + ड) \quad " \quad " \quad + \frac{१}{२४} + \frac{१}{४};$$

$$\begin{aligned}
 (२ - २ठ - ण - ड) & \quad " \quad + \frac{१}{६ठ} + \frac{१}{३ड}; \\
 ड & \quad " \quad + १ + ठ^३; \\
 १ - ठ & \quad " \quad + \frac{१}{२ठ} + \frac{१}{३ड}; \\
 ण - ड & \quad " \quad + \frac{१}{२ठ} - \frac{१}{३ड}; \\
 ण + ड & \quad " \quad - \frac{१}{२ठ} - \frac{१}{३ड}.
 \end{aligned}$$

४०३. वरचें संकलन गुणक घेऊन चतुर्विज्येच्या समीकरणातील पदांना गुणिले म्हणजे वरच्या क्रमानीची पदे येतात. ही पदे तिसऱ्या पदवीपर्यंत ध्यावयाची आहेत. याकरितां संकलन गुणक एक किंवा दोन घ्यावे.

$$\begin{aligned}
 & (१ - \frac{१}{३} ल^३ + \frac{१}{६} ठ^३ + ३ कोभु ण व \\
 & + (ठ^३ + \frac{१}{६} ठ^३ - \frac{१}{३६} ठ ल^३) कोभु (२ - २ठ) व \\
 & - \frac{१}{३} ल^३ कोभु २ ए व - \frac{१}{६} ठ^३ इ कोभु (२ - २ठ + ण) व \\
 & + (\frac{१}{६} ठ इ + \frac{१}{३६} ठ^३ इ) कोभु (२ - २ठ - ण) व \\
 & + \frac{१}{६} ठ इ कोभु (२ - २ठ - २ ण) व - \frac{१}{३६} ठ^३ इ कोभु ड व \\
 & + \frac{१}{३६} ठ ल^३ कोभु (२ - २ठ - २ ए) व \\
 & + \frac{१}{३६} ठ^३ इ कोभु (२ - २ठ + ड) व \\
 & + \frac{१}{३६} ठ^३ इ कोभु (२ - २ठ - ड) व \\
 & - \frac{१}{३६} ठ इ इ कोभु (२ - २ठ - ण + ड) व \\
 & + \frac{१}{३६} ठ इ इ कोभु (ण - ड) व \\
 & + \frac{१}{३६} ठ इ इ कोभु (२ - २ठ - ण - ड) व \\
 & - \frac{१}{३६} ठ इ इ कोभु (ण + ड) व + \frac{१}{३६} \frac{अं}{अ} ठ कोभु (१ - ठ) व \\
 & \quad \quad \quad [व तिसरी पदवी]
 \end{aligned}$$

वरच्या संकलनात ० समीप केंद्र गुणाच्या पदापामून पाचव्या पदवीची पदे उत्पन्न होतात. ती खाली लिहिली आहेत:—

$$\begin{aligned}
 & - \frac{१}{३६} ठ^३ इ कोभु ड व + \frac{१}{३६} ठ^३ इ कोभु (२ - २ठ - २ ण) व \\
 & + \frac{१}{३६} ठ^३ ल^३ कोभु (२ - २ठ - २ ए) व.
 \end{aligned}$$

४२४. चंद्राचे मध्यम भोग साधनाचें समीकरण म्हणजे कम चें समीकरण आता आपणाम सोडवावयाचें आहे. हे समीकरण सोडविण्याची योजना अगदी सुलभ आहे. प्रथम समीकरणातील पदे शोधून एकत्र करावयाची आहेत. नंतर त्याचे संकलन करावयाचें असते. पदें गोवण्याचे कार्य, ४०५ व्या लेखांत जें सुच याचें सामान्य स्वरूप दिले आहे त्यावरून महज करिता येते. सामान्य स्वरूपातील एक एक पद घेऊन त्याची व्यक्त पदात्मक किंमत तयार करावी, त्याप्रमाणे खात्री कृति झेली आहे. ह्या समीकरणातील पदे तिसऱ्या पदवीची सर्वच तयार करू. ती अशी—

$$- २ (v_1) = - २ इ कोभुण व$$

$$+ ३ (v_1)^2 = + ३ इ' कोभुण व = + ३ इ' - ३ इ' कोभुण व$$

$$- २ (v_1) = + ३ ल' + ठ' + ३ ल' कोभुण व$$

$$- २ ठ' कोभु (२ - २ ठ) व$$

$$- ३ ठ' कोभु (२ - २ ठ - ण) व$$

$$+ (सं.) = - ३ ठ' कोभु (२ - २ ठ) व$$

तिसऱ्या पदवीचीं पदे—

$$+ ६ (v_1) (v_2) = + ६ इ कोभुण व \times (v_2)$$

$$= - ३ ठ' इ कोभुण व - ३ ल' इ कोभुण व$$

$$- ३ ल' इ कोभु (२ ए - ण) व$$

$$- ३ ल' इ कोभु (२ ए + ण) व$$

$$+ ३ ठ' इ कोभु (२ - २ ठ - ण) व$$

$$+ ३ ठ' इ कोभु (२ - २ ठ + ण) व$$

$$+ ४ ठ' इ कोभु (२ - २ ठ - २ ण) व$$

$$+ ४ ठ' इ कोभु (२ - २ ठ) व$$

$$- ४ (v_1)^2 = - ४ इ' कोभुण व - ३ इ' कोभुण व - इ' कोभुण व$$

$$- २ (v_1) (सं.) = (- २ इ कोभुण व)$$

$$\times \{ - ३ ठ' कोभु (२ - २ ठ) व \}$$

$$= + ३ ठ' इ कोभु (२ - २ ठ - ण) व$$

$$+ ३ ठ' इ कोभु (२ - २ ठ + ण) व$$

$$- २ (v_1) - ४१६ व्या लेखांतील व च्या किंमतीतील तिसऱ्या पदवीच्या$$

सर्व पदास २ तीं गुणून आलेली पदे ऋण घेणें.

$$+ (सं.) = ४१० व्या लेखांतील तिसऱ्या पदवीची सर्व पदे.$$

४२५. वरच्या लेखांत दाखविल्याप्रमाणे आलेली सर्व पदे खाली एकत्र केली आहेत:—

$$\frac{\text{सुक}}{\text{सूच}} = \frac{1}{\text{जअ}^2} \left\{ \begin{array}{l} १ + ३इ^३ + ३ल^३ + ठ^३ \\ - (२इ + ३ठइ + ३लइ + ३इ^३) \text{ कोभुणव} \\ + ३इ^३ \text{ कोभुरणव} + ३ल^३ \text{ कोभुरएव} \\ - (३^३ ठ^३ + ३इ^३ ठ^३ - ३ठल^३ - ३^३ ठइ^३) \\ \text{कोभु (२ - २ठ)व} \\ - (३^३ ठइ + ३इ^३ ठ^३) \text{ कोभु (२ - २ठ - ण)व} \\ + ३ठ^३इ \text{ कोभुडव} + ३ठइ^३ \text{ कोभु (२ - २ठ + ण)व} \\ - ३^३ ठ^३इ \text{ कोभु (२ - २ठ - ड)व} \\ + ३^३ ठ^३इ^३ \text{ कोभु (२ - २ठ + ड)व} \\ - ३^३ ठइइ^३ \text{ कोभु (२ - २ठ - ण - ड)व} \\ - ३ठइइ^३ \text{ कोभु (ण - ड)व} \\ + ३^३ ठइइ^३ \text{ कोभु (२ - २ठ - ण + ड)व} \\ + ३ठइइ^३ \text{ कोभु (ण + ड)व} \\ - ३ल^३इ \text{ कोभु (२ए - ण)व} \\ - ३ल^३इ \text{ कोभु (२ए + ण)व} \\ + \frac{१५}{८} \frac{\text{अ}}{\text{अ}} \text{ ठकोभु (१ - ठ)व} - इ^३ \text{ कोभु३णव} \end{array} \right.$$

ह्या समीकरणात $\frac{१}{\text{जअ}^३} (१ + ३इ^३ + ३ल^३ + ठ^३)$ ही स्थोर सख्या आहे. आणि इतर प्रत्येक पदाला $\frac{१}{\text{जअ}^३}$ हा गुणक आहे. तेव्हा ह्या पदांचे स्पष्टीकरण झाले पाहिजे. लेख ३०७ वरून आपणाला कळते की,

$$\begin{aligned} \text{चंद्राची भोग मध्यम गति म} &= \sqrt{\frac{\text{प}}{\text{वृ}^३}} - \sqrt{\frac{\text{अज}^३}{\text{वृ}^३}} \\ &= \sqrt{\left\{ \text{अज}^३ \times \text{अ}^३ (१ - इ^३)^३ \right\}} \\ &= \sqrt{\frac{\text{जअ}^३ \text{अ}^३ (१ - ३इ^३)}{\text{वृ}^३}} \\ &= \text{अज}^३ (१ - ३इ^३) \end{aligned}$$

$$\text{ह्यावरून } \frac{१}{\text{जअ}^३} = \frac{१}{\text{म}} (१ - ३इ^३) \quad \dots \quad \dots \quad (१)$$

$$\text{किंवा } \frac{१}{\text{म}} = \frac{१}{\text{जअ}^३} (१ + ३इ^३) \quad \dots \quad \dots \quad (२)$$

पण, आपण जें गणित करित आहोत त्यांत जी चंद्राची कक्षा आहे, त्या कक्षेचें स्वरूप पूर्ण दिर्घवर्तुळात्मक नाही. सूर्याच्या आकर्षणानें आणि क्रांतिवृत्ताच्या भिन्नत्वामुळे चंद्रकक्षेच्या स्वरूपात प्रतिलक्षणी बदल होत असतो. यामुळे प्रदक्षिणा बालांत आणि तदनुसारी मध्यम गतीत भिन्नत्व येतें. आणि हे भिन्नत्व न्यूनाधिक्य पावत असते म्हणून एथें म ह्या चंद्राच्या मध्यम गतीचे स्वरूप.

$$m = jz^3 (1 - \frac{3}{2}z^2 - \frac{3}{2}l^2 - \theta^2) \dots\dots (३)$$

असें आहे.

दुसरे मूधमात्र गणिताच्या विचारानें पाहिले असतां

$$\frac{1}{jz^3} (1 + \frac{3}{2}z^2 + \frac{3}{2}l^2 + \theta^2)$$

ही स्थीर सख्या आहे, आणि हिला चाल गुणक असा नाही, म्हणून ह्या सम्येवरोवरच चंद्र मध्यम गति असली पाहिजे. सूर्याचें आकर्षण ० असतें तर $\theta = 0$ असते, तसेच क्रांतिवृत्त आणि चंद्रकक्षा ही दोन्ही एकाच पातळीन असली तर $l = 0$ ही स्थीर संख्या वरच्या समीकरण (२) प्रमाणेच असती, म्हणून समीकरण (३) वरोवर आहे.

म्हणून,—

$$\frac{1}{jz^3} (1 + \frac{3}{2}z^2 + \frac{3}{2}l^2 + \theta^2) = \frac{1}{m}$$

$$\frac{1}{jz^3} = \frac{1}{m} (1 - \frac{3}{2}z^2 - \frac{3}{2}l^2 - \theta^2)$$

४२६. ह्यावरून वरच्या मूधमात्र समीकरणाला जो $\frac{1}{jz^3}$ हा गुणक

आहे त्या स्थानी त्याच्या वरोवरीचा $\frac{1}{m} (1 - \frac{3}{2}z^2 - \frac{3}{2}l^2 - \theta^2)$ हा गुणक ठेऊ. असा गुणक ठेविल्याने समीकरणातील प्रत्येक पदाला $(1 - \frac{3}{2}z^2 - \frac{3}{2}l^2 - \theta^2)$ ह्या चार सख्यांपैकी प्रत्येकीने सर्व समीकरणातील प्रत्येक पदाला गुणिले पाहिजे. पण आपणाला गुणाकार तिमच्याच पदवीपर्यंत पाहिजे आहे, चवथ्या पदवीचा नवो, यामुळे समीकरणातील १ २ ३ कोभुजब यामच त्या गुणकानें गुणावे लागतें, तो गुणाकार असा—

$$\begin{aligned} & (1 - \frac{3}{2}z^2 - \frac{3}{2}l^2 - \theta^2) (1 - २ इ कोभुजब) \\ & = १ - \frac{३}{२}z^२ - \frac{३}{२}l^२ - \theta^२ - २ इ कोभुजब + ३ इ कोभुजब \\ & \quad + ३ ल^२ इ कोभुजब + २ \theta^२ इ कोभुजब \dots\dots (४) \end{aligned}$$

गुणकातील चार पदांपैकी पहिले पद १ हो आहे हिने गुणणे म्हणजे गुणाकाराने समीकरणच होय. तथापि, १ २ इ कोभुणव याचे जागी वरचा गुणाकार घेणे. म्हणजे पद समूह (४) हा घेणे. ह्याप्रमाणे गुणाकार करून सर्व समीकरण पुन्हा लिहिले. तें असें—

$$\left. \begin{array}{l} १ - २ इ कोभुणव + ३ इ कोभुणव + ३ ल कोभुणव \\ - १/४ ठ कोभु (२ - २ठ) व \\ - १/४ ठ इ कोभु (२ - २ठ - ण) व \\ - (३ ल इ + ठ इ) कोभुणव \\ - १/४ ठ इ कोभु (२ - २ठ - ण) व \\ - (१/४ ठ - ३ ठ ल - १/४ ठ इ) कोभु (२ - २ठ) व \\ + ३ ठ इ कोभुडव + ६ ठ इ कोभु (२ - २ठ + ण) व \\ - १/४ ठ इ कोभु (२ - २ठ - ड) व \\ + १/४ ठ इ कोभु (२ - २ठ + ड) व \\ - १/४ ठ इ कोभु (२ - २ठ - ण - ड) व \\ - १/४ ठ इ कोभु (ण - ड) व \\ + १/४ ठ इ कोभु (२ - २ठ - ण + ड) व \\ - १/४ ठ इ कोभु (ण + ड) व \\ - १/४ ठ इ कोभु (२ए - ण) व - ३ ल इ कोभु (२ए + ण) व \\ + १/४ ठ कोभु (१ - ठ) व - इ कोभुणव \end{array} \right\} \frac{\text{सूक}}{\text{सूव}} = \frac{१}{म}$$

४२७. ह्या वरच्या समीकरणाचें सकलन करावयाचें आहे. ह्या सकलनात चवथ्या पदवीपर्यंत निघणारी सर्व पदे पाहिजे आहेत. त्याकरितां सकलन गुणक तयार केलें पाहिजेत. त्यापैकी काही गुणक लेख ४०७ मध्ये केले आहेत. त्याचा एथे उपयोग करण्यास प्रतिवच काही नाही. कोभुज्येचें सकलन भुज्येने होते व सकलनाचें चिन्ह सकलनीय पदाचें चिन्हाप्रमाणे सकलन गुणावागच्या चिन्हां-नुरूप होते. कांही सकलन गुणक ४१० व्या लेखान नाहीं ते येथे करितों

$$(ण)^{-१} = (१ - ३ ठ - ३/४ ठ)^{-१} = १ + ३ ठ + ३/४ ठ^२$$

$$(२ण)^{-१} = १/२ (१ - ३ ठ)^{-१} = १/२ (१ + ३ ठ) = १/२ + ३/४ ठ$$

$$(२ए)^{-१} = १/२ (१ + ३ ठ)^{-१} = १/२ - ३/४ ठ$$

$$(ण - ड)^{-१} = (१ - ३ ठ - ठ)^{-१} = १ + ठ$$

$$\begin{aligned}
 (\eta + \zeta)^{-1} &= (1 - \frac{1}{2}\zeta^2 + \zeta)^{-1} & 1 - \zeta \\
 (2\epsilon - \eta)^{-1} &= (2 + \frac{1}{2}\zeta^2 - 1 + \frac{1}{2}\zeta^2)^{-1} &= 1 + \frac{1}{2}\zeta^2 \\
 (2\epsilon + \eta)^{-1} &= (2 + \frac{1}{2}\zeta^2 + 1 - \frac{1}{2}\zeta^2)^{-1} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\zeta^2 \\
 (1 - \zeta)^{-1} & &= 1 + \zeta
 \end{aligned}$$

प्रत्येक पदाचे सकलन करून ती पदे खाली लिहिली आहेत. १ याचे सकलन ब

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{aligned}
 & \text{ब} - 2\epsilon\mu\eta\zeta + \frac{1}{2}\epsilon^2\mu^2\eta\zeta + \frac{1}{2}\epsilon^2\mu^2\eta\zeta \\
 & - \frac{1}{2}\zeta^2\mu(2 - 2\zeta)\text{ब} - \frac{1}{2}\zeta^2\mu(2 - 2\zeta - \eta)\text{ब} \\
 & + 2\epsilon\mu\eta\zeta - (\frac{1}{2}\epsilon^2\mu^2 + \frac{1}{2}\zeta^2\epsilon^2)\mu\eta\zeta \\
 & - (\frac{1}{2}\zeta^2 - \frac{1}{2}\zeta^2\epsilon^2 - \frac{1}{2}\zeta^2\epsilon^2)\mu(2 - 2\zeta)\text{ब} \\
 & - \frac{1}{2}\epsilon^2\mu^2\eta\zeta - \frac{1}{2}\zeta^2\epsilon^2\mu(2 - 2\zeta - \eta)\text{ब} \\
 & + 2\zeta^2\mu(2 - 2\zeta + \eta)\text{ब} + \frac{1}{2}\zeta^2\mu(1 - \zeta)\text{ब} \\
 & - \frac{1}{2}\zeta^2\epsilon^2\mu(2 - 2\zeta - \zeta)\text{ब} \\
 & + \frac{1}{2}\zeta^2\epsilon^2\mu(2 - 2\zeta + \zeta)\text{ब} \\
 & - \frac{1}{2}\zeta^2\epsilon^2\mu(2 - 2\zeta - \eta - \zeta)\text{ब} \\
 & + \frac{1}{2}\zeta^2\epsilon^2\mu(2 - 2\zeta - \eta + \zeta)\text{ब} \\
 & - \frac{1}{2}\zeta^2\epsilon^2\mu(\eta - \zeta)\text{ब} + \frac{1}{2}\zeta^2\epsilon^2\mu(\eta + \zeta)\text{ब} \\
 & - \frac{1}{2}\epsilon^2\mu(2\epsilon - \eta)\text{ब} - \frac{1}{2}\epsilon^2\mu(2\epsilon + \eta)\text{ब}
 \end{aligned} \right. \\
 & \text{कम} = \left\{ \begin{aligned}
 & \text{[दुसरी आणि तिसरी पदवी]}
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

[तिगऱ्या पदवीची काही पदे कमी आहेत. ती ४५९ ह्या लेखान दिली आहेत.]



प्रकरण पंधरावे

सूक्ष्मतेची चवथी पदवी

(श) ची किंमत

४०८. चंद्रकक्षेची सूक्ष्मांश समीकरणे आता आपणाय चवथ्या पदवीने सोडवावयाची आहेत. सूक्ष्मतेची मर्यादा ह्या ग्रंथान चवथ्या पदवीपर्यंत न्यावयाची अशा मकेतानेच आरंभापासून प्रतिपादनाची आवणी केलेली आहे. पाश्चात्य गणितकाराच्या दृष्टीने ही सूक्ष्मता कमीच म्हणता येईल पण भारतीय गणितकाराच्या दृष्टीने ही सूक्ष्मता फारच फार आहे.

४२९. शराचे समीकरण चवथ्या पदवीपर्यंत सोडविले आहे पण त्यात थोडे न्यूनत्व राहिले आहे. ते आता घालवून समीकरण पूर्ण करू. ते न्यूनत्व हे आहे की, शराच्या सूक्ष्मांश समीकरणात पाचव्या पदवीची १ ह्या सहाये समीप केंद्रगुणाची पदे घेतली नाहीत. कारण (ग.) ची किंमत व्यक्त झाली नव्हती तरीच आणखी काही कारणे होती. ही पांचव्या पदवीची पदे आपणाला सोडावयाची आहेत.

प्रथम $\frac{\text{प्रश} - \text{प}}{\text{ज}^2 \text{व}^3}$ ह्या पदातील इष्टपदे शोधू. लेख ३७४ पहा त्यांत पदाची किंमत तीन पदांनी दाखविली आहे. ती पदे क्रमवार

$$(१) - \frac{१}{३} \frac{\text{श} \text{सव}^3}{\text{ज}^2 \text{व}^3} = - \frac{१}{३} \frac{\text{सव}^3}{\text{ज}^2 \text{व}^3} \times ३ \times \frac{\text{श}}{\text{व}}.$$

$$\frac{\text{श}}{\text{व}} = \text{श} \times \text{व}^{-1} = \text{श अ} \left\{ १ - \frac{१}{२} \frac{\text{कोमुणव}}{\text{व}} - \frac{१}{३} \frac{\text{ठ}^2}{\text{व}} - \frac{१}{४} \frac{\text{ल}^2}{\text{व}} + \dots \right\}^{-1}$$

$$\frac{१}{\text{व}} = \frac{१}{\text{अ}} \left\{ \begin{aligned} & १ - \frac{१}{२} \frac{\text{कोमुणव}}{\text{व}} + \frac{१}{३} \frac{\text{ठ}^2}{\text{व}} + \frac{१}{४} \frac{\text{ल}^2}{\text{व}} - \frac{१}{५} \frac{\text{कोमु}}{\text{व}} (२ - २४) \text{ व} \\ & + \frac{१}{६} \frac{\text{इ}^2}{\text{व}} + \frac{१}{७} \frac{\text{इ}^2}{\text{व}} \frac{\text{कोमु}}{\text{व}} + \frac{१}{८} \frac{\text{ल}^2}{\text{व}} \frac{\text{कोमु}}{\text{व}} \\ & - \frac{१}{९} \frac{\text{ठइ}}{\text{व}} \frac{\text{कोमु}}{\text{व}} (२ - २४ - ७) \text{ व} \dots \dots \dots (अ) \end{aligned} \right.$$

$$\text{श} = \left\{ \begin{aligned} & + \frac{\text{लमुएव}}{\text{व}} + \left(\frac{१}{३} \frac{\text{ठल}}{\text{व}} + \frac{१}{३} \frac{\text{ठल}}{\text{व}} \right) \frac{\text{मु}}{\text{व}} (२ - २४ - ७) \text{ व} \\ & + \frac{१}{२} \frac{\text{ठलइमु}}{\text{व}} (२ - २४ - ७ - ३) \text{ व} - \frac{१}{२} \frac{\text{ठलइमु}}{\text{व}} (७ - ३) \text{ व} \\ & - \frac{१}{३} \frac{\text{ठलइमु}}{\text{व}} (२ - २४ - ७ + ३) \text{ व} + \frac{१}{३} \frac{\text{ठलइमु}}{\text{व}} (७ + ३) \text{ व} \\ & \dots \dots \dots (ब) \end{aligned} \right.$$

(अ) आणि (ब) याचा गुणाकार निम्नच्या पदवीपर्यंत केला. तेव्हा

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned}
 & \text{लमुएव} + \frac{1}{2} \text{ ठल भु}(२ - २४ - \text{ए}) \text{ व} - \frac{1}{2} \text{ इल भु}(१ - \text{ण}) \text{ व} \\
 & \quad \quad \quad - \frac{1}{2} \text{ इल भु}(१ + \text{ण}) \text{ व} \\
 & + \frac{1}{2} \text{ ल}^३ \text{ भु३एव} + (\frac{1}{2} \text{ ठल} + \frac{1}{2} \text{ इल} + \frac{1}{2} \text{ ल}^३) \text{ भुएव} \\
 & + \frac{1}{2} \text{ ठलइं भु}(२ - २४ - \text{ए} - \text{ड}) \text{ व} - \frac{1}{2} \text{ ठलइं भु}(१ - \text{ड}) \text{ व} \\
 & - \frac{1}{2} \text{ ठलइं भु}(२ - २४ - \text{ए} + \text{ड}) \text{ व} + \frac{1}{2} \text{ ठलइं भु}(१ - \text{ड}) \text{ व} \\
 & + \frac{1}{2} \text{ ठलइं भु}(२ - २४ - \text{ए} - \text{ण}) \text{ व} \\
 & \quad \quad \quad - \frac{1}{2} \text{ ठलइं भु}(२ - २४ + \text{ए} - \text{ण}) \text{ व} \\
 & \frac{1}{2} \text{ ठल भु}(२ - २४ - \text{ए}) \text{ व} - \frac{1}{2} \text{ इल भु}(२\text{ण} - \text{ए}) \text{ व} \\
 & \quad \quad \quad + \frac{1}{2} \text{ इल भु}(२\text{ण} + \text{ए}) \text{ व} \\
 & - \frac{1}{2} \text{ ठलइं भु}(२ - २४ - \text{ए} + \text{ण}) \text{ व} \\
 & \quad \quad \quad - \frac{1}{2} \text{ ठलभु}(२ - २४ + \text{ए}) \text{ व.}
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

४३०. ह्यावर काढिलेल्या पदमघाने, प्र(२) व प्र(३) ह्या दोन पद-
साध्या गुणावयाचे आहे. हे पदमघ लेख ४०६ व ४०७ ह्यांमध्ये आहेत. ह्यांपैकी
प्र(२) पासून जो गुणाकार येईल त्याला ३ नी गुणावयाचे आहे. ह्या गुणाकाराने
पावल्या पदवीची मात्र पदे घ्यावयाची आहे, आणि ती अशी पाहिजेत की, ज्यांना वेद-
गुणक १ ह्या मंथ्येमधील आहे. ह्याप्रमाणे गुणाकार करून निघाळीची पदे एकत्र
लिहिली आहेत.

$$\begin{aligned}
 \frac{\text{प्रधा} - \text{प}}{\text{ज}^३ \text{ व}^३} = & \left\{ \begin{aligned}
 & + (\frac{1}{2} \text{ ठल} - \frac{1}{2} \text{ इल} - \frac{1}{2} \text{ ल}^३) \\
 & \quad \quad \quad - \frac{1}{2} \text{ ठलइं भुएव} \\
 & - (\frac{1}{2} \text{ ठल} - \frac{1}{2} \text{ ठलइं} - \frac{1}{2} \text{ ठल}^३) \\
 & \quad \quad \quad - \frac{1}{2} \text{ ठलइं भु}(२ - २४ - \text{ए}) \text{ व} \\
 & - \frac{1}{2} \text{ ठलइं भु}(२ - २४ - \text{ए} - \text{ड}) \text{ व} \\
 & \quad \quad \quad + \frac{1}{2} \text{ ठलइं भु}(१ - \text{ड}) \text{ व} \\
 & - \frac{1}{2} \text{ ठलइं भु}(२ - २४ - \text{ए} + \text{ड}) \text{ व} \\
 & \quad \quad \quad - \frac{1}{2} \text{ ठलइं भु}(१ - \text{ड}) \text{ व} \\
 & - \frac{1}{2} \text{ ठलइं भु}(२ - २४ - २\text{ण} + \text{ए}) \text{ व} \\
 & \quad \quad \quad + \frac{1}{2} \text{ ठलइं भु}(२\text{ण} - \text{ए}) \text{ व} \\
 & + \frac{1}{2} \text{ ठलइं भु}(२ - २४ - २\text{ण} - \text{ए}) \text{ व} \\
 & \quad \quad \quad + \frac{1}{2} \text{ ठलइं भु}(२ - २४ - ३\text{ए}) \text{ व} \\
 & + \frac{1}{2} \text{ ठलइं भु}(२ - २४ - \text{ए} - २\text{ड}) \text{ व} \\
 & \quad \quad \quad - \frac{1}{2} \text{ ठलइं भु}(१ - २\text{ड}) \text{ व} \quad \dots\dots(१)
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

४३१. शराच्या सूक्ष्मांश समीकरणान जें दुसरें पद आहे त्याला

$$\frac{\text{सूश}}{\text{सूव}} = \frac{\text{श}}{\text{व}} \frac{\text{सूव}}{\text{सूव}} \text{ हा गुणक आहे ह्या गुणकाची किंमत प्रथम तयार करूं.}$$

ह्या गुणकातील पदें तिसऱ्या पदवीपर्यंत पाहिजे आहेत. शून्यलब्धिगुण करितांना ण आणि ए यांच्या किंमती अनुक्रमे १ - १० आणि १ - १० ह्या घेतल्या पाहिजेत. प्रथम श चा सूक्ष्मांश गुण काढिला तो खाली दिल्याप्रमाणे आला

$$\text{श} = \text{लभुएव}; \quad \frac{\text{सूश}}{\text{सूव}} = \text{ल}(१ + १०^३) \text{ कोभुएव}$$

$$\text{श} = \frac{३}{४} \text{ ठल भु}(२ - २८ - \text{ए})\text{व};$$

$$\frac{\text{सूश}}{\text{सूव}} = \frac{३}{४} \text{ ठल}(१ - २८) \text{ कोभु}(२ - २८ - \text{ए})\text{व}$$

ह्याप्रमाणे प्रत्येक पदाचा सूक्ष्मांश गुण काढून याची एकत्र दिला आहे

$$\text{गुण सूव} = \left\{ \begin{array}{l} \text{ल कोभुएव} + \frac{३}{४} \text{ ठल कोभु}(२ - २८ - \text{ए})\text{व} \\ + \frac{३}{४} \text{ ठल कोभुएव} - \frac{३}{४} \text{ ठल कोभु}(२ - २८ - \text{ए})\text{व} \\ - \frac{३}{४} \text{ ठलइ कोभु}(२ - २८ - \text{ए} - ३)\text{व} \\ + \frac{३}{४} \text{ ठलइ कोभु}(१ + ३)\text{व} \\ - \frac{३}{४} \text{ ठलइ कोभु}(२ - २८ - \text{ए} - ३)\text{व} \\ - \frac{३}{४} \text{ ठलइ कोभु}(१ - ३)\text{व} \end{array} \right.$$

ह्या पद मंडाला — $\frac{\text{व}}{\text{शराव}}$ ह्याने गणून आले या गुणानंतर खाली शिहल्या

आहे.

$$-\frac{\text{न गुण}}{\text{शराव सूव}} = \left\{ \begin{array}{l} - \frac{३}{४} \text{ ठलभुएव} + \frac{३}{४} \text{ ठलइभु}(२ - २८ - ३)\text{व} \\ + (\frac{३}{४} \text{ ठल} - \frac{३}{४} \text{ ठल} + \frac{३}{४} \text{ ठलइ} - \frac{३}{४} \text{ ठलइल}) \\ \text{भु}(२ - २८ - \text{ए})\text{व} \\ + \frac{३}{४} \text{ ठलइ भु}(२ - २८ - \text{ए} - ३)\text{व} \\ - \frac{३}{४} \text{ ठलइभु}(१ - ३)\text{व} \\ - \frac{३}{४} \text{ ठलइभु}(२ - २८ - \text{ए} + ३)\text{व} \\ + \frac{३}{४} \text{ ठलइभु}(१ + ३)\text{व} \\ - \frac{३}{४} \text{ ठलइभु}(२ - २८ - २ण - \text{ए})\text{व} \\ + \frac{३}{४} \text{ ठलइभु}(२ - २८ - २ण + \text{ए})\text{व} \\ + \frac{३}{४} \text{ ठलइभु}(२ - २८ - \text{ए} - २३)\text{व} \end{array} \right.$$

४३२. व चा सूक्ष्मांश गुण दुमन्या पदवीपर्यंत तयार केला, तो असा

$$\begin{aligned} व &= १ + इकोभुणव + ठकोभु(२-२४)व \\ &\quad + ३लकोभरएव + ३३ठइ कोभु(२-२४-ण)व \\ सूव &= - इभुणव - २ठकोभु(२-२४) + ३लकोभु(२एव) \\ &\quad - ३३ठइ कोभु(२-२४-ण)व \end{aligned}$$

ह्यानें $\frac{श}{व}$ ह्या ४२९ व्या लेखांतील पदसंघाम गुणून त्या गुणाकाराम $\frac{त}{थजकोव}$ या पदाने गुणिलें तेव्हा गुणाकार खाली लिहिल्याप्रमाणे आला

$$\frac{त}{थजकोव} \times \frac{ग सूव}{व सूव} = \begin{cases} - ३३ठल भुएव & - ३३ठलकोभु(२-२४ ए)व \\ + ३३ठलकोभु(२-२४-२ए)व & \\ & + ३३ठलकोभु(२-२४-२ण-ए)व \\ - ३३ठलकोभु(२-२४-२ण+ए)व \end{cases}$$

तेव्हा

$$\frac{त}{थजकोव} \left(\frac{सूव}{सूव} - \frac{श}{व सूव} \right) =$$

$$\begin{cases} + ३३ठल भुएव & + ३३ठलकोभु(२-२४-३ए)व \\ + (३३ठल + ३३ठल + ३३ठल - ३३ठल) & \\ & भु(२-२४-ए)व \\ + ३३ठलकोभु(२-२४-ए-३)व & \\ & - ३३ठलकोभु(२-२४-ए+३)व \\ + ३३ठलकोभु(ए-३)व & \\ & + ३३ठलकोभु(२-२४-२ण+ए)व \\ - ३३ठलकोभु(ए+३)व & \\ & + ३३ठलकोभु(२-२४-२ण-ए)व \\ + ३३ठलकोभु(२-२४-ए-२३)व & \dots\dots(२) \end{cases}$$

४३३. शराच्या सूक्ष्मांश समीकरणांतील निगरे पद आणि तेंच शेवटचे खाली दिल्याप्रमाणे आहे. ह्या पदांच्या किमती तयार केलेल्या आहेत त्या घेऊन त्यापासून निघणारी पदे काढितो

$$- २ ठ \left(\frac{त}{थजकोव} \right) सूव \times \left\{ \frac{सूव}{सूव} + श \right\}$$

$$= २ \times \frac{३}{४} \theta^३ \sin \mu (२ - २\theta) \times \left\{ - \frac{३}{४} \theta^३ \sin \mu \text{ ए व } + \frac{३}{४} \theta^३ \sin \mu (२ - २\theta - \text{ए}) \text{ व } \right\}$$

$$= - \frac{३}{४} \theta^३ \sin \mu (२ - २\theta - \text{ए}) \text{ व } + \frac{३}{४} \theta^३ \sin \mu \text{ ए व } \quad \dots (३)$$

गूढमास समीकरणानं विकारी पदांनिवाय इतर सल्या स्थीर अमाच्या लागतान. चल असल्याम त्याचे चलन विकारी पदाने दाखवावे लागत. चंद्राचे वेद्र मन्निध्यान आणि राहु याच्या गति मागे दाखविल्या त्या मध्यमचंद्राच्या गतीने दाखविल्या आहेत. पण समीकरणांनं विकारी पद स्पष्टचंद्र आहे त्या स्पष्टचंद्राने दाखवू गेल्यास अत्यंत सूक्ष्म पदे उत्पन्न होतात. म्हणून तशी पदे शोधिली नाहीत. त्याप्रमाणे व आणि कम च्या समीकरणात ही असली पदे शोधिली नाही तरी सूक्ष्मतेला बाध येत नाही.

४३४. चंद्राच्या शराने गूढमास समीकरण पांचव्या पदवीपर्यंत सर्व तयार झाले आहे. त्याचे दोन भाग पाडिले आहेत. चवथ्या पदवीपर्यंत असा पहिला भाग तो ४१४ लेखानं दिला आहे. पाचव्या पदवीच्या भागाचे तीन पदसष्ट ४३०, ४३२ व ४३३ ह्या लेखात दिले आहेत. ते सर्व समीकरण एकत्र खाली लिहिले आहे

$$\left\{ \frac{\text{गूढमास}}{\sin \mu} + \text{श } \right\} =$$

$$\begin{aligned} & (- \frac{३}{४} \theta^३ \sin \mu + \frac{३}{४} \theta^३ \sin \mu + \frac{३}{४} \theta^३ \sin \mu - \frac{३}{४} \theta^३ \sin \mu - \frac{३}{४} \theta^३ \sin \mu \\ & \quad - \frac{३}{४} \theta^३ \sin \mu) \sin \mu \text{ ए व } \\ & (+ \frac{३}{४} \theta^३ \sin \mu - \frac{३}{४} \theta^३ \sin \mu - \frac{३}{४} \theta^३ \sin \mu + \frac{३}{४} \theta^३ \sin \mu \\ & \quad + \frac{३}{४} \theta^३ \sin \mu) \sin \mu (२ - २\theta - \text{ए}) \text{ व } \\ & (+ \frac{३}{४} \theta^३ \sin \mu - \frac{३}{४} \theta^३ \sin \mu) \sin \mu (२ - २\theta - \text{ए} - \text{ड}) \text{ व } \\ & \quad + (- \frac{३}{४} \theta^३ \sin \mu + \frac{३}{४} \theta^३ \sin \mu) \sin \mu (\text{ए} - \text{ड}) \text{ व } \\ & (- \frac{३}{४} \theta^३ \sin \mu - \frac{३}{४} \theta^३ \sin \mu) \sin \mu (२ - २\theta - \text{ए} + \text{ड}) \text{ व } \\ & \quad + (- \frac{३}{४} \theta^३ \sin \mu - \frac{३}{४} \theta^३ \sin \mu) \sin \mu (\text{ए} + \text{ड}) \text{ व } \\ & - \frac{३}{४} \theta^३ \sin \mu (२ - २\theta - \text{ए} - \text{ण}) \text{ व } \\ & \quad - \frac{३}{४} \theta^३ \sin \mu (२ - २\theta - \text{ए} + \text{ण}) \text{ व } \\ & + \frac{३}{४} \theta^३ \sin \mu (२ - २\theta + \text{ए} - \text{ण}) \text{ व } \\ & \quad - \frac{३}{४} \theta^३ \sin \mu (२ - २\theta + \text{ए} + \text{ण}) \text{ व } \\ & + \frac{३}{४} \theta^३ \sin \mu (\text{ए} - \text{ण}) \text{ व } + \frac{३}{४} \theta^३ \sin \mu (\text{ए} + \text{ण}) \text{ व } \end{aligned}$$

ह्याप्रमाणे सकलन गुणक घेऊन त्या प्रत्येक गुणकाने प्रत्येक पदाच्या गुणकास गुणून चवथ्या पदवीपर्यंत सर्व पदे एकत्र लिहिली आहेत

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned}
 & + \text{लमुएव} + (\text{३ठल} + \text{३३ठल}) \text{भु}(२ - २ठ - \text{ए}) \text{ व} \\
 & (- \text{३३३ठल} + \text{३३३ठल} + \text{३३३ठल}) \text{भु}(२ - २ठ - \text{ए}) \text{ व} \\
 & (+ \text{३ठलइ} + \text{३३३ठलइ}) \text{भु}(२ - २ठ - \text{ए} - \text{ड}) \text{ व} \\
 & (- \text{३ठलइ} - \text{३३३ठलइ}) \text{भु}(२ - २ठ - \text{ए} + \text{ड}) \text{ व} \\
 & (- \text{३ठलइ} + \text{३३३ठलइ}) \text{भु}(\text{ए} - \text{ड}) \text{ व} \\
 & (+ \text{३ठलइ} - \text{३३३ठलइ}) \text{भु}(\text{ए} + \text{ड}) \text{ व} \\
 & (+ \text{३३३ठल} - \text{३३३ठल}) \text{भु}(२ण - \text{ए}) \text{ व} \\
 & - \text{३३३ठलइ} \text{भु}(२ - २ठ - \text{ए} - \text{ण}) \text{ व} \\
 & \quad \quad \quad + \text{३३३ठलइ} \text{भु}(२ - २ठ - \text{ए} + \text{ण}) \text{ व} \\
 & - \text{३३३ठलइ} \text{भु}(२ - २ठ + \text{ए} - \text{ण}) \text{ व} \\
 & \quad \quad \quad + \text{३३३ठलइ} \text{भु}(२ - २ठ + \text{ए} + \text{ण}) \text{ व} \\
 & + \text{३३३ठलइ} \text{भु}(\text{ए} - \text{ण}) \text{ व} - \text{३३३ठलइ} \text{भु}(\text{ए} + \text{ण}) \text{ व} \\
 & - \text{३३३ठलइ} \text{भु}(२ - २ठ - २ण - \text{ए}) \text{ व} \\
 & \quad \quad \quad + \text{३३३ठलइ} \text{भु}(२ - २ठ - २ण + \text{ए}) \text{ व} \\
 & \text{३३३ठल} \text{भु}(२ - २ठ - ३ण) \text{ व} \quad \text{३३३ठलइ} \text{भु}(\text{ए} - २ड) \text{ व} \\
 & + \text{३३३ठलइ} \text{भु}(२ - २ठ - \text{ए} - २ड) \text{ व}
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

(ब) ची किंमत

४३७. चलत्रिज्येचे मूधमांस समीकरण आता आपणाला चवथ्या पदवीने सोडवावयाचे आहे. ह्या समीकरणात जी दोन पदे आहेत (लेख ३७३ पहा.) त्यांपैकी पहिले पद प्र प्रेरणेचें आहे आणि दुसरे पद २ - २ त प्रेरणेचें संकलन \times व चे मूधमांस समीकरण हें आहे. पहिल्या पदात ६ पोंट पदे आहेत त्यांस आपण अंक म्हणू. ह्या ६ अंकांपैकी आपणाला इष्ट असलेली पदे बहुतेक तयार आहेत. पण प्रत्येक अकामध्ये कांही कांही कमीपणा आहे. तो कमीपणा काढून एक एका अंकातील पदसंघ खाली लिहिले आहेत. ते क्रमवार खाली देतो.

४३८. प्र(१) हें पद लेख ४०५ मध्ये आहे. त्यांत - ३ (श_१) लमुएव - ३ (श_२) लमुएव आणि - ३ (श_३) ठलभु (२-२ठ-ए) व ह्या तीन अवयवात पदांच्या किंमती तयार करावयाच्या आहेत, असे दाखविणें आहे. त्यामधील - ३ (श_१) लमुएव याची व्यवस्त प्रश्नी आठ पदे ४१७ व्या लेखान तयार केली आहेत. तीं आठ पदे आणि - ३ (श_२) ल भु एव आणि - ३ (श_३) ठलभु (२ - २ठ - ए) व

४८२. प्र(४) आणि प्र(५) यांच्या किमती ४०८ व्या लेखांत तयार आहेत. ती पाच पदे आहेत ती जशीच्या तशीच समीकरणात घेणे आहे. आता प्र(६) ची किंमत तयार करूं. ह्या पदांत दोन अवयव आहेत. म्हणजे ते पद —

$$= \frac{त}{य ज^२ व^२} \times \frac{सू व}{सू व}$$

असे आहे. ह्यानील पहिल्या अवयवाची किंमत ४०९ व्या लेखान आहे. त्या पद-सघांत पहिले पद दुसऱ्या पदवीचे आहे म्हणून दुसऱ्या अवयवाची किंमत ३ व्या पदवीपर्यंत हवी आहे. ती तयार करूं.

$$व = अ (१ - \frac{१}{२}ल^२ - \frac{१}{३}ठ^२ + इ कोभु ण व + \dots \dots \dots इत्यादि.)$$

४८३ लेख पहा. याचा मूधमागुण तयार करू मूधमागुण तयार करिताना पदाच्या गुणकाला केदानील गुणकाने गुणावे लागते. हा गुणाकार करिताना ण, ए यांच्या किमती संकलनांत निघालेल्या ध्याव्या. जसे

$$\begin{aligned} \frac{सू}{सू व} (इ कोभु ण व) &= इ ण भु ण व - - (१ - \frac{१}{२}ल^२) इ भु ण व \\ &= - इ भु ण व + \frac{१}{२}ल^२ इ भु ण व \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{सू}{सू व} (-\frac{१}{३}ल^३ कोभु र ए व) &= + \frac{१}{३}ल^३ \times २ ए भु र ए व \\ &= + \frac{१}{३}ल^३ (१ + \frac{१}{३}ठ^२) भु र ए व \\ &= + \frac{१}{३}ल^३ भु र ए व \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{सू}{सू व} \{ \frac{१}{४}ल^४ कोभु (२ - २ठ) व \} &= - \frac{१}{४}ल^४ (२ - २ठ) भु (२ - २ठ) व \\ &= - \frac{१}{४}ल^४ भु (२ - २ठ) व + \frac{१}{४}ल^४ भु (२ - २ठ) व \end{aligned}$$

ह्याप्रमाणे मूधमागुण काढून निघत्या पदवीपर्यंत सर्व पदे खाली लिहिली आहेत

$$\begin{aligned} &[- इ भु ण व + \frac{१}{२}ल^२ भु र ए व - \frac{१}{४}ल^४ भु (२ - २ठ) व \\ &\quad + \frac{१}{२}ल^४ भु (२ - २ठ - ण) व - (\frac{१}{३}ल^३ - \frac{१}{३}ल^३ ठ^२) भु (२ - २ठ) व \\ &\quad + \frac{१}{३}ल^३ इ भु ण व - \frac{१}{३}ल^३ ठ^२ इ भु (२ - २ठ - ण) व \\ &\quad - \frac{१}{४}ल^४ ठ इ भु (२ - २ठ - ण + इ) व + \frac{१}{४}ल^४ ठ^२ भु (२ - २ठ + इ) व \\ &\quad - \frac{१}{४}ल^४ ठ इ भु (२ - २ठ - ण - इ) व - \frac{१}{४}ल^४ ठ^२ इ भु (२ - २ठ - इ) व \\ &\quad - \frac{१}{४}ल^४ ठ इ भु (ण - इ) व + \frac{१}{४}ल^४ ठ इ भु (ण + इ) व \\ &\quad + \frac{१}{४}ल^४ ठ भु (१ - ठ) व + \frac{१}{४}ल^४ ठ^२ भु (२ - २ठ + ण) व \end{aligned}$$

$$(२-२४-२७-३)^{-१} = -\frac{१}{३४} - \frac{३}{४}; (२-२४-२७+३)^{-१} = -\frac{१}{४} - \frac{३}{३४};$$

$$(१-४-७)^{-१} = \frac{१}{४} - \frac{३}{४}.$$

द्वितीया पदवीच्या पदांसाठी व तृतीया पदवीच्या पदांसाठी वांछी पाचव्या पदवीची पदे उत्पन्न होताना. ४०१ व्या लेखातील पदमघात्रे सकलतात ५ व्या पदवीची हात पदे निघावी आहेत तो ६ पदे खाकी लिहिती आहेत. ही पदे खालच्या सकलतांत मिळवून घेतली आहेत

$$-1-\frac{१}{४} ठ'इ कोमु(२-२४-२७) व \frac{३}{८} \frac{अ}{अ} ठ' कोमु(१-४) व$$

$$+ \frac{१}{४} \frac{१}{४} ठ' ल' कोमु(२-२४-२७) व + \frac{३६४४}{२५६} ठ'इ' कोमु(२-२४-२७) व$$

$$+ \frac{१}{२} ठ'इ' कोमु(२-२४-७-३) व - \frac{३}{४} ठ'इ' कोमु(२-२४-७+३) व$$

४४६. त प्रेरणेच्या पदांचे सकलन

$$\left\{ \begin{array}{l} १ \frac{१}{४} ठ'इ' कोमु(२-२४-२७) व \\ | १ \frac{१}{४} ठ'ल' कोमु(२-२४-२७) व \\ + १ \frac{१}{४} ठ'ल'इ' कोमु(२-२४-२७-३) व \\ \quad १ ठ'ल'इ' कोमु(२-२४-२७+३) व \\ १ \frac{१}{४} ठ'इ' कोमु(२-२४-२७-३) व \\ \quad १ \frac{१}{४} ठ'इ' कोमु(२-२४-२७+३) व \\ १ \frac{१}{४} अ' ठ'उ कोमु(१-४-७) व \\ १ \frac{१}{४} अ' ठ'उ कोमु(१-४-७) व \\ + १ \frac{१}{४} ठ'इ' कोमु(२-२४-२७) व \\ (१ ठ'इ' + १ ठ'उ + १ ठ'ल'इ - १ ठ'इ'इ) \\ \quad कोमु(२-२४-७) व \\ १ \frac{१}{४} ठ'इ'इ कोमु(२-२४-७-३) व + १ \frac{१}{४} ठ'इ'इ कोमु(७-३) व \\ - १ ठ'इ'इ कोमु(२-२४-७+३) व \\ + १ \frac{१}{४} ठ'इ'इ कोमु(७+३) व \\ - १ \frac{१}{४} ठ'ल'इ कोमु(२-२४-२७-७) व \\ + १ \frac{१}{४} ठ'ल'इ कोमु(२-२४-२७+७) व \\ - \frac{१}{८} \frac{अ}{अ} ठ'इ कोमु(१-४-३) व - \frac{३}{४} \frac{अ}{अ} ठ'इ कोमु(१-४+३) व \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{५१}{१६} \frac{अ}{अ} ठ^१ कोमु(१-ठ) व \\
& -\frac{५२}{१६} \frac{अ}{अ} ठ^२ कोमु(१-ठ-ण) व \\
& +\frac{५३}{१६} \frac{अ}{अ} ठ^३ कोमु(२-२ठ-२ण) व \\
& +\frac{५४}{१६} \frac{अ}{अ} ठ^४ कोमु(२-२ठ-२ए) व. \\
& -\frac{५५}{१६} \frac{अ}{अ} ठ^५ कोमु(२-२ठ-२ए-ड) व \\
& +\frac{५६}{१६} \frac{अ}{अ} ठ^६ कोमु(२-२ठ-२ए-ड) व. \\
& +\frac{५७}{१६} \frac{अ}{अ} ठ^७ कोमु(२-२ठ-२ण-ड) व \\
& -\frac{५८}{१६} \frac{अ}{अ} ठ^८ कोमु(२-२ठ-२ण-ड) व.
\end{aligned}$$

४४७. चलत्रिज्येच्या सूक्ष्मांश समांतरणातील दुसरें पद.

$$-२\frac{१}{२} \left(\frac{त}{य ज व} \right) सूव \times \left\{ \frac{सू व}{सू व} + व \right\} \frac{१}{अ}$$

हे आहे. ह्यात जे दोन अवयव आहेत, त्या दाह्याच्या किमती तयार आहेत, त्याचा गुणाकार करावयाचा आहे. हा गुणाकार पाचव्या पदकीयने करावयाचा आहे. गुणाकाराच्या सोईसाठी पहिला अवयव -(स) ह्या अक्षर चिन्हांने व दुसरा अवयव (प) ह्या चिन्हांने दाखविता तो वरचा गुणाकार मग पद $-२(स) \times (प) \times \frac{१}{अ}$

असा होतो. तसेच असेही घेऊ की,

$$(सं) = (सं_१) + (सं_२) + (सं_३) + (सं_४)$$

$$\text{आणि } (प) \frac{१}{अ} = १ + (प_१) + (प_२)$$

तेव्हा

$$-२(सं) \times (प) \frac{१}{अ} = -२(सं) + २(प_१)(सं_१)$$

$$+ २(प_२)(सं_२) + २(प_३)(सं_३)$$

ह्या उल्लेखारुन कळतें की, आपणाला तीन गुणाकार करावे लागतील. कारण वरच्या ४ पदांपैकी पहिलें पद $-२(सं)$ हे तयारच आहे. मात्र प्रत्येक पदाची दुप्पट घ्यावयाची आहे. ते ३ गुणाकार क्रमानें करूं (सं_२) यात एकच पद $-\frac{३}{१६} ठ^३ कोमु(२-२ठ) व$ हे आहे. आणि (प_२) मध्ये चार पदे आहेत. ४२० व्या लेखातील समांतरण पहा. तेव्हां

$$\begin{aligned}
+२(प_२)(सं_२) &= +\left(\frac{३}{१६} ठ^३ ल^१ - \frac{३}{१६} ठ^४\right) कोमु(२-२ठ) व \\
&+ \frac{३}{१६} ठ^५ + \frac{३}{१६} ठ^६ कोमु(४-४ठ) व
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} \text{ ठ'ल' कोभु (२-२४-२ए) व } - \frac{1}{2} \text{ ठ'ल' कोभु (२-२४-२ए) व} \\
& + २ (प_३) (स_३) - \frac{1}{2} \text{ ठ'इ कोभु (२-२४-ण) व } - \frac{1}{2} \text{ ठ'इ कोभुण व} \\
& \quad - \frac{1}{2} \text{ ठ'इ कोभुण व } + \frac{1}{2} \text{ ठ'इ कोभु ड व} \\
& \quad \frac{1}{2} \text{ ठ'इ कोभु ड व } - \frac{1}{2} \text{ ठ' - } \frac{1}{2} \text{ ठ'ल' } \\
& + २ (प_३) (स_३) - \frac{1}{2} \text{ ठ' - } \frac{1}{2} \text{ ठ'ल' कोभु (२-२४-२ए) व} \\
& \quad - (\frac{1}{2} \text{ ठ'ल'इ } + \frac{1}{2} \text{ ठ'इ) कोभु (२-२४-ण) व} \\
& \quad - \frac{1}{2} \text{ ठ'इ कोभुण व - } \frac{1}{2} \text{ ठ'इ कोभुण व} \\
& \quad + \frac{1}{2} \text{ ठ'इ कोभु ड व - } \frac{1}{2} \text{ ठ'इ कोभु ड व} \\
& - \frac{1}{2} \text{ ठ'ल'इ कोभु (२-२४-२ए-ण) व } - \frac{1}{2} \text{ ठ'ल'इ कोभु (२-२४-२ए-ण) व} \\
& - \frac{1}{2} \text{ ठ'ल'इ कोभु (२-२४-२ए-ड) व } - \frac{1}{2} \text{ ठ'ल'इ कोभु (२-२४-ए-ड) व} \\
& - (\frac{1}{2} \text{ ठ'ल' + } \frac{1}{2} \text{ ठ'ल'}) कोभु (२-२४-२ए) व \\
& \quad - (\frac{1}{2} \text{ ठ'ल' + } \frac{1}{2} \text{ ठ'इ) कोभु (२-२४-२ण) व.}
\end{aligned}$$

वर काढिलेली सर्व पदे खाली एकत्र लिहिर्ल; आहेत.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \text{ ठ'ल' } \\ \text{व} \\ + \\ \frac{1}{2} \text{ ठ'ल' } \\ \times \\ \left(\frac{1}{2} \text{ ठ'ल' } \right) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} - \text{त प्रेग्नेच्या सकलनाचं, दुपट लेव ४१० व ४४६.} \\ + \frac{1}{2} \text{ ठ' + } \frac{1}{2} \text{ ठ' कोभु (४-४४) व} \\ \quad + (\frac{1}{2} \text{ ठ'ल' + } \frac{1}{2} \text{ ठ'}) कोभु (२-२४) व} \\ - \frac{1}{2} \text{ ठ'ल' कोभु (२-२४-२ए) व} \\ \quad - \frac{1}{2} \text{ ठ'ल' कोभु (२-२४ + २ए) व} \\ - \frac{1}{2} \text{ ठ'इ कोभुण व} \\ \quad - (\frac{1}{2} \text{ ठ'इ + } \frac{1}{2} \text{ ठ'ल'इ) कोभु (२-२४-ण) व} \\ + \frac{1}{2} \text{ ठ'ल'इ कोभु (२-२४-२ए-ण) व} \\ \quad + \frac{1}{2} \text{ ठ'ल'इ कोभु (२-२४-२ए + ण) व} \\ + \frac{1}{2} \text{ ठ' - } \frac{1}{2} \text{ ठ'ल' + } \frac{1}{2} \text{ ठ'इ कोभु ड व} \\ - (\frac{1}{2} \text{ ठ'ल'इ , } \frac{1}{2} \text{ ठ'इ) कोभु (२-२४-२ण) व} \\ \quad + \frac{1}{2} \text{ ठ'ल'इ कोभु (२-२४-२ए + ड) व} \\ - (\frac{1}{2} \text{ ठ'ल' , } \frac{1}{2} \text{ ठ'ल'}) कोभु (२-२४-२ए) व} \\ \quad - \frac{1}{2} \text{ ठ'ल'इ कोभु (२-२४-२ए-ड) व.} \end{array} \right\}$$

४४८. चरित्रज्ञेच्या मृगज्ञेच (व) च्या मृगज्ञा समीकरणांमध्ये जी पदे येतात ती ४३८ व्या लेखापासून दहा लेखांमध्ये तयार केर्ल; आहेत. ती सर्व पदे एकत्र वरून खाली लिहिर्ल; आहेत. ही पदे पदवीच्या क्रमाने लिहिर्ली आहेत. त्यांत चरित्रज्ञा पदवीपर्यंत सर्व पदे आणि पाचव्या पदवीचीं १ मुख्य गर्भ, पंद्रहगुणांचीं

+ ३६ ठलं ई कोभु (२-२८-२ए-३) व — ३६ ठलं ई कोभु (२-२८-२ए+३) व
 + ३६ ठलं कोभु ४ ए व + ३६ ठलं कोभु (४-४८-२ए) व
 + (१६ ठलं ई + २६ ठलं ई + ३६ ठलं ई) १२ ठलं ई कोभु (२-२८-ण) व
 — १६ ठलं ई कोभु (२-२८-ण-२३) व — १६ ठलं ई काम (२-२८-ण-२३) व
 + २६ ठलं ई कोभु (२ए-ण) व — २६ ठलं ई कोभु (२-२८-३ण) व
 + ३६ ठलं ई कोभु (ण-३) व + ३६ ठलं ई कोभु (२-२८-ण-३) व
 + ३६ ठलं ई कोभु (ण+३) व + ३६ ठलं ई कोभु (२-२८-ण-३) व
 + ३६ ठलं ई कोभु (२-२८-३ए-ण) व — ३६ ठलं ई कोभु (१-३-३) व
 + ३६ ठलं ई कोभु (२-२८-२ए+ण) व — ३६ ठलं ई कोभु (१-३+३) व
 — (३६ ठलं ई + ३६ ठलं ई + ३६ ठलं ई + ३६ ठलं ई) कोभु (२-२८-२ए) व
 — ३६ ठलं ई कोभु (२ए-२ण) व
 + (३६ ठलं ई + ३६ ठलं ई) कोभु (१-२८-२ए) व
 — ३६ ठलं ई कोभु (२-२८-२ए-३) व + ३६ ठलं ई कोभु (२-२८-२ए+३) व
 + ३६ ठलं ई कोभु (२-२८-२ण-३) व — ३६ ठलं ई कोभु (२-२८-२ण-३) व
 + ३६ ठलं ई कोभु २३ व — ३६ ठलं ई कोभु (२-२८-२ए-२३) व
 ३६ ठलं ई कोभु (१-३-ण) व — ३६ ठलं ई कोभु (१-३) व
 + (३६ ठलं ई — ३६ ठलं ई — ३६ ठलं ई) कोभु ३ व

ह्या पद सप्त त प्रेक्षणेन मंजुलतायां दुष्पट शब्दां लागने त्याप्रमाण पांचव्या पदवी सकलताची दुष्पट मध्य घेतली गेली नाही. त प्रेक्षणेच्या ६ व्या पदवीच्या पदापासून जे पाचव्या पदवीचे सकल होईल त्याची दुष्पट घेतली पाहिजे. ती पदे पुढे तयार होतील.

८७. वरच्या सर्माकरणात स्थीर पदे निघाली आहेत ती अहं (१-३-केंद्रग भुमध्यं) स्थीर मध्येच अस्थीरत्व दाखविताना. आणि हे अस्थीरत्व चंद्र क्षेत्रात सूर्याच्या आकर्षणाने मिश्रत्व उत्पन्न झाल्यामुळे होते. त्या स्थीर सूर्यापैकी लहान पदाचा सूर्य काढून आणि चंद्राचे कक्षावृत्त यामुळे निर्यगत्वाची आहं आणि ठ त्या पदाचा संबंध सूर्याच्या चंद्रक्षेत्रात जाकपेक्षांनी आहे.

४५०. चलत्रिष्येच्या गूक्षमास सर्माकरणाने कोभुणव ह्या पदात अनेक गुणक आहेत आणि त्या गुणकाचा सूर्य चंद्राच्या केंद्र सन्निधानाच्या गतीशी

आहे. मग दोन वेळां ह्या सवधाविषयी विवेचन केले आहे. ३८९ वा लेख आणि ४२१ वा लेख पहा. त्याप्रमाणे एवढी ण ह्या गुणकार्या किंमत प्राप्त होते. कोमुणव ह्या पदाचे संकलन करावयाचे आहे. ह्या पदाच्या धड हा गुणक आहे असे घेऊं आता संकलन करावयाचे म्हणजे धड ह्या गुणकाच्या १-७^२ ह्याने भागावयाचे आहे. पण वैज्यभूमितीवरून ठरते की,

$$\text{इ} = \frac{\text{धड}}{१-७^२} ; १-७^२ = \text{ध}$$

$$\text{ण} = (१ - \text{ध})^{\frac{१}{२}}$$

किंवा

$$\text{ण} = १ - \frac{१}{२} \text{व} - \frac{१}{२} \text{ध}^२$$

वरच्या सूक्ष्मांम समीकरणात कोमुणव ह्या पदाच्या असलेल्या गुणक धड ने दाखविलेला आहे. त्यावरून ण ची किंमत जवळच्या पदवीपर्यंत मारली मिष्टिच्या-प्रमाणे येते

$$\text{ण} = १ - ३७ - \frac{३७^२}{२} - \frac{३७^३}{६} - \frac{३७^४}{२४} - \frac{३७^५}{१२०} - \frac{३७^६}{७२०} - \frac{३७^७}{५०४०}$$

४५१. वरच्या सूक्ष्मांम समीकरणाचे संकलन करण्याकरिता संकलनगुणक लेख ४०० मध्ये तयार केलेले आहेत. चवथ्या पदवीच्या गणितान पुढील सर्वान केद्राची पदे उत्पन्न झाली आहेत. त्यांपैकी ज्या पदाचे केद्रगुणक एव ह्या संख्ये समीप आहेत त्यांचे संकलनगुणक त्यांनी मिष्टिले आहेत. ज्या पदाचे केद्रगुणक ० ह्या संख्ये समीप आहेत त्यांचा संकलनगुणक +१ हा आहे असे समजावे. ज्या पदाचा केद्रगुणक ० किंवा १ ह्या संख्ये समीप नसून ० किंवा त्यापेक्षा जास्त असणाऱ्या संख्ये समीप असले तर त्या पदाचा संकलनगुणक मुख्य गणनेने करावा. मुख्यगणनेने गुणक कमीतला ण १, ए १ आणि ठ किंवा इ ० समजावे. म्हणजे केद्रगुणक पूर्णांक असलेले होईल. त्या पूर्ण संख्येचा वर्ग १ ह्या संख्येन वजा करून जी कृष्ण संख्या येईल, त्या संख्येने १ ह्या संख्येस भागिल्याने जो अपूर्णांक होईल तो संकलनगुणक होय. जसे (२-४०० ण) ह्यातल्य पूर्णांक संख्या ३ हिचा वर्ग +१ आहे तो १ ह्या संख्येन वजा केला तेव्हा बाकी ८ म्हणून १ हा संकलनगुणक होय. ह्याप्रमाणे संकलनगुणक करावे.

(१ ठ + इ) ह्या केद्राचा संकलनगुणक दिल्या नाही. मुख्यगणनेने तो १ असा येता. पण १ हा अनंत असा संख्या आहे. म्हणून हा संकलनगुणक असंभवनीय ठरता. पण हे पद असंभवनीय नाही. चव - ठव + घ - द. ही दोन्ही रवीची मदकट्टे आहेत. रवीच्या मदकेद्रातील द ही संख्या स्थिर नाही ती चल आहे. हिला वार्षिक ११ विकला धनगति आहे हे ह्याच संकलनगुणकांने

$$+ \frac{१६१}{४२} \text{ ठ ल }^३ \text{ इ कोमु (२ ए — ण) व } - \frac{४५}{३२} \frac{\text{अ}}{\text{अ}} \text{ ठ इ }^३ \text{ कोमु (१ — ठ — ड) व}$$

$$- \frac{१४७}{३२} \frac{\text{अ}}{\text{अ}} \text{ ठ }^३ \text{ कोमु (१ — ठ) व}$$

४२३ व्या लेखान व ची पाचव्या पदवीची तीन पदे खालच्या पदामध्ये धनर्ण केली आहेत.

$$+ (१६१ \text{ ठ ल }^३ + ६५ \text{ ठ ल }^३ \text{ इ} - १६१ \text{ ठ ल }^३ \text{ ड} - ३५ \text{ ठ }^३ \text{ ल }^३)$$

$$\text{कोमु (२ — २ ठ — २ ए) व.}$$

$$+ (१६१ \text{ ठ }^३ \text{ इ} - १६१ \text{ ठ ल }^३ \text{ इ}) \text{ कोमु (२ — २ ठ — २ ण) व.}$$

$$- ३५ \text{ ठ }^३ \text{ ल }^३ \text{ इ कोमु (२ — २ ठ — २ ए — ड) व}$$

$$+ ३५ \text{ ठ }^३ \text{ ल }^३ \text{ इ कोमु (२ — २ ठ — २ ए + ड) व.}$$

$$+ ३५ \text{ ठ }^३ \text{ इ }^३ \text{ कोमु (२ — २ ठ — २ ण — ड) व}$$

$$- ३५ \text{ ठ }^३ \text{ इ }^३ \text{ कोमु (२ — २ ठ — २ ण + ड) व.}$$

$$+ ३५ \text{ ठ ल }^३ \text{ इ }^३ \text{ कोमु (२ ए — २ ण) व } + \frac{३१}{३२} \frac{\text{अ}}{\text{अ}} \text{ ठ }^३ \text{ इ कोमु (१ — ठ — ण) व}$$

$$+ ३५ \text{ ठ }^३ \text{ इ }^३ \text{ ल }^३ \text{ कोमु २ ड व } - ३५ \text{ ठ }^३ \text{ इ }^३ \text{ ल }^३ \text{ कोमु (२ — २ ठ — २ ए — २ ड) व.}$$

$$- (१२ \text{ ठ }^३ \text{ इ} - १२ \text{ ठ }^३ \text{ ल }^३ \text{ इ} - ३५ \text{ ठ }^३ \text{ इ }^३ \text{ इ}) \text{ कोमु ड व.}$$

(ह्या पाचव्या पदवीच्या पदामध्ये 'त' प्रेरणेच्या सकलनाची शून्य केंद्रगुणाची पाचव्या पदवीच्या पदाची दृष्टी घ्यावी तेव्हा (४५) ची पाचव्या पदवीची 'वम' करिता आवश्यक असलेली पदे प्राप्त होतील.)

(कम) ची किंमत

४५२. कम चे मूळमात्र समीकरण आता आपण चवथ्या पदवीने सोडू. ४११ व्या लेखात जे कम चे सामान्य स्वरूपाचे मूळमात्र समीकरण आहे, त्यातील एक एक पद घेऊन त्याची व्यक्त किंमत तयार करून हे समीकरण लिहिले पाहिजे. ह्या सामान्य पदामध्ये व ची आणि त प्रेरणेच्या सकलनाची पदे आहेत. कम च्या चवथ्या पदवीकरिता चवथ्या पदवीची सर्व पदे आणि पाचव्या पदवीची ० समीप केंद्रगुणाची पदे गोळा करावी लागतील. त चे संकलन पाचव्या पदवीचे खेरीज करून बाकी सर्व पदे तयार झाली आहेत. संकलनाच्या पाचव्या पदवीकरिता त प्रेरणेची ६ व्या पदवीची पदे जमा केली पाहिजेत. हे कार्य आता आपणास करणे आहे. कम च्या सामान्य स्वरूपात आणि त च्या सामान्य स्वरूपात काही अवयव दोहोंत साधारण

आहेत, व्यासाले एक कार्य कर्मिनांना हुमरें मुलम होणे. म्हणून ही दोन्ही कार्ये सुरू करू. व्यासांठी कम च्या आणि न च्या पदाना क्रमांक देऊं. कम च्या चवथ्या पदवीच्या ५ (व.) ह्या पदाला प्रथम पद म्हणू. सामान्य स्वरूपान चवथ्या आणि पाचव्या पदवीची मिळून २६ पदे आहेत. न प्रेरणेंचे पद तयार करिनांना कम चे ही पद तयार करू.

६५३. न प्रेरणेंचे सामान्य स्वत्वा मागे दिलेले नाही. ते स्वरूप ३९९ व्या लेखानेंल (१५) [२] ह्या अंकी या पदमघ दिला आहे त्याला ३९६ व्या लेखानेंल (३) ह्या अंकाच्या पद समूहानें गुणित्याने वेईल. ३९९ व्या लेखानेंल पदमघाम ठंभ्य हा गणक आहे. व्याची व्यवन किमत ठं — ३ ठं इं + ३ ठं इं ही आहे तरी प्रथम ठं पदवाच गुणक घेऊन पदे मांडिता. आणि ३९६ व्या लेखानेंल पहिले पद मु (२ — २८) व हे गुणावयास घेता. म्हणजे १-ठं मु (२ — २८) व या पदानें गुणावयास आरम करितो.

(१) + ६ ठं मु (२ — २८) व (व.) या पासून निघालेली पदे.

+ (३ ठं इं) मु (२ — २८ — २९) व — (१ ठं लं + १ ठं इं ठं लं)
मु (२ — २८ — २९) व.

+ (१ ठं इं - १ ठं लं इं) मु ड व + १ ठं इं मु ड व.

— १ ठं लं इं मु (२ — २८ — २९ — ३) व

+ १ ठं लं इं मु (२ — २८ — २९ + ३) व.

(२) — १ ठं मु (२ — २८) (व.)त १

(व.) — १ ठं ; १ ठं कोमु २९ व + १ ठं कोमु ४९ व

ह्याला १ ठं मु (२ — २८) व यानें गुणित्याने

१ ठं मु (२ — २८ — २९) वत २

आणि + ५ नीं गुणित्याने, कम चीं पदे होतात.

+ १ ठं इं + १ ठं कोमु २९ व + १ ठं कोमु ४९ वकम १

(३) — १ ठं इं मु (२ — २८) व मु ड व (क.) (व.)

+ १ ठं इं मु (२ — २८ — २९ — ३) व.

— १ ठं इं मु (२ — २८ — २९ + ३) व.त ३

(४) १० ठं इं मु (२ — २८) व कोमु ड व (व.) इष्ट पद नाही.

(५) — १५ ठं भु (२ — २ ठ) व (व_१) (व_२).

$$\begin{aligned}
 + ३ (व_१) (व_२) \left\{ \begin{aligned}
 & - ३३ लं , १ ठं + १ ठं लं १३३ ठं इं \\
 & + ३३ ठं को भु (४ — ४ ठ) व + ३३ लं को भु ४ एव. \\
 & + ३३३ ठं इं को भु (४ — ४ ठ — २ ण) व + ३३ ठं इ को भु व \\
 & + (३ लं + ३ ठं लं) को भु २ ए व \\
 & + ३३ ठं इ को भु (४ — ४ ठ — १ ण) व \\
 & - (३ ठं लं ३ ठं) को भु (२ — २ ठ) व \\
 & - ३ ठं लं को भु (२ — २ ठ — २ ए) व \\
 & - (३३ ठं लं ३ ठं) को भु (२ — २ ठ — १ ण) व \\
 & - ३ ठं लं को भु (२ — २ ठ + २ ए) व. \\
 & - ३३ ठं लं इ को भु (२ — २ ठ — २ ए — १ ण) व \\
 & ३३ ठं लं इ को भु (२ — २ ठ — २ ए — १ ण) व. \\
 & + ३३ ठं लं इ को भु (२ — २ ठ — २ ए — १ ण) व कम ३
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

ह्या पदमवाका—५ ठं भु (२ — २ ठ) व ह्या पदाने गुणिते म्हगजे त
प्रेरणेची ६ व्या पदवीची पदे मिळतील

$$\begin{aligned}
 & + ३३३ ठं इं को भु (२ — २ ठ — २ ण) व \\
 & - (३३ ठं लं + ३ ठं लं) को भु (२ — २ ठ — २ ए) व .. त ५
 \end{aligned}$$

(६) — ३० ठं भु (२-२ ठ) व (व_१) (व_२)

$$\begin{aligned}
 + ६ (व_१) (व_२) \left\{ \begin{aligned}
 & + (३३ ठं इ — ३३ ठं लं इ) को भु (२-२ ठ-१ ण) व \\
 & \quad - ३३ ठं इ को भु (२-२ ठ) व \\
 & + (३३ ठं इ — ३३ ठं लं इ) को भु (२-२ ठ + १ ण) व \\
 & \quad - ३३ ठं इ को भु (२-२ ठ + २ ण) व \\
 & + (३३ ठं इ को भु (२-२ ठ-१ ण) व \\
 & \quad + ३३ ठं इ को भु (२-२ ठ-३ ण) व \\
 & + ३३ ठं इ को भु (२-२ ठ-१ ण) व - ३३ ठं इ को भु (२ ण-२ ड) व \\
 & + ३३ लं इ को भु २ ए व - ३३ लं इ को भु (२ ए-२ ण) व \\
 & \quad - ३३ ठं इ को भु (२ ण + २ ड) व \\
 & + ३३ ठं लं इ को भु (२-२ ठ-२ ए-१ ण) व \\
 & \quad + ३३ ठं लं इ को भु (२-२ ठ-२ ए + १ ण) व \\
 & + ३३ ठं इ को भु (२-२ ठ-१ ण-३ व) \\
 & \quad + ३३ ठं इ को भु (२ ण-३ व)
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{2} \text{ ठइइं कोभु } (२-२ \text{ ण } + \text{ ण-ड }) \text{ व} \\
& \quad - \frac{3}{2} \text{ ठइइं कोभु } (२ \text{ ण } + \text{ ड }) \text{ व} \\
& - \frac{3}{2} \text{ ठइइं कोभु } (२-२ \text{ ठ-ण } + \text{ ड }) \text{ व} \\
& \quad - \frac{3}{2} \text{ ठइइं कोभु } (२-२ \text{ ठ } + \text{ ड }) \text{ व} \\
& - \frac{3}{2} \text{ ठइइं कोभु } (२-२ \text{ ठ } + \text{ ण } + \text{ ड }) \text{ व} \\
& \quad + \frac{3}{2} \text{ ठइइं कोभु } (२-२ \text{ ठ-ड }) \text{ व} \\
& + \frac{1}{2} \text{ ठइइं कोभु } (२-२ \text{ ठ-२ण-ड }) \text{ व} \\
& \quad - \frac{1}{2} \text{ अं ठइ कोभु } (१-ठ-ण) \text{ व} \\
& - \frac{1}{2} \text{ ठइइं कोभु } (२-२ \text{ ठ-२ ण } + \text{ ड }) \text{ व} \\
& \quad - \frac{1}{2} \text{ अं ठइ कोभु } (१-ठ + \text{ ण }) \text{ व} \dots \text{ कत ५}
\end{aligned}$$

वरुया पदसंघाला - ५ ठं भु (२-० ठ) हयानें गुणिल्यानं.

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} \text{ ठं लइं भु } (२-२ \text{ ठ-२ ए }) \text{ व} - \frac{1}{4} \text{ ठं लइं भु डव} \\
& - \frac{1}{4} \text{ ठं लइं भु } (२-२ \text{ ठ-२ ण } + \text{ ड }) \text{ व} \\
& \quad + \frac{1}{4} \text{ अं ठं लइं भु } (१-ठ-ण) \text{ व} \\
& + \frac{1}{4} \text{ ठं लइं भु } (२-२ \text{ ठ-२ ण-ड }) \text{ व} \\
& - \frac{1}{4} \text{ ठं लइं भु } (२-२ \text{ ठ-२ ण } + \text{ २ ड }) \text{ व} \\
& \quad + \frac{1}{4} \text{ ठं लइं भु } (२-२ \text{ ठ-२ ण-२ ड }) \text{ व} \dots \text{ त ६}
\end{aligned}$$

$$(७) + १८ \text{ ठं लइं भु } (२-२ \text{ ठ }) \text{ कोभुडव (व}_1\text{).}$$

$$+ १८ \text{ ठं लइं भु डव} \dots \text{ त ७}$$

(८) + १० ठं भु (२-२ ठ) व (व_१)^३ (व_२). हया पदांत दोन अवयव आहेत ते अये - १२ (व_१)^३ (व_२) हा एक गणि द्वयगा - $\frac{3}{2}$ ठं भु (२-२ ठ) व. पहिला अवयव कम चे दुसरें पद आहे तो प्रथम तयार करू.

$$- १२ (व_1)^3 (व_2) = - ६ इं (व_2) - ६ इं (व_2) \text{ कोभु २ ण व.}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{aligned}
& + \frac{3}{2} \text{ लं इं } - ३ \text{ ठं इं } - ६ \text{ ठं इं कोभु } (२-२ \text{ ठ }) \text{ व} \\
& + \frac{3}{2} \text{ लं इं कोभु २ एव } - (\frac{3}{2} \text{ लं इं } ३ \text{ ठं इं) कोभु २ ण व} \\
& - ३ \text{ ठं इं कोभु } (२-२ \text{ ठ-२ ण }) \text{ व} \\
& \quad - ३ \text{ ठं इं कोभु } (२-२ \text{ ठ } + २ ण) \text{ व} \\
& = \left\{ \begin{aligned}
& + \frac{3}{2} \text{ लं इं कोभु } (२ \text{ ए-२ ण }) \text{ व} \\
& \quad + \frac{3}{2} \text{ लं इं कोभु } (२ \text{ ए } + २ ण) \text{ व}
\end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} - \frac{1}{4} \text{ ठइ}^1 \text{ कोभु } (२-२ठ+ण) \text{ व} \\ \quad \quad \quad - \frac{1}{4} \text{ ठइ}^1 \text{ कोभु } (२-२ठ-३ण) \text{ व} \\ - \frac{1}{4} \text{ ठइ}^1 \text{ कोभु } (२-२ठ-ण) \text{ व} \quad \quad \quad \text{कम} \end{array} \right.$$

ह्या पदसंघाला — $\frac{1}{2} \text{ ठ}^1 \text{ भु } (२-२ठ) \text{ व}$ नें गुणिले तेव्हां

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{4} \text{ ठ}^1 \text{ ल}^1 \text{ इ}^1 \text{ भु } (२-२ठ-२ए) \text{ व} \\ & - \left(\frac{1}{8} \text{ ठ}^1 \text{ ल}^1 \text{ इ}^1 + \frac{1}{4} \text{ ठ}^1 \text{ इ}^1 \right) \text{ भु } (२-२ठ-२ण) \text{ व} \\ & \dots \text{ त ८} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (९) & + \frac{1}{2} \text{ ठ}^1 \text{ इ}^1 \text{ भु } (२-२ठ) \text{ व भुडव } (क_१) \\ & + \frac{1}{8} \text{ ठ}^1 \text{ इ}^1 \text{ इ}^1 \text{ भु } (२-२ठ-२ण+ड) \text{ व} \\ & \quad \quad \quad - \frac{1}{8} \text{ ठ}^1 \text{ इ}^1 \text{ इ}^1 \text{ भु } (२-२ठ-२ण-ड) \text{ व} \\ & + \frac{1}{8} \text{ ठ}^1 \text{ ल}^1 \text{ इ}^1 \text{ भु } (२-२ठ-२ए+ड) \text{ व} \\ & \quad \quad \quad - \frac{1}{8} \text{ ठ}^1 \text{ ल}^1 \text{ इ}^1 \text{ भु } (२-२ठ-२ए-ड) \text{ व} \\ & - \frac{1}{8} \text{ ठ}^1 \text{ इ}^1 \text{ भु डव} \quad \dots \text{ त ९} \end{aligned}$$

(१०) — $\frac{1}{8} \text{ ठ}^1 \text{ इ}^1 \text{ भु } (२-२ठ) \text{ व कोभुडव } (व_१) (व_२) \text{ पद नाही.}$

$$\begin{aligned} (११) & - \frac{1}{8} \text{ ठ}^1 \text{ इ}^1 \text{ भु } (२-२ठ) \text{ व } (व_१) \\ & + \frac{1}{4} \text{ ठ}^1 \text{ ल}^1 \text{ इ}^1 \text{ भु } (२-२ठ-२ए) \text{ व} \quad \dots \text{ त ११} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (१२) & + \frac{1}{8} \text{ ठ}^1 \text{ इ}^1 \text{ भु } (२-२ठ) \text{ व} \times \left(\frac{1}{2} \text{ इ}^1 + \frac{1}{2} \text{ इ}^1 \text{ कोभुरणव } \right) \\ & + \frac{1}{4} \text{ ठ}^1 \text{ इ}^1 \text{ इ}^1 \text{ भु } (२-२ठ-२ण) \text{ व} \quad \dots \text{ त १२} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (१३) & + \frac{1}{8} \text{ ठ}^1 \text{ इ}^1 \text{ भु } (२-२ठ) \text{ व} \times (व_१) \text{ कोभुर डव} \\ & - \frac{1}{8} \text{ ठ}^1 \text{ ल}^1 \text{ इ}^1 \text{ भु } (२-२ठ-२ए-२ड) \text{ व} \\ & \quad \quad \quad - \frac{1}{8} \text{ ठ}^1 \text{ ल}^1 \text{ इ}^1 \text{ भु } (२-२ठ-२ए+२ड) \text{ व} \quad \text{त १३} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (१४) & - \frac{1}{8} \text{ ठ}^1 \text{ इ}^1 \text{ भु } (२-२ठ) \text{ व कोभुर डव} \times \\ & \quad \quad \quad \left(\frac{1}{2} \text{ इ}^1 + \frac{1}{2} \text{ इ}^1 \text{ कोभुरणव } \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{8} \text{ ठ}^1 \text{ इ}^1 \text{ इ}^1 \text{ भु } (२-२ठ-२ण-२ड) \text{ व} \\ & \quad \quad \quad - \frac{1}{8} \text{ ठ}^1 \text{ इ}^1 \text{ इ}^1 \text{ भु } (२-२ठ-२ण+२ड) \text{ व} \quad \text{त १४} \end{aligned}$$

४५४. त प्रेरणेच्या ८ व्या पदवीचा पदे ज्या दोन पदसंघांच्या गुणाकारानें प्राप्त व्हावयाची त्यापैकी भु (२ व—२ वं) ह्याच्या विस्तारातील पद पंक्ती पहिले पद भु (२—२ठ) व यानें ३९९ व्या लेखातील (१५) [२] यास गुणून वरच्या लेखांत इष्ट पदे काढिली. आता भु (२ व—२ वं) ह्याच्या विस्तारातील दुसरें

आणि तिसरें पद अनुक्रमे—२ ई भु (२—२ठ+ड) व आणि
 + २ ई भु (२—२ठ—ड) व ह्या पदानां गुणन डट्ट पदे काढू. नी क्रमवार.

$$(१) अ - १२ ठ ई भु (२ - २ठ + ड) व \times (व_१)$$

$$- २१ ठ ई भु २ डव$$

... त १५

$$(१) व + १२ ठ ई भु (२ - २ठ - ड) व \times (व_१)$$

$$+ ३० ठ ई भु २ डव$$

... त १६

(२) (३) + ३० (व_१) ई आणि—१ (व_१) ई यापामून पद प्राप्त
 होत नाही.

$$(४) अ + ३६ ठ ई भु (२ - २ठ + ड) व \times (व_१) को भुडव$$

$$= - १८ (व_१) ठ ई \{ भु (२ - २ठ)$$

$$- भु (२ - २ठ + २ड) व \}$$

$$- १८ ई भु २ डव + ३६ ठ ई भु (२ - २ठ - २ए) व$$

$$+ ३६ ठ ई भु (२ - २ठ - २ए + २ड) व$$

... त १७

$$(४) व + ३६ ठ ई भु (२ - २ठ - ड) व \times (व_१) को भुडव$$

$$+ १८ ठ ई (व_१) \{ भु (२ - २ठ) व$$

$$+ भु (२ - २ठ - २ड) व \}$$

$$- १८ ई भु २ डव - ३६ ठ ई भु (२ - २ठ - २ए) व$$

$$- ३६ ठ ई भु (२ - २ठ - २ए - २ड) व$$

... त १८

$$(५) + ३६ (क_१) ई भुडव$$

पद नाही

$$(६) अ + ९० ठ ई भु (२ - २ठ + ड) को भुडव (व_१) ई$$

$$+ \frac{५५}{४} ठ ई ई भु (२ - २ठ - २ए) व$$

$$+ \frac{५५}{४} ठ ई ई भु (२ - २ठ - २ए + २ड) व$$

$$(६) व - \frac{५५}{४} ठ ई ई भु (२ - २ठ - २ए) व$$

$$- \frac{५५}{४} ठ ई ई भु (२ - २ठ - २ए - २ड) व$$

त १९-२०

$$(७) + २७ (व_१) ई को भुडव$$

पद नाही.

$$(८) अ + ६० ठ ई भु (२ - २ठ + ड) व (व_१) (व_१)$$

$$+ ३० ठ ई ई भुडव$$

$$(८) व + ३० ठ ई ई भुडव$$

त २१-२२

आतां—४ ई' भु (२—२ठ) व ह्या पदाने, ले. २९९ (१५) [२] ह्या पद सघास गुणावयाचे.

- (९) — २४ ठ' ई' भु (२—२ठ) व (व_१)
 + ३ ठ' ल' ई' भु (२—२ठ—२ए) व त २३
- (१०) — ६० ठ' ई' भु (२—२ठ) व (३ ई' + ३ ई' को भुरणव)
 + १५ ठ' ई' ई' भु (२—२ठ—२ण) त २४
- (११) अ + ३ ठ' ई' भु (२—२ठ + २ड) व × (व_१)
 + ३ ठ' ई' भुरड व — ३ ठ' ल' ई' भु (२—२ठ—२ए + २ड) व
- (११) ब + ३ ठ' ई' भु (२—२ठ—२ड) व × (व_१)
 — ३ ठ' ई' भुरड व — ३ ठ' ल' ई' भु (२—२ठ—२ए—२ड) व त २५—२६
- (१२) अ — ४ ठ' ई' भु (२—२ठ + २ड) व
 (३ ई' + ३ ई' को भुरणव)
 — ३ ठ' ल' ई' भु (२—२ठ—२ए + २ड) व
- (१२) ब — ३ ठ' ई' भु (२—२ठ—२ड) व (३ ई' + ३ ई' को भुरणव)
 — ३ ठ' ल' ई' भु (२—२ठ—२ए—२ड) व त २७—२८
- (१३) — ३६ ठ' ई' को (२—२ठ) व को भुड व (क_१) (व_१)
 + ३६ ठ' ई' ई' को भु (२—२ठ) व को भुड व भुरण व
 = — ९ ठ' ई' इ भु (२—२ठ—२ए + २ड) व
 — ९ ठ' ई' ई' भु (२—२ठ—२ए—२ड) व त २९

४५५. वरच्या गुणाकारान, भु (२व—२ब) च्या दुसऱ्या पदवीपर्यंतच्या सर्व पदानां ३९९ (१५) [२] च्या पदानां गुणिले. आता राहिलेल्या ३ पदानां म्हणजे — ३ ठ' + ६ ठ' (व_१) — ३ ठ' ई' को भुड व ह्या पदानां भुर (व—व) याच्या पदविस्तारातील पदानां गुणू

- (१४) + ९ ठ' ई' को भु (२—२ठ) को भुड व (क_१)
 — ३ ठ' ई' ई' भु (२—२ठ—२ए) व × को भुड व
 — ३ ठ' ल' ई' भु (२—२ठ—२ए) व × को भुड व
 — ३ ठ' ई' ई' भु (२—२ठ—२ए—२ड) व
 — ३ ठ' ल' ई' भु (२—२ठ—२ए + २ड) व

- $\frac{1}{2}$ ठ^३ ल^३ इ^३ मु (२—२ठ—२ए—ड) व
 — $\frac{1}{2}$ ठ^३ ल^३ इ^३ मु (२—२ठ—२ए+ड) व . त ३०
- (१५) — १ ठ^३ इ^३ को भु (२—२ठ+ड) व को भु ड व (क_१) पद नाही.
 (१६) + २७ ठ^३ इ^३ को भु (२—२ठ—ड) व को भु ड व (क_१) पद नाही.
 (१७) — १२ ठ^३ को भु (२—२ठ) व (व_१) (क_२) पद नाही
 (१८) + १२ ठ^३ इ^३ को भु (२—२ठ+ड) व × (क_१) (व_१)
 + ६ ठ^३ इ^३ मु (२—२ठ—२ण+ड) व . त ३१
- (१९) — ३६ ठ^३ इ^३ को भु (२—२ठ—ड) व × (क_१) (व_१)
 — १८ ठ^३ इ^३ मु (२—२ठ—२ण—ड) व . त ३२
- (२०) + ३ ठ^३ को भु (२—२ठ) व × (क_१)
 + $\frac{३७}{२}$ ठ^३ इ^३ मु ड व + $\frac{३३}{२}$ ठ^३ इ^३ मु ड व . त ३३
- (२१) + ३ ठ^३ भु (२—२ठ) × ४ इ^३ भु^३ ण व
 — ३ ठ^३ इ^३ भु (२—२ठ—२ण) व . त ३४
- (२२) — ३ ठ^३ इ^३ को भु (२—२ठ+ड) व (क_१)
 + $\frac{३}{२}$ ठ^३ इ^३ इ^३ मु (२—२ठ—२ण+ड) व
 + $\frac{३}{२}$ ठ^३ ल^३ इ^३ मु (२—२ठ—२ए—ड) व
 — $\frac{३}{२}$ ठ^३ इ^३ मु ड व . त ३५
- (२३) + ६ ठ^३ इ^३ को भु (२—२ठ—ड) व (क_१)
 — $\frac{३}{२}$ ठ^३ इ^३ इ^३ मु (२—२ठ—२ण—ड) व
 — $\frac{३}{२}$ ठ^३ ल^३ इ^३ मु (२—२ठ—२ए—ड) व
 + $\frac{३३}{२}$ ठ^३ इ^३ मु ड व . त ३६

पुढच्या दोन पदांत इष्ट पद नाही.

४५६. लेखाक ३९९ मध्ये जो २५ हा गुणक आहे, त्याचे व्यवन स्वरूप (ठ^३—३ ठ^३ इ^३ + ३ ठ^३ इ^३) असे आहे. ह्यात ज्या तीन संख्या आहेत त्यापैकी ठ^३ घेऊन वरच्या लेखांमधील पदे काढिली. आता — ३ ठ^३ इ^३ आणि + ३ ठ^३ इ^३ हे गुणक घेऊन पदे काढू.

- (२४) — १८ ठ^३ इ^३ मु (२—२ठ) व (व_२)
 + $\frac{३}{२}$ ठ^३ ल^३ इ^३ मु (२—२ठ—२ए) व . त ३७
- (२५) + ४५ ठ^३ इ^३ मु (२—२ठ) व (व_१)
 + $\frac{४५}{२}$ ठ^३ इ^३ मु (२—२ठ—२ण) व . त ३८

गुणक मुख गणनेने तयार करावा. त्यात ए—ण—१ आणि ड—ठ घ्यावा. या-
प्रमाणे कृती करून आलेले संकलन खाली लिहिले आहे. ४६८ व्या लेखाने ते त प्रेरणेने
संकलन आहे त्यातील शेवटची यात पदे पाचव्या पदवीची ही खालच्या पदात मिळवा-
वयाची आहेत. त्या पदामुद्धा वरच्या पदमवाचे संकलन खाली लिहिले आहे.

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\text{त}}{(\text{थ ज }^3 \text{ व }^3)} \text{ सूब} = \\
 & + (1^1 \text{ ठ ड }^3 + \frac{1^3 3^3}{1^3} \text{ ठ ड }^3 \text{ ल }^3 - \frac{1^3 3^3 3^3}{1^3} \text{ ठ ड }^3 \text{ ल }^3 \text{ इ }^3) \\
 & \quad (२ - २ठ - २ण) ब \\
 & + (1^1 \text{ ठ ल }^3 - \frac{1^3 3^3}{1^3} \text{ ठ ल }^3 + \frac{1^3 3^3}{1^3} \text{ ठ ल }^3 \text{ इ }^3 - \frac{1^3 3^3}{1^3} \text{ ठ ल }^3 \text{ इ }^3) \\
 & \quad \text{कोमु (२ - २ठ - २ए) ब} \\
 & + (\frac{1^3 3^3}{1^3} \text{ ठ ड }^3 \text{ इ }^3 + \frac{1^3 3^3}{1^3} \text{ ठ ल }^3 \text{ इ }^3 - \frac{1^3 3^3}{1^3} \text{ ठ ड }^3 \text{ इ }^3 \text{ ल }^3) \text{ कोमु ड व} \\
 & - \frac{1^3 3^3}{1^3} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} \text{ ठ ड इ कोमु (१ - ठ - ण) ब} \\
 & \quad + २१ \text{ ठ ड इ कोमु २ ड ब} \\
 & + \frac{1^3 3^3}{1^3} \text{ ठ ड इ कोमु (२ - २ठ - २ण - ड) व} \\
 & + \frac{1^3 3^3}{1^3} \text{ ठ ड इ कोमु (२ - २ठ - २ण - ड) व} \\
 & + \frac{1^3 3^3}{1^3} \text{ ठ ल ड कोमु (२ - २ठ - २ए - ड) व} \\
 & + \frac{1^3 3^3}{1^3} \text{ ठ ल इ कोमु (२ - २ठ - २ए + ड) ब} \\
 & + \frac{1^3 3^3}{1^3} \text{ ठ ड इ कोमु (२ - २ठ - २ण - २ड) ब} \\
 & + \frac{1^3 3^3}{1^3} \text{ ठ ल इ कोमु (२ - २ठ - २ए - २ड) व} \\
 & + \frac{1^3 3^3}{1^3} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} \text{ ठ ड इ कोमु (१ - ठ - ण - ड) व}
 \end{aligned}$$

[पाचवी पदवी]

४४८ व्या लेखानांतराल (व) च्या मूधमाय समोकरणांत वरच्या पदमवाची
दुण्ट घेणे. आणि तीच दुण्ट (व) च्या किमतीत म्हणजे ४५१ व्या लेखाने शेवटची
घेणे म्हणजे व ची पाचवी पदवी ० केंद्रगुणाची तयार होईल.

वरच्या संकलनातील तीन पदांचे संकलन करितां येत नाही कारण ही पदे
६ व्या पदवीतील वेचून घेतलेली आहेत. शिवाय त्यांचे केंद्रगुणक गुण्याच्या अति-
सन्निय आहेत. ठ—ड याची किमत्त शून्य नाही ए ण—१—१ नाही अनेक पदाच्या
वजाबाकी आहेत म्हणून २—२ठ—२ण—२ड; २—२ठ—२ए—२ड;
१—ठ—ण—ड ह्या केंद्रगुणाची पदे गळली.

४५८. ४२४ व्या लेखांत कम ची निमच्या पदवींची पदे तयार केली आहेत. त्यांत कम च्या सामान्य स्वहत्वाची जी पदमाला आहे त्यांतील—२ (व_१) ह्यापासून पदे घेताना ती ४१६ लेखातील घेतली पण ४५१ ह्या लेखान (व_३) ची पदे काही जास्त निघाली आहेत. ती कम च्या मर्यादकरणान घेतली पाहिजेत त्यास कम (अ) म्हणू.

$$\begin{aligned} & - \frac{3}{4} \text{ इ }^3 \text{ को मु (ण - २८) ब } + \frac{3}{4} \text{ इ }^3 \text{ को मु (ण + २८) ब } \\ & + \frac{3}{4} \text{ इ }^3 \text{ को मु (२ - २८ - ण + २८) ब } \\ & + \frac{3}{4} \text{ इ }^3 \text{ को मु (२ ए - ण) ब } \quad \dots \text{ कम अ.} \end{aligned}$$

४५९ कम ची १, २, ३ आणि ५ ह्या श्रकांची पदे निघाली आहेत. ४ ह्या श्रकाची—२ (व_२) ही पदे आहेत. ही ४५१ ह्या लेखान आहेत. त्यांतील चवथ्या पदवीच्या—२ती गुणन येतील ती समजावी. कम च्या ६ व्या अंकी + (म_२) ही पदे आहेत. ही ६१० व्या लेखात आहेत. तेव्हा ४ व ६ या अंकांची एथे लिहिण्यात विशेष नाही पणुणान कनिष्ठाना वरच्या स्थानची घेऊ जाता ७ व्या अंकापासून कम ची पदे घेऊ.

$$(७) + \frac{3}{4} (ग.) (म.) = + \frac{3}{4} \text{ ठ }^3 + \frac{3}{4} \text{ ठ }^3 \text{ को मु (६ - ६८) ब } \quad \dots \text{ कम ७}$$

$$(८) + \frac{3}{4} (व.)^3 (सं.) = - \frac{3}{4} \text{ ठ }^3 \text{ को मु (२ - २८) ब } \quad \times \text{ इ }^3 \text{ को मु }^3 \text{ ण ब}$$

$$= \left\{ \begin{aligned} & \frac{3}{4} \text{ ठ }^3 \text{ इ }^3 \text{ को मु (२ - २८) ब } \\ & \frac{3}{4} \text{ ठ }^3 \text{ इ }^3 \text{ को मु (२ - २८ - २ ण) ब } \\ & - \frac{3}{4} \text{ ठ }^3 \text{ इ }^3 \text{ को मु (२ - २८ + २ ण) ब } \quad \dots \text{ कम ८} \end{aligned} \right.$$

$$(९) - २ (व.) (सं.) = १ - २ इ को मु ण ब (सं.) =$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} & + \frac{3}{4} \text{ ठ }^3 \text{ इ को मु (२ - २८ - ण) ब } \\ & + \frac{3}{4} \text{ ठ }^3 \text{ इ को मु (२ - २८ + ण) ब } \\ & - ३ \text{ ठ }^3 \text{ इ }^3 \text{ को मु (२ - २८ - २ ण) ब } \\ & - \text{ ठ }^3 \text{ इ }^3 \text{ को मु (२ - २८ + २ ण) ब } \\ & - ४ \text{ ठ }^3 \text{ इ }^3 \text{ को मु (२ - २८) ब } \\ & - \frac{1}{4} \text{ ठ }^3 \text{ इ }^3 \text{ को मु (२ - २८ - ३ ण) ब } \\ & + \frac{3}{4} \text{ ठ }^3 \text{ इ }^3 \text{ को मु (२ - २८ - ण - ३) ब } \\ & - \frac{3}{4} \text{ ठ }^3 \text{ इ }^3 \text{ को मु (२ - २८ - ण + ३) ब } \\ & + \frac{3}{4} \text{ ठ }^3 \text{ इ }^3 \text{ को मु (२ - २८ + ण - ३) ब } \\ & - \frac{3}{4} \text{ ठ }^3 \text{ इ }^3 \text{ को मु (२ - २८ + ण + ३) ब } \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} - \frac{2}{3} \text{ ठ ल }^3 \text{ इ को भु (२ - २ ठ - २ ए - ण) व} \\ - \frac{2}{3} \text{ ठ ल }^3 \text{ इ को भु (२ - २ ठ - २ ए + ण) व} \\ \frac{1}{2} \text{ ठ इ }^3 \text{ को भु (२ - २ ठ - ण) व} \end{array} \right] \dots \text{ कम ९}$$

$$(१०) - २(व_२)(स_२) - + \frac{2}{3} \text{ ठ }^3 \text{ को भु (२ - २ ठ) व (व_२)} \dots$$

$$\left[\begin{array}{l} - (\frac{1}{2} \text{ ठ }^3 \text{ ल }^3 + \frac{2}{3} \text{ ठ }^3) \text{ को भु (२ - २ ठ) व} \\ + \frac{2}{3} \text{ ठ }^3 \text{ इ को भु ण व} \\ - \frac{1}{2} \text{ ठ }^3 \text{ ल }^3 \text{ को भु (२ - २ ठ - २ ए) व} \\ - \frac{1}{2} \text{ ठ }^3 \text{ ल }^3 \text{ को भु (२ - २ ठ + २ ए) व} \\ \frac{2}{3} \text{ ठ }^3 \quad \frac{2}{3} \text{ ठ }^3 \text{ को भु (४ - ४ ठ) व} \\ + \frac{2}{3} \text{ ठ }^3 \text{ इ को भु (४ - ४ ठ - ण) व} \end{array} \right] \dots \text{ कम १०}$$

४६०. एथून पुढे कम ची पदे पाचव्या पदवीची पदे वाढावयाची आहेत आणि ती ० समीप केंद्रगुणांचा घ्यावयाची आहेत.

(१) + ६(व_२)(व_२) यापासून निघालेली पदे—

$$\therefore (\frac{1}{2} \text{ ठ }^3 \text{ ल }^3 + \frac{2}{3} \text{ ठ }^3) \text{ को भु (२ - २ ठ - २ ण) व}$$

$$+ \frac{2}{3} \text{ ठ }^3 \text{ इ }^3 \text{ को भु (२ - २ ठ - २ ण - २ ड) व}$$

$$+ \frac{2}{3} \text{ ठ ल }^3 \text{ इ }^3 \text{ को भु (२ - २ ठ - २ ए) व}$$

$$- \frac{1}{2} \text{ ठ }^3 \text{ इ }^3 \text{ को भु (२ - २ ठ - २ ण + २ ड) व}$$

$$+ \frac{2}{3} \text{ ठ }^3 \text{ इ }^3 \text{ को भु (२ - २ ठ - २ ण - २ ड) व}$$

$$- \frac{1}{2} \text{ ठ }^3 \text{ ल }^3 \text{ इ }^3 \text{ को भु (१ - ठ - ण - ड) व}$$

$$- \frac{2}{3} \text{ ठ }^3 \text{ इ }^3 \text{ को भु (१ - ठ - ण) व}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \text{ ठ }^3 \text{ ल }^3 + \frac{2}{3} \text{ ठ }^3 \text{ इ }^3 \text{ को भु (२ - २ ठ - २ ण - २ ड) व}$$

$$+ \frac{2}{3} \text{ ठ ल }^3 \text{ इ }^3 \text{ को भु (२ ए - २ ण) व}$$

$$- \frac{2}{3} \text{ ठ }^3 \text{ इ }^3 \text{ को भु (२ - २ ठ - २ ण + २ ड) व} \dots \text{ कम ११}$$

(२) - २(व_२). ४५१ ह्या लेखात 'व' च्या पाचव्या पदवीची पदे दिली आहेत पण ती अपूर्ण आहेत, म्हणजे त्यात सगळी पदे आली नाहीत. न प्रेरणेची ६ व्या पदवीची पदे ४५६ व्या लेखात एकत्र दिली आहेत. त्याचे सकलन ४५७ व्या

लेखान दिले आहेत. ह्या मकलनाची दुप्पट ऋण केलेली व च्या सूक्ष्माक्ष समीकरणा-
मध्य घेतली पाहिजे तो घेणे राहिली आहेत. (ब) च्या समीकरणाचे मकलन
० केंद्रगुणाचे करिताना मकलन गुणक १ असतो म्हणून समीकरणाप्रमाणेच सकलन
असते. याप्रमाणे कृति वस्तु — २(ब) ची संपूर्ण पदे खाली एकत्र लिहिली
आहेत.

$$- 2(b) =$$

$$+ (\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \text{ ठ ल } - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \text{ ठ ल } - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \text{ ठ ल } - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \text{ ठ ल } \\ + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \text{ ठ ल }) \text{ को भु (२ - २ ठ - २ ए) ब.}$$

$$+ (\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \text{ ठ ल } - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \text{ ठ ल } - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \text{ ठ ल } - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \text{ ठ ल }) \\ \text{को भु (२ - २ ठ - २ ए) ब.}$$

$$- (\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \text{ ठ ल } - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \text{ ठ ल } - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \text{ ठ ल }) \text{ को भु उ ब}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \text{ ठ ल } \text{ को भु (२ ए - २ ण) ब}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \text{ ठ ल } \frac{\text{अ}}{\text{अ}} \text{ को भु (१ - ठ - ण) ब.}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \text{ ठ ल } \text{ को भु (२ - २ ठ - २ ए - २ ड) ब}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \text{ ठ ल } \text{ को भु (२ - २ ठ - २ ए + २ ड) ब.}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \text{ ठ ल } \text{ को भु (२ - २ ठ - २ ए - २ ड) ब}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \text{ ठ ल } \text{ को भु (२ - २ ठ - २ ए + २ ड) ब.}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \text{ ठ ल } \text{ को भु (२ - २ ठ - २ ए - २ ड) ब}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \text{ ठ ल } \text{ को भु (२ - २ ठ - २ ए + २ ड) ब}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \text{ ठ ल } \text{ को भु (२ - २ ठ - २ ए - २ ड) ब}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \text{ ठ ल } \text{ को भु (२ - २ ठ - २ ए + २ ड) ब}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \text{ ठ ल } \frac{\text{अ}}{\text{अ}} \text{ को भु (१ - ठ - ण - ड) ब}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \text{ ठ ल } \frac{\text{अ}}{\text{अ}} \text{ को भु (१ - ठ - ण + ड) ब}$$

$$- (\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \text{ ठ ल } + ४२ \text{ ठ }) \text{ को भु उ ब} \quad \dots \quad \text{कम १२}$$

(३) — १२ (ब) (ब) (ब) कम ३ ह्या पद सधाम — ४(ब) ने
गुणणे

$$+ (\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \text{ ठ ल } + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \text{ ठ ल }) \text{ को भु (२ - २ ठ - २ ए) ब}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{1}{2} \text{ ठ ल } \text{ को भु (२ - २ ठ - २ ए) ब.} \quad \text{कम १३}$$

(४) + २० (व_१)^१ (व_२)

+ $\frac{१३}{२}$ ठ इ^१ कोमु (२—२४—२५) ब ... कम १४

(५) — १२ (व_१)^२ (व_२) कन ५ हया पदमधाम — २ (व_१) में गुणणे.

+ ($\frac{१३}{२}$ ठ ल^१ इ^१ — $\frac{१३}{२}$ ठ इ^१ — $\frac{१३}{२}$ ठ इ^१) कोमु (२—२४—२५) ब

— $\frac{१३}{२}$ ठ इ^१ इ^१ कोमु (२—२४—२५—३) ब

— $\frac{१३}{२}$ ठ ल^१ इ^१ कोमु (२—२४—२५) ब.

+ $\frac{१३}{२}$ ठ इ^१ इ^१ कोमु (२—२४—२५—३) ब + $\frac{१३}{२}$ ठ इ^१ इ^१ कोमु ड ब

(६) + ६ (व_१) (व_२) हयाधामून

... कम १५

— ($\frac{१३}{२}$ ठ ल^१ इ^१ + $\frac{१३}{२}$ ठ इ^१) कोमु (२—२४—२५) ब

— ($\frac{१३}{२}$ ठ ल^१ : $\frac{१३}{२}$ ठ ल^१ + $\frac{१३}{२}$ ठ ल^१ इ^१) कोमु (२—२४—२५) ब

+ ($\frac{१३}{२}$ ठ इ^१ इ^१ — $\frac{१३}{२}$ ठ ल^१ इ^१ + $\frac{१३}{२}$ ठ इ^१) कोमु ड ब

— $\frac{१३}{२}$ ठ ल^१ इ^१ कोमु (२—२४—२५—३) ब

+ $\frac{१३}{२}$ ठ ल^१ इ^१ कोमु (२—२४—२५—३) ब.

— $\frac{१३}{२}$ ठ इ^१ इ^१ कोमु (२—२४—२५—३) ब

+ $\frac{१३}{२}$ ठ इ^१ इ^१ कोमु (२—२४—२५—३) ब.

— $\frac{१३}{२}$ ठ इ^१ इ^१ कोमु (२—२४—२५—३) ब

— $\frac{१३}{२}$ ठ इ^१ इ^१ कोमु (२—२४—२५—३) ब.

— $\frac{१३}{२}$ ठ इ^१ कोमु (१—२—३) व $\frac{१३}{२}$ ठ इ^१ इ^१ कोमु ड ब कम १६

(७) + ३ (म_१) (म_२) यांत + $\frac{१३}{२}$ ठ इ^१ कोमु ड ब ... कम १७

(८) — २ (म_१) (व_२) यांत + $\frac{१३}{२}$ ठ इ^१ कोमु ड ब ... कम १८

(९) — ६ (व_१)^२ यांत पद नाही.

(१०) + ३ (व_१)^२ (म_२) — + $\frac{१३}{२}$ ठ इ^१ (म_२) + $\frac{१३}{२}$ ठ इ^१ (म_२) कोमु २५ ब

— $\frac{१३}{२}$ ठ इ^१ इ^१ कोमु (२—२४—२५—३) ब

+ $\frac{१३}{२}$ ठ इ^१ इ^१ कोमु (२—२४—२५—३) ब.

+ ($\frac{१३}{२}$ ठ इ^१ — $\frac{१३}{२}$ ठ इ^१) कोमु (२—२४—२५) ब

+ $\frac{१३}{२}$ ठ ल^१ इ^१ कोमु (२—२४—२५) ब ... कम २०

(११) — २ (व_१) (सं_२) याधामून

+ $\frac{१३}{२}$ ठ इ^१ इ^१ कोमु (२—२४—२५—३) ब

+ $\frac{१३}{२}$ ठ इ^१ इ^१ कोमु (२—२४—२५—३) ब.

— १ ठ^१ इ^१ कोमु (२ — २ठ — २ण) व $\frac{१}{३} \frac{अ}{अ}$ ठ^१ इ^१ कोमु (१ — ठ — ण) व
... कम २१

(१२) — ३ (व_१) (सं_२) (सं_३) ह्यात पद नाही.

(१३) + (म_१) ४४६ च्या लेखातील शेवटची मान पदे आणि ४५७ ह्या लेखातील सर्व पदे घेणे. ती येथे दिली नाहीत. कम २३

(१४) — ४ (व_१)^१ (सं_२) ह्यात पद नाही.

(१५) — २ (व_१) (सं_२)

— $\frac{१}{३} \frac{अ}{अ}$ ठ^१ ल^१ इ^१ कोमु (२ — २ठ — २ए — ड) व
+ $\frac{१}{३} \frac{अ}{अ}$ ठ^१ ल^१ इ^१ कोमु (२ — २ठ — २ए + ड) व.

+ ($\frac{१}{३} \frac{अ}{अ}$ ठ^१ इ^१ + $\frac{१}{३} \frac{अ}{अ}$ ठ^१ ल^१ इ^१) कोमु (२ — २ठ — २ण) व

+ ($\frac{१}{३} \frac{अ}{अ}$ ठ^१ ल^१ + $\frac{१}{३} \frac{अ}{अ}$ ठ^१ ल^१) कोमु (२ — २ठ — २ए) व

+ $\frac{१}{३} \frac{अ}{अ}$ ठ^१ इ^१ कोमु व ... कम २५

(१६) + ६ (व_१) (व_२) (सं_३) इष्ट पद नाही.

४६१ कम च्या २६ सामान्य पदांपासून येणाऱ्या सर्व पदांचा एकदरो केली म्हणजे $\frac{सू.क.}{सू.व.}$ ह्या शून्यलब्धिगुणाची किंमत येईल. याच सवलत केले असता

क_१ ची किंमत व_१ च्या संचयाने येईल. ह्या शून्यलब्धिगुणांचे सवलत करण्यापूर्वी समीकरणात जे $\frac{१}{ज.अ.}$ हे पद आहे, ह्या अव्यक्त पदाची व्यक्त किंमत तयार करून

ती समीकरणात ठेविली पाहिजे. ह्या नियमा ४२५ च्या लेखामध्ये $\frac{१}{ज.अ.}$ ह्या

पदाची व्यात किंमत तयार केली आहे, ती पुन्हा पहा. तेथील स्थिर पदांपेक्षा आता जास्त पदे समीकरणात आली आहेत. (व_१ च्या किंमतीला स्थिर पदाची

— २ पट ही कम च्या समीकरणातील स्थिर पदे होत.) त्या प्रमाणे पाहिले तरी खालील स्वरूप मिळते. ते असे.

$$\frac{१}{ज.अ.} \times \left\{ १ + \frac{१}{३} इ^१ + \frac{१}{३} ल^१ + ठ^१ + स्थ \right\} = \frac{१}{म}$$

किंवा

$$\frac{१}{ज.अ.} = \left\{ १ + \frac{१}{३} इ^१ + \frac{१}{३} ल^१ + ठ^१ + स्थ \right\}^{-१} \times \frac{१}{म}$$

$$= \left\{ १ - \frac{१}{३} इ^१ - \frac{१}{३} ल^१ - ठ^१ - स्थ \right\} \times \frac{१}{म}$$

४६२. वरच्या लेखांन दाखविल्याप्रमाणे कम च्या समीकरणातील प्रत्येक पदाला

$$\frac{1}{म} \left\{ १ - ३इ - ३ल - ठ - स्थ \right\}$$

ह्या पदानें गुणिले पाहिजे. हा गुणाकार करताना सर्व स्थिरपदे लुप्त होऊन $\frac{१}{जअ}$

याच्या जागी $\frac{१}{म}$ हे पद येतें, आणि इतर सर्व पदाना (१ - ३इ - ३ल - ठ) ह्या गुणकानें गुणावे लागते, व त्याने गुणून उत्पन्न होणारी नवीन पदे समीकरणान घ्यावी लागतात. ती नवीन पदे खाली लिहिल्याप्रमाणें ; ह्या पदमघाला कम २७ म्हणू.

$$\text{गुणक } १. ३इ कोमु रणव - (३इ - ३इ ल - ३ठ इ) कोमु रणव$$

$$\text{गुणक } \times \frac{१}{४} ठ कोमु (२ - २ठ) व$$

$$= १ (३ठ इ + ३ठ ल - ३ठ ठ) कोमु (२ - २ठ) व.$$

$$\text{गुणक } १. ३ल कोमु रणव - (३ल इ + ३ल ल - ३ठ ल) कोमु रणव$$

$$\text{गु. } \times \frac{१}{४} ठ कोमु (२ - २ठ - ण) व$$

$$= १ (३ठ इ + ३ठ ल इ + ३ठ ठ इ) कोमु (२ - २ठ - ण) व.$$

$$\text{गु. } \times ३ठ इ कोमु डव - (३ठ ल इ + ३ठ ठ इ + ३ठ इ) कोमु डव.$$

... कम २७

४६३. चद्राच्या केद्रसन्निधानाची गति आपण न गुणकाने साधित आहे लेख ३७९ पहा. तेथें

$$\text{चद्रोच्च गति} - (१ - ण) \text{ चद्रमध्यम गति} - (१ - ण) \text{ कम}$$

$$व - \text{चद्र के. म.} - व - (उ + \text{चद्रोच्चगति}) - व - उ - (१ - ण) \text{ कम}$$

$$व - उ - (१ - ण) (व - २इमुणव)$$

$$= व - व + णव - उ + २इमुणव - २णइमुणव$$

$$= णव - उ + २इमुणव - २(१ - ३ठ) इमुणव$$

$$= णव - उ + ३ठ इमुणव$$

$$- २इकोमु (व - के. म.) - २इ [कोमु (णव - उ) कोमु (३ठ इमुणव)$$

$$- मु (णव - ड) मु (३ठ इमुणव)]$$

$$[\text{कोमु (अ + व)} = \text{कोमु अ कोमु व} - \text{मु अ मु व}] \text{ ह्या आधारे.}$$

$$\text{पण कोमु अ} = १ - ३अ आणि \text{मुअ} = अ - ३अ$$

$$\text{तेव्हा कोमु (३ठ इमुणव)} - १ ; \text{ आणि } \text{मु (३ठ इमुणव)}$$

$$= ३ठ इमुणव$$

म्हणून

$$\begin{aligned} - २६ \text{ कोभु (ब — कें. सं)} &= - २६ \text{ कोभुणव} - ३४^३६^३ \text{ कोभुणव} \\ &= - २६ \text{ कोभुणव} - ३४^३६^३ \end{aligned}$$

+ ३४^३६^३ कोभुणव

ह्यापैकी - २६ कोभुणव हे पद समीकरणात आहे. परंतु - ३४^३६^३ आणि + ३४^३६^३ कोभुणव ही पदे समीकरणानात घेणे आहेत

कम २८

४६८ कम च्या वर तयार केलेल्या २८ पद संघातील पदे एकत्र केली म्हणजे कम जें मुख्यतः समीकरण तयार होईल ते खाली लिहिल्याप्रमाणे

$$\frac{\text{सूक}}{\text{सूच}} \cdot \text{म} = (\text{खाली दिलेला पदसमूह})$$

$$\begin{aligned} १ - २६ \text{ कोभुणव} &+ (३४^३ + ३४^३ + ३४^३ + २४^३) \text{ कोभुणव} \\ - ६^३ \text{ कोभुणव} &+ ३४^३ \text{ कोभुणव} \\ + (३४^३ + ३४^३ - ३४^३ - ३४^३) \text{ कोभु (२ए) ब} \\ - (३४^३ + ३४^३ - ३४^३ - ३४^३) \text{ कोभु (२ - २ठ) ब} \\ &+ (३४^३ - ३४^३ - ३४^३ - ३४^३) \end{aligned}$$

कोभु (२ - २ठ) ब

$$\begin{aligned} - (३४^३ + ३४^३ - ३४^३ - ३४^३) \text{ कोभु (२ - २ठ - ण) ब} \\ - (३४^३ - ३४^३ - ३४^३ - ३४^३) \text{ कोभु (२ - २ठ - ण) ब} \\ + (३४^३ - ३४^३ - ३४^३ - ३४^३) \text{ कोभु (२ - २ठ - ण) ब} \\ (३४^३ - ३४^३ + ३४^३ - ३४^३) \end{aligned}$$

कोभु (२ - २ठ + ण) ब

$$- (३४^३ - ३४^३ + ३४^३ + ३४^३)$$

कोभु (२ - २ठ - ङ) ब

$$+ (३४^३ + ३४^३ - ३४^३ - ३४^३)$$

कोभु (२ - २ठ + ङ) ब

$$- (३४^३ + ३४^३ - ३४^३ - ३४^३) \text{ कोभु (२ - २ठ - ण - ङ) ब}$$

$$+ ३४^३ \text{ कोभु (२ण - ङ) ब}$$

$$+ (३४^३ - ३४^३ - ३४^३ - ३४^३) \text{ कोभु (२ - २ठ - ण + ङ) ब}$$

$$- ३४^३ \text{ कोभु (२ण + ङ) ब}$$

$$- (३४^३ + ३४^३ - ३४^३ - ३४^३) \text{ कोभु (ण - ङ) ब}$$

$$- ३४^३ \text{ कोभु (२ए - ङ) ब}$$

$$+ (३४^३ + ३४^३ - ३४^३ - ३४^३) \text{ कोभु (ण + ङ) ब}$$

$$+ ३४^३ \text{ कोभु (२ए + ङ) ब}$$

+ (१३ ल' इ - १६ ल' इ) कोमु (२ ए - ण) व - ३ ल' इ कोमु (२ ए + ण) व

+ (१८ अ' ठ + ३० अ' ठ) कोमु (१ - ठ) व + ३ ल' इ कोमु (२ ए + २ ण) व

- (११ ल' इ - ६ ल' इ) कोमु र ड व - १६ अ' ठ व कोमु (१ - ठ + ण) व

- (१८ अ' ठ + ३० अ' ठ) कोमु (१ - ठ - ण) व + १ ल' कोमु (४ ए) व

+ (१८ ल' इ - १६ ल' इ) कोमु (२ - २ ठ - ण - २ ड) व + ३ ल' इ कोमु र ड व

+ (१८ ल' इ - १६ ल' इ + ३० ल' इ + १८ ल' इ) कोमु (२ - २ ठ - २ ण) व

+ (१ ल' इ + १६ ल' इ - १६ ल' इ - १६ ल' इ) कोमु (२ - २ ठ - २ ए) व

- (१६ ल' इ - १६ ल' इ) कोमु (२ - २ ठ - २ ए) व

+ १६ अ' ठ व कोमु (१ - ठ - ड) व.

- १६ ल' इ कोमु (२ - २ ठ - २ ण - ड) व

+ १६ ल' इ कोमु (२ - २ ठ - २ ण + ड) व.

+ १८ ल' इ कोमु (२ - २ ठ - २ ए - ड) व

+ १८ ल' इ कोमु (२ - २ ठ - २ ए + ड) व.

- ३ ल' इ कोमु (२ - २ ठ + ण - ड) व + २ ल' इ कोमु (२ - २ ठ + ण - ड) व

+ १ ल' इ कोमु (४ - ४ ठ - ण) व + १ ल' इ कोमु (४ - ४ ठ - २ ण) व

- ३ ल' इ कोमु (२ - २ ठ - २ ए - ण) व

- १६ ल' इ कोमु (२ - २ ठ + २ ए - ण) व.

- १ ल' इ कोमु (२ - २ ठ - २ ण) व + १ ल' इ कोमु (२ - २ ठ + २ ए) व

- १६ ल' इ कोमु (३ - ३ ठ) व + १६ ल' इ कोमु (४ - ४ ठ) व

+ १ ल' इ कोमु (४ - ४ ठ - २ ए) व - १ ल' इ कोमु (२ - २ ठ - २ ड) व

+ १ ल' इ कोमु (२ ण - २ ड) व + १ ल' इ कोमु (२ ण + २ ड) व

- १ ल' इ कोमु (१ - २ ड) व + १ ल' इ कोमु (१ + २ ड) व

+ १६ ल' इ कोमु (१ - ठ - ण - ड) व

+ १ ल' इ कोमु (२ - २ ठ - २ ए + ण) व.

+ १ ल' इ कोमु (२ - २ ठ - २ ण - २ ड) व

+ १ ल' इ कोमु (२ - २ ठ - २ ए - २ ड) व

- १ ल' इ कोमु (२ - २ ठ - ण - २ ड) व

हया समीकरणाच्या दोन्ही पेट्याचे सकलन केले म्हणजे कम ची किमन येईल.
डावीकडच्या पेट्याचे म्हणजे $\frac{\text{सू क}}{\text{सू व}}$. म याचें संकलन कम हें आहे. उजवा-
कडच्या पेट्याचे सकलन ४२७ व्या लेखाप्रमाणे करून त्याचे समीकरण खाली
लिहिलें आहे.

४६५. वरच्या सूक्ष्मांश समीकरणाचें संकलन,

कम = खालचा पदसमूह.

ब — २ इ भुण व + ($\frac{१}{२}$ ठ' , $\frac{१}{२}$ इ' + $\frac{१}{२}$ इ' ल' + $\frac{१}{२}$ इ' ड') भु २ण व
— $\frac{१}{२}$ इ' भु ३ण व + $\frac{१}{२}$ इ' भु ४ण व
+ ($\frac{१}{२}$ ल' + $\frac{१}{२}$ ल' इ' — $\frac{१}{२}$ ल' — $\frac{१}{२}$ ठ' ल') भु २ए व
— ($\frac{१}{२}$ ठ' + $\frac{१}{२}$ ठ' + $\frac{१}{२}$ ठ' ठ' — $\frac{१}{२}$ ठ' ल') भु (२ — २ ठ) व
+ ($\frac{१}{२}$ ठ' + $\frac{१}{२}$ ठ' ठ' — $\frac{१}{२}$ ठ' ल' + $\frac{१}{२}$ ठ' इ') भु (२ — २ ठ) व
— ($\frac{१}{२}$ ठ' + $\frac{१}{२}$ ठ' ठ' + $\frac{१}{२}$ ठ' ठ') भु (२ — २ ठ — ३ण) व
— ($\frac{१}{२}$ ठ' ल' इ' + $\frac{१}{२}$ ठ' ठ' + $\frac{१}{२}$ ठ' ठ') भु (२ — २ ठ — ३ण) व
+ ($\frac{१}{२}$ ठ' — $\frac{१}{२}$ ठ' ठ' इ' — $\frac{१}{२}$ ठ' ल' इ' — $\frac{१}{२}$ ठ' ठ' इ') भु ड व
— ($\frac{१}{२}$ ठ' इ' — $\frac{१}{२}$ ठ' ठ' + $\frac{१}{२}$ ठ' ठ' — $\frac{१}{२}$ ठ' ल' इ') भु (२ — २ ठ — ३ण) व
— ($\frac{१}{२}$ ठ' इ' — $\frac{१}{२}$ ठ' ठ' इ' — $\frac{१}{२}$ ठ' ल' इ' — $\frac{१}{२}$ ठ' ठ' इ') भु (२ — २ ठ — ३) व
+ ($\frac{१}{२}$ ठ' इ' + $\frac{१}{२}$ ठ' ठ' इ' — $\frac{१}{२}$ ठ' ल' इ' — $\frac{१}{२}$ ठ' ठ' इ') भु (२ — २ ठ — ३) व
— ($\frac{१}{२}$ ठ' ठ' इ' + $\frac{१}{२}$ ठ' ठ' इ') भु (२ — २ ठ — ३ण — ३) व
+ ($\frac{१}{२}$ ठ' ठ' इ' — $\frac{१}{२}$ ठ' ठ' इ') भु (२ — २ ठ — ३ण — ३) व
— ($\frac{१}{२}$ ठ' ठ' इ' + $\frac{१}{२}$ ठ' ठ' इ') भु (३ण — ३) व + $\frac{१}{२}$ ठ' ठ' भु (४ — ४ ठ) व
+ ($\frac{१}{२}$ ठ' ठ' इ' + $\frac{१}{२}$ ठ' ठ' इ') भु (३ण — ३) व + $\frac{१}{२}$ ठ' ठ' भु ४ए व
+ ($\frac{१}{२}$ ठ' ठ' इ' — $\frac{१}{२}$ ठ' ठ' इ') भु (२ए — ३ण) व + $\frac{१}{२}$ ठ' ठ' इ' भु (२ए — ३ण) व
+ ($\frac{१}{२}$ ठ' ठ' + $\frac{१}{२}$ ठ' ठ') भु (१ — ३) व + $\frac{१}{२}$ ठ' ठ' भु (२ — ३ ठ) व
— ($\frac{१}{२}$ ठ' ठ' + $\frac{१}{२}$ ठ' ठ') भु (३ण — २ ठ) व + $\frac{१}{२}$ ठ' ठ' भु (२ए — ३ण) व
+ ($\frac{१}{२}$ ठ' ठ' — $\frac{१}{२}$ ठ' ठ' इ') भु (३ण — २ ठ) व + $\frac{१}{२}$ ठ' ठ' भु २उ व
— ($\frac{१}{२}$ ठ' ठ' + $\frac{१}{२}$ ठ' ठ' इ' + $\frac{१}{२}$ ठ' ल' इ' — $\frac{१}{२}$ ठ' ठ' इ') भु (२ — २ ठ — २ण) व
— ($\frac{१}{२}$ ठ' ल' — $\frac{१}{२}$ ठ' ठ' ल' — $\frac{१}{२}$ ठ' ल' इ' — $\frac{१}{२}$ ठ' ल') भु (२ — २ ठ — २ए) व

— १११-ठडं ईं भु (२ — २८ — २९ + ड) व

— १२३-ठडं ईं भु (२ — २८ — २९ — ड) व.

— १११-ठलं ईं भु (२ — २८ — २९ + ड) व

— १२३-ठलं ईं भु (२ — २८ — २९ — ड) व.

+ १११-अं ठडं भु (१ — ठ — ण) व १११-अं ठडं भु (१ — ठ + ण) व

— १११-ठं भु (२ — २८ — २९) व १११-ठलं भु (२ — २८ — २९) व

+ १११-ठं भु (४ — ४८ — ण) व + १११-ठलं भु (४ — ४८ — ण) व

— १११-ठलं भु (२ — २८ — २९ — ण) व १११-ठलं भु (२ — २८ — २९ — ण) व

— ठं डं भु (२ — २८ — ण — ड) व + ठं डं भु (२ — २८ — ण — ड) व

— १११-ठं ईं भु (२ — २८ — २९) व + १११-अं ठं ईं भु (१ — ठ — ड) व

— १११-ठलं ईं भु (२९ — ड) व + १११-ठलं ईं भु (२९ — ड) व

+ १११-ठं ईं भु (२९ — ड) व — १११-ठलं ईं भु (२९ — ड) व

४६६. गेल्या दोन प्रकरणात केलेल्या गणिताकडे मित्रावलोकन दृष्टीने पाहिल्यास असे दिसून येईल की, चंद्राच्या सराची स्पष्टतेचा, चंद्राने भूमध्यामुन अंतर, आणि त्या क्षणीचा मध्यम चंद्र (कम) ही आपणाला मित्र करिता येतील. ह्या गोष्टी कशा सिद्ध होतील हे अनुमानद्वारा वर मिळविले आहे. ही मित्रता सर्वसामान्य आहे. ह्या मित्रतेत ज्या अव्यक्त व व्यक्त अशा सामान्य सग्या योजिल्या आहेत त्यापैकी कांही सग्या वेधाने ठरविल्या पाहिजेत. परंतु हे पूर्ण लक्षात असावे की, वेधाने ज्या सग्या माध्य होतात त्या कदाही मूळम असत नाहीत. गणिताच्या सामान्य सिद्धांतांनीच त्याची मूळमता साध्य करून घ्यावी लागते. कोणताही वेध घ्या त्यावरून इष्ट मध्येचे मापन गणित सिद्धांतांनीच ठरते. चंद्राच्या समीकरणापासून इष्ट कार्ये कशी करिता येतील याचा विचार आता आपणाला करावयाचा आहे. वर जे कम समीकरण मित्र केले आहे त्यात व म्हणजे विवक्षित क्षणीचा स्पष्टचंद्र ही व्यक्त संख्या असून निरगमून इतर स्थीर सग्यांच्या सहाय्याने कम ही अव्यक्त संख्या शोधिता येईल असे मित्र केले आहे. आता कम ही व्यक्त संख्या असता व ती संख्या कशी प्राप्त करून घेता येईल हे मित्र करावयाचे आहे. समीकरण हा सिद्धांत आहे. वरच्या समीकरणात व ही संख्या पक्ष स्थानी आहे आणि कम माध्य स्थानी आहे. आता आपणाला ह्या सिद्धांताचा व्यासास मित्र करावयाचा आहे. म्हणजे व च्या स्थानी कम आणि कम च्या स्थानी व आणून समीकरण सिद्ध करावयाचे आहे. अर्थात इष्ट क्षणी मध्यमचंद्र ज्ञात असला तर स्पष्टचंद्र किती हे ठरविता येईल असे समीकरण

सिद्ध करिता येईल. ही सिद्धता वास्तविक मोठी कठीण आहे. परंतु ते काठिण्य दूर करण्याकरिता एक मित्रांत स्वनः मित्र करून ठेविला आहे. २६२ ते २६६ लेखांक पहा.

४६३. वरचे कम चें समीकरण २६६ ह्या लेखांतील समीकरणाशी मरूप आहे. त्यातील ध आणि य यांचे जमे स्थान परिवर्तन केलें तसे कम च्या समीकरणान कम च्या जागी व आणि व च्या जागी कम असा त्याचा स्थान विनिमय होऊन समीकरण सिद्ध झाले पाहिजे. २६६ ह्या लेखातील समीकरणान ज्या सामान्य मरूपा योजिल्या आहेत त्याच्यासंबंधी जे मकेत स्वीकारले आहेत ते प्रथम विशद करितो. ध, आणि ह्या मरूपा परिवर्तन होणाऱ्या आहेत. प, द, त, आणि च ह्या मरूपा पदाचे गुणक दाखविणाऱ्या आहेत. आणि द, त, च ह्या संख्या एकाच पदाच्या दशक तमून संव दशक आहेत. ज्या पदाचा पदगुणक प म्हणजे पहिल्या पदवीचा त्याचा केंद्रगुणक न स्वीकारला आहे. पदगुणक द असता केंद्रगुणक म स्वीकारला आहे. याचप्रमाणे त चा क आणि च चा ग केंद्रगुणक स्वीकारला आहे. ह्या समीकरणाच्या उजव्या बाजूस य खेरीज १९ पदे आहेत. पहिल्या पदवीचे एका पद, दुसरीची दोन, तिसरीची पाच आणि चवथ्या पदवीची अकरा पदे आहेत. ह्या १९ पदाच्या किमती कम मध्ये धनर्ण केल्या म्हणजे व चें समीकरण सिद्ध होईल. तेव्हा २६६ ह्या लेखांतील एक एक पद घेऊन त्यांच्या किमती काढू.

४६४. परिवर्तन समीकरणातील प्रत्येक पदाचे परिवर्तन क्रमवार—

[१] — प भु न य. यातील य च्या स्थानी क म लिहिला, आणि न च्या जागी ण हा केंद्रगुणक लिहिला. म्हणजे भुणक म हे केंद्र झाले. प च्या जागी — २ इ हा पदगुणक लिहिला. पण प ऋण आहे म्हणून गुणक १- २ इ लिहिला तेव्हा
 + २ इ भुणक म (१)

[२] — द भु म य. हे एकच पद नमून पाच पदांचा समुदाय आहे. म्हणजे द च्या किमती पाच आहेत, आणि म च्या किमतीही तितक्याच आहेत. दुसऱ्या पदवीच्या पाच पदांपैकी प्रत्येक पदाचा पदगुणक वन असल्यास ऋण करून, आणि ऋण असल्यास धन करून त्या पदांना लिहावा, आणि त्या त्या पदाचा केंद्रगुणक म च्या जागी लिहावा. तसेच य च्या स्थानी क म लिहावे म्हणजे प्रत्येक पदाचे परिवर्तन होईल. तें असें:

— $\frac{३}{२}$ इ भुणक म — $\frac{३}{२}$ लं भु २ एक म + $\frac{३}{२}$ ठं भु (२-२ ठ) क म
 + $\frac{३}{२}$ ठ इ भु (२-२ ठ- ण) क म — ३ ठ इ भु ड क म..... (२)

[३] + $\frac{1}{2}$ प' न' भु २ न य. यातील प च्या स्थानी - २ इ, न च्या स्थानी
ण आणि य च्या स्थानी कम लिहिण. ण — १ — $\frac{3}{4}$ ठ' वेणे. तेव्हा
+ $\frac{1}{2}$ ४ इ' (१— $\frac{3}{4}$ ठ') भु २ ण कम . (२ इ'— $\frac{3}{4}$ ठ' इ') भु २ ण कम. .. (३)

[४] — त भु क य. कम च्या समीकरणांतील तिसऱ्या पदवीच्या सर्व
पदाना १ ने गुणून, आणि व च्या स्थानी कम लिहून होणारा पदममूत्र. [२] ह्या
अकाप्रमाणे.

$$[५] \quad \frac{1}{2} प' न' भु न य. यापासून + \frac{1}{2} (-८ इ') ण' भु ण क म \\ = - ३ इ' भु ण क म \quad \dots \quad (५)$$

$$[६] \quad - \frac{3}{4} प' न' भु ३ न य. यापासून - \frac{3}{4} (-८ इ') ण' भु ३ ण क म \\ = + ३ इ' भु ३ ण क म \quad \dots \quad (६)$$

[७] + $\frac{1}{2}$ पद (म + न) भु (म - न) य. ह्या पदमध्ये द च्या पाच
किमती आहेत आणि त्याशी संगत म च्या पाच किमती आहेत, त्या त्या यथास्थानी
लिहिल्याने खाली लिहिल्याप्रमाणे पदे येतात :—

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} ठ' भु ३ ण क म + (\frac{3}{2} ठ' इ - \frac{3}{4} ठ' इ) भु (२ - २ ठ + ण) क म \\ & - \frac{3}{4} ठ' इ भु (२ ए + ण) क म + (\frac{1}{2} ठ' इ' - \frac{3}{4} ठ' इ') भु (२ - २ ठ) क म \\ & - (३ ठ इ इ' + ३ ठ' इ इ') भु (ण + ड) क म \quad \dots \quad (७) \end{aligned}$$

[८] — $\frac{1}{2}$ पद (म - न) भु (म - न) य. वरच्याप्रमाणे या पदापासून
पदे येतात ती :

$$\begin{aligned} & - \frac{3}{4} इ' भु ण क म (\frac{1}{2} ठ' इ - \frac{3}{4} ठ' इ) भ (२ - २ ठ ण) क म \\ & + \frac{1}{2} ठ' इ भु (२ ए - ण) क म (\frac{1}{2} ठ' इ') भु (२ - २ ठ - २ ण) क म \\ & + (३ ठ इ इ' - ३ ठ' इ इ') भु (ण - ड) क म \quad \dots \quad (८) \end{aligned}$$

$$[९] - \frac{1}{2} प' न' भु २ न य. परिवर्तन — $\frac{3}{4}$ इ' भु २ ण क म \quad \dots \quad (९)$$

$$[१०] - \frac{3}{4} प' न' भु ४ न य. परिवर्तन — $\frac{3}{4}$ ए' भु ४ ण क म \quad (१०)$$

$$[११] + \frac{1}{2} प' द म' भु म य. यापासून,$$

$$\begin{aligned} & - ३ इ' भु २ ण क म + ८ इ' भु २ ए क म - \frac{3}{2} ठ' इ' भु (२ - २ ठ) क म \\ & - \frac{3}{4} ठ' इ' भु (२ - २ ठ - ण) क म \quad \dots \quad (११) \end{aligned}$$

$$[१२] - \frac{1}{2} प' द (म + २ न)' भु (म + २ न) य. यापासून,$$

$$- ६ इ' भु ४ ण क म - ११ ठ' इ' भ (२ - २ ठ + २ ण) क म$$

$$+ \frac{3}{2} ठ' इ' भु (२ - २ ठ - ण) क म$$

$$- २ ठ' इ' भु (२ ए + २ ण) क म$$

— $\frac{1}{2} \text{ ठ } \text{ ल } \text{ भु } (२ - २\text{ ठ} - २\text{ ए}) \text{ क म}$
 — $\frac{3}{4} \text{ ठ ल } \text{ ह } \text{ भु } (२ - २\text{ ठ} + २\text{ ए} - \text{ ण}) \text{ क म}$
 + $\frac{1}{2} \text{ ठ ल } \text{ ह } \text{ भु } (२\text{ ए} - \text{ ड}) \text{ क म} - \frac{1}{4} \text{ ठ } \text{ ह } \text{ भु } (४ - ४\text{ ठ} - \text{ ण}) \text{ क म}$
 — $\frac{3}{4} \text{ ठ } \text{ ह } \text{ भु } (२ - २\text{ ठ} + \text{ ड}) \text{ क म}$
 — $\frac{1}{2} \text{ ठ } \text{ ह } \text{ ह } \text{ भु } (२ - २\text{ ठ} - \text{ ण} + \text{ ड}) \text{ क म} \quad \dots (१६)$

[१७] — $\frac{1}{2} \text{ द } \text{ द } (\text{ म } - \text{ म }_२) \text{ मु } (\text{ म } - \text{ म }_२) \text{ य. यापासून,}$
 — $\frac{3}{4} \text{ ठ } \text{ ह } \text{ भु } (२ - २\text{ ठ} - ३\text{ ण}) \text{ क म}$
 — $\frac{1}{2} \text{ ठ } \text{ ह } \text{ ह } \text{ भु } (२\text{ ण} - \text{ ड}) \text{ क म}$
 — $\frac{3}{4} \text{ ठ ल } \text{ ह } \text{ भु } (२ - २\text{ ठ} - २\text{ ए} - \text{ ण}) \text{ क म}$
 — $\frac{1}{2} \text{ ठ ल } \text{ ह } \text{ भु } (२\text{ ए} - \text{ ड}) \text{ क म}$
 — $\frac{1}{4} \text{ ठ } \text{ ह } \text{ भु } \text{ ण क म } ; \frac{3}{4} \text{ ठ } \text{ ह } \text{ भु } (२ - २\text{ ठ} - \text{ ड}) \text{ क म}$
 + $\frac{1}{2} \text{ ठ } \text{ ह } \text{ ह } \text{ भु } (२ - २\text{ ठ} - \text{ ण} - \text{ ड}) \text{ क म} \quad \dots (१७)$

[१८] + $\frac{1}{2} \text{ द } \text{ म } \text{ भु } २ \text{ म य. यापासून,}$
 + $\frac{1}{2} \text{ ह } \text{ भु } \text{ ण क म} - \frac{1}{4} \text{ ल } \text{ भु } \text{ ण क म}$
 + $\frac{3}{4} \text{ ठ } \text{ भु } (४ - ४\text{ ठ}) \text{ क म}$
 + $\frac{3}{4} \text{ ठ } \text{ ह } \text{ भु } (४ - ४\text{ ठ} - २\text{ ण}) \text{ क म} \quad \dots (१८)$

(१९) — च भु ग य. क म च्या भमीकरणातील चवथ्या पदवीची सर्व पदे
 — १ ते गृहण आणि व च्या जागी क म लिहून आलेल्या पदसंघ. $\dots (१९)$

४६%. वरच्या लेखांत जी वृत्ति केरी आहे त्या कृतीनें जो एक पदसंघ घेतले तो व ह्या स्पष्टचंद्रावरोवर होईल. वरच्या १९ अकार्यांनी १, २, ४ आणि १९ ह्यामध्ये जी पदे आहेत ती क म वरोवर अगळ्या पदसंघात जी पदे आहेत त्याची ममान आहेत, मात्र त्याची किंहे भिन्न आहेत. म्हणून तीच पदे व वरोवर अमल्ल्या पदसंघात येतात. आणि वरचे चार अक सोडून बाकीच्या पंधरा अकान जी पदे उत्पन्न झाली तीही व च्या किमतीत येतात. म्हणून ती पंधरा अकात उत्पन्न झालेली पदे एकत्र केली आहेत ती खाली दिली आहेत. ह्याम आपण परिवर्तन पदसंघ म्हणू. तेव्हां :—

क म = व — (क म च्या पदसंघ) आणि
 व = क म + (क म च्या पदसंघ) + (परिवर्तन पदसंघ)

प्रकरण सोळावे

काल आणि ग्रहांचे शर भोग

४७३. चंद्राची सूक्ष्मांश समीकरणे सोडवून चंद्राचा शर, चंद्राचे भूमध्यापासून अंतर आणि चंद्राचे भोग (मध्यम आणि स्पष्ट) याची समीकरणे मागच्या प्रकरणात सिद्ध केली आहेत. ही समीकरणे अनुमानावळची शास्त्रानुसार पथ करण स्यांगीकरण पद्धतीने सिद्ध केली आहेत. अनुमानावळची न्यायशास्त्र ह्या विषयावर स्वतःच अगा शत्रु महाराष्ट्र माघेन जरी नाही तरी श्री. रावत्री शास्त्री देवकुळे यांनी 'भूमितीची पूर्णणिका' या नावाचा जो ग्रंथ लिहिला आहे त्यात ह्या विषयाचे मागोमाग विवेचन केलेले आहे. त्या ग्रंथाचे अवलोकन केल्यात ह्या ग्रंथात जी गणिताच्या निष्ठांनाच्या सिद्धांतांची पद्धति वापरली आहे तिचे महत्त्व सहज थ्यानी येईल.

४७४. ह्या ग्रंथांत गणित शास्त्रांतर्गत जे सिद्धांत सिद्ध केले आहेत ते सर्व सामान्य व अव्यक्त संख्या निदर्शनाकरिता घेऊन सिद्ध केले आहेत. आणि ते तसेच करावे लागतात. गेल्या प्रकरणात जे चंद्रगतीचे सिद्धांत सिद्ध केले आहेत ते सामान्य गेल्या घेऊनच केले आहेत. म्हणून वरची समीकरणे अद्यापि सुध्दावस्थेतच आहेत. त्या समीकरणांना प्रत्यक्ष शर भोग तयार करण्याचे स्वरूप ह्या प्रकरणात द्यावयाचे आहे. मागे यांत्रिकेल्या सामान्य अव्यक्त संख्या ठ, ल, इ आणि ई ह्या आहेत. तसेच अ आणि अं ह्याही संख्या अव्यक्तच आहेत. ह्या संख्या विशेष संख्यानीं आणि मातृवाचक नसतील त्या इष्ट परिमाणांनी कशा दाखवावयाच्या याचा आता विचार करावयाचा आहे.

४७५. वरच्या सामान्य संख्याची माने ठरविण्याकरिता वेधाची आवश्यकता असते. वेधाशिवाय त्या सिद्ध होत नाहीत. वेध अनेक प्रकारचे आहेत. व ते वेध घेण्यास उपकरणेही अनेक प्रकारची आहेत. साध्या हातापासून तो वेध शास्त्रेतील मध्याद यंत्रपर्यंत वेध उपकरणे अनेक आहेत. तसेच दुर्बिणी व त्यांना जोडलेली इन्वेर्टायगल, मूरल सॅफेल, प्रग्रासिमथ वगैरे यंत्रे होत. ही साधने कितीही उत्तम असो, कितीही सूक्ष्म असो त्यांनी वरच्या लेखात सांगितलेल्या अव्यक्त संख्याची माने सूक्ष्मतर सूक्ष्मतर अशी राखीव ठरविता येणे शक्य नाही. त्या कार्यास गणित शास्त्रांतर्गत सिद्धांताचीच आवश्यकता असते. ह्या सिद्धांताच्याच योजनेने स्थूल वेधावरून सूक्ष्म माने ठरविता येतात. हा विषय एका स्वतंत्र ग्रंथात प्रणिधान करण्यासारखा सितीर्ण आहे. विचारपूर्वक पाहता ह्या स्थानी, वरच्या लेखात वर्णिलेला ठ, ल आदिकरून संख्या वेधांत कशा सिद्ध कराव्या ह्याचे प्रोत्साहन

करणे आवश्यक आहे. परंतु हे विस्तीर्ण कार्य एकाच व्यक्तीकडून होणे शक्य नसल्यामुळे येथे तसे कांही केले नाही. तथापि त्या विषयाला 'वेध विज्ञान' हें नांव देऊन कांही भाग लिहिले आहेत.

४७६. वेध आणि गणितातर्गत सिद्धांत यांनी सिद्ध केलेली माने वेध विज्ञान शास्त्रावरून ध्यावयाची ती येथे घेऊन आहोत. वेधसिद्ध मानें घेताना तत्पद्धती कांही गोष्टींचा खुलासा करणे प्राप्त आहे. ती मानें स्वीकारताना त्या मानाचे परिमाण आणि सख्या, काल आणि त्याचा आद्यक्षण, स्थल किंवा रेखा ह्यांतील विंदु याचा विचार केला पाहिजे. ह्यासंबंधी विचार करिताना सूर्येन्दुस्थानमान ह्या ग्रंथातील परिमाणा आणि संकेत हीं आधीं पहावी.

निरयण गणनेचे आरंभस्थान

४७७. स्वस्थ पदार्थांचें स्थान दाखविण्यासाठी जी मोजणी करावी लागते ती मापन करण्यासाठी, ती मोजणी कोणत्या विंदुपासून केली हे दाखविण्यास एक विंदु निश्चिन करावा लागतो. त्यास आरंभस्थान असे म्हणतात. पाश्चात्य गणक वसंतसंपात विंदु हें आरंभस्थान घेतात. आणि भारतीय सिद्धांतकार आणि ज्योतिषास्त्रज्ञ निरयण आरंभस्थान घेतात. ह्या ग्रंथात सूर्यसिद्धांतोक्त पौष्णांत विंदु आरंभस्थान घेतले आहे. पौष्णांताची व्याख्या अशी की, रेवती योगतारा आणि उत्तर कदंब यांमधून गेलेले वृत्त क्रान्तिवृत्ताला ज्या विंदूत छेदिते त्या विंदूला 'पौष्णांत' असे अन्वर्थक म्हटले आहे. यावरून भोग मानण्याचे कामी पौष्णांत आणि रेवती योगतारा (चैजयंति) हे भिन्न नाहीत. कोणत्याहि विंदूचा शर त्याच्या क्रान्तिवरून ठरवावा लावतो. स्वतंत्रपणे शर मोजणे अशक्य आहे. आणि ह्या कामी रेवतीची परमक्रांति ही अवश्य घ्यावी लागते. आपल्या प्राचीन गणकांनी रेवतीची परम क्रान्ति २४ अंशाला कांही कमी मुमारे २३ अंश ५० कला इतकी घेतल्यामुळे रेवती योगताराचा शर ० अंश ० कला असा दिसला. वस्तुतः त्यांनी २३ अंश ३७ कला रेवती परमक्रांति घेतली असती तर शुद्ध वेधानें १३ कला शर आला असता. पौष्णांत म्हणजे रेवती योगतारा होय, हे अनेक प्रमाणांनी सिद्ध होते.

४७८. ज्योतिर्गणितांत वेधाने ज्या गोष्टी ठरवाव्या लागतात त्यातील पुष्कळ मानें सूर्य सिद्धांतातील मानास वीज सस्कार करून घेतली आहेत. आणि कांहीं पाश्चात्य ग्रंथांतून घेतली आहेत. ही मानें शलिवाहन शक १८०३ चैत्र शुद्ध प्रतिपदा बुधवार उज्जयिनि मध्यमाहोदय काल ह्या क्षणीची आहेत. त्या सर्व संख्या खाली दिल्या आहेत.

आरंभस्थान

पौष्णांत रेवती योगतारा (वैजयंति)

अयनांश शके १८०३ चैत्र शुद्ध प्रतिपदा

म्हणजे

पौष्णांत आणि वसंत संपात यामधील अंतर १८° १२' ५५".४
अयनांश वार्षिक वृद्धि +५०.२ विकला.

वसंत संपात विदूशी क्रांतिवृत्त आणि विषुववृत्त यांच्या छेदन बिंदूला कोन शके
१८०३ ह्या शकात २३ अशा २७ कला १७'३७ विकला होता. याची वार्षिक
वृद्धि -०".४७६ आहे. म्हणजे हा कोन प्रतिवर्षी ०.४७६ विकला कमी होतो.

शके १८०३ चैत्र शुद्ध प्रतिपदा

बुधवार उज्जयिनिमध्यमार्कोदय या क्षणीचे
निरयन मध्यम भोग

कोष्टक अंक (१)

ग्रह	ग्रहाचे मध्यम भोग	केद्र मन्त्रिधान मध्यम भोग	कक्षापात मध्यम भोग	वक्षेधी मध्यम केन्द्रच्युति
रवि	... ३४९.३३६१	२६२.६५७		०१६७७५१
चंद्र	... ३४७.८५१२	२७२.९३९	२४३.७२५	०५४८४४२
बुध	... २०५.२९८६	५७.३९८	२८.५३८	२०५६१७८
शुक्र	... १४८.९६६६	१११.४८१	५७.५३१	००६८१८३
मंगळ	... २८५.४०४६	३१५.६५३	३०.४२०	००३२५२८
गुरु	... १०.३६१९	३५४.२०५	८१.०५०	०४८२२३५
शनि	... १८.८६०६	७२.४९४	९४.४९०	०५६०२६५
हर्षाल	... १४५.६४३२	१५०.४७५	५५.०९३	०४६६००६
नेपच्यून	... २५.९३०४	२९.४६१	११२.३०३	००८७१९३

नाम	ग्रहादिकाची म. गति दिनगति अंश	केन्द्र मल्लियान मध्यम गति अंश	वक्षापान मध्यम ग. अंश	प्रकृत्यंश भूमि एकां
रवि	० १८'५६०००८	+००३१२५	..	३५४९३६००
चंद्र	१३०१७६३५८०९	+०११३६६३२	—०५२९९२४	००१३३९९
बुध	४ ०९०३३८७१	+००१६२	—००२५६	००७२९
शुक्र	१०६०२१३०५७	—०००९	—००५६०४	००१०१
मंगळ	० ५२४०३२९९	+००४३	—००७०	००१३२४
गुरु	००८३०९१२७	+००१८४	—००४४२	३३८०७१८
शनि	००३३४५९६७	+००५३६	—००५४३	१०१०३६४
हस्त	००११७३१४०	+०००६३	—०१००१४	१४०२५१
नेपच्यून	०००५९८३३६	१८०१००

ग्रहांचे प्रदक्षिणाकाल वर्गणे

कोष्टक अंक (३)

ग्रह	प्रदक्षिणाकाल मध्यम सौरदिन	कक्षीय वृहदक्षि अंश	महत्तम अंश	शराची वार्षिक वृद्धि अंश
रवि	३६५.२५६३७४४७	१.०००००००	०	..
बुध	२७.३२४६६४४४८	४६७५२००.०	५.४३३४४	..
शुक्र	८७.९६९२८२४	०.७७००७४	७.००५७५	००००५०
मंग	२२४.७००७७५४	०.०२३३३३३७	३.३०२८६	००००२०
मंगळ	६८६.४४४४५६४	१.५२३३६४१	१.८५४५२	— .०००००३
गुरु	४३३२.५४४४४३२	५.०२७६७	१.३०४४४	— .००००६४
शनि	१०७५४.२४४७१०६	९.५३८८५०	२.४४४४२	— .०००००४२
हस्त	३०६८६.८२०५५५६	१९.४८२३४	०.७७४७८	+ .०००००८
नक्षत्र	६०१२८.७००००००	३०.०३६२७	१.७८३०५	..

४७९. वरच्या लेखात दिलेलीं मानें ही ठरविलेल्या एका क्षणीची आहेत. ग्रहादिकाचे मध्यम भोग इच्छिलेल्या क्षणी किती असतील हे आपणांस ठरवितां आले पाहिजे. ग्रहादिकाची कालाच्या एक प्रमाणात गति किती ह्या दिला आहेत, तेव्हां वरचा ठराविक क्षण आणि इच्छिलेला क्षण यामध्ये कालात्मक अंतर किती आहे हे समजले तर इष्ट क्षणी ग्रहाचे मध्यम भोग समजतील. दिलेल्या ठराविक क्षणी ग्रहाचे मध्यम भोग याम क्षेत्रक म्हणू व त्याम क्ष हें अक्षर योजू, कालात्मक अंतर क आणि एका काल परिमाणातील गति ग किंवा स तेव्हा—

$$\text{मध्यम ग्रह} = \text{क्ष} + \text{कम.}$$

४८०. दोन क्षणामधील गेलेला काल वर्ष, मास, दिवस असल्या परिमाणानी दाखविला तर तो निश्चित होत नाही कारण वर्षाचे मास १२ किंवा १३ होतात आणि मासाचे दिवस ३० किंवा २९ होतात. यास्तव दोन क्षणामधील गेलेला दिवस घट्टि आणि पळे ह्याच परिमाणांनी दाखवावा लागतो. यास्तव कालांतराचे चंद्रमास तिथि यावरून तिथि करून त्याचे दिवस करावे लागतात. ह्या दिवसाच्या संख्येला अहर्गण दिनगण अशी नावे ठेविलेली आहेत. चक्र अहर्गण दिनगण या विषयाचे उपपादन सूर्येंद्रु नामक पुस्तकात विस्तृत रीतीने केलेले आहे. त्या उपपादनात उत्तम ठरलेले चक्र १६० वर्षांचे आहे. त्या चक्रास मधुसूदन चक्र हे नाव दिलेले आहे. ह्या चक्रान नियमित वर्षक्रमाकी नियमित अधिकमास येतो. या विषयामंबंधी विशेष सर्वाधिकरण सूर्येंद्रुस्थानमान ह्या पुस्तकात पहावे. लेखाक ४७४ मध्ये ठ ल इ इत्यादि सामान्य सख्या व्यक्त सख्यानी कशा दाखवावयाच्या हे आता पाहू.

४८१. आता आपण ठ ल आदि करून सामान्य सख्या विशेष सख्यानी कशा दाखवितां येतात हें पाहू.

(१) ठ हे रवीच्या मध्यम गतीचे चंद्राच्या मध्यमगतीशी असलेले गुणोत्तर आहे. गुणोत्तर हें भाव सख्यात्मक असते. अर्थात ह्या संख्येचे परिमाण एक हें असतें आणि एक हे सख्या परिमाण ह्या त्या वस्तु परिमाणाशी योजना येते. त्या आधारे परिमाण पुढे योजू. प्रथम ठ ही संख्या किती ते ठरवूं.

$$\text{ठ} = \text{सूर्याची मध्यम गति} \div \text{चंद्राची मध्यम गति}$$

$$= \text{चंद्राचा प्रदक्षिणाकाल} \div \text{पृथ्वीचा प्रदक्षिणा काल}$$

[लेख ३७६ पहा]

वरच्या कोष्टक अं. (३) मध्ये चंद्र-सूर्याचे प्रदक्षिणाकाल दिले आहेत त्यावरून—

$$\text{ठ} = २७.३२१६६१४ \div ३६५.२५६३७४४$$

$$= ०.०७४८०१३५.$$

(२) ल ही चंद्राच्या महत्तम शराची स्पर्शरेषा आहे, आणि चंद्राचा महत्तमशर ५ अंश ८ कला ४७.९ विकला असतो. म्हणून

$$ल = स (५^{\circ} ८' ४७'' . ९) = ०.०९००६८१.$$

(३) इ ही चंद्रकक्षेची केंद्रच्युति आहे. अर्थात इ ही गुणोत्तराची संख्या आहे आणि ती सख्या वरच्या कोष्टक अंक (१) मध्ये दिली आहे.

$$इ = चंद्रकक्षेची केंद्रच्युति = ०.०५४८४४२$$

(४) वरच्या प्रमाणेच ई ही संख्या आहे

$$ई = मू कक्षेची केंद्रच्युति = ०.०१६७७५१.$$

$$(४) अ = \frac{१}{म} - \frac{१}{(१ - ई')} \quad [\text{लेख १७८}]$$

$$अ = \frac{१}{म} - \frac{१}{(१ - इ)} \quad [\text{लेख १७८}]$$

तेव्हा

$$\begin{aligned} \frac{अ}{अ} &= \frac{१ - ई'}{१ - ई} \cdot (१ - ई' - ई) \times ०.००२५३८८. \\ &= (१ - ०.००३०० + ०.०००२२) \times ०.००२५३८४ \\ &= ०.००२५३ \end{aligned}$$

४८२. दोन विद्वमधील अंतर ही रेषा असते, त्याप्रमाणे दोन दिशांमधील अंतर म्हणजे कोन, हाही वक्र रेषेने मापितो येतो. दोन पदार्थांपैकी एकाचे दुसऱ्यावरील आकर्षण हेही रेषेनेच मापिताने. कोनाचे मापन वृत्त परिमाणाने करतात. लेखाक ४८ यामध्ये वृत्त परिमाणाचे स्पष्टीकरण केले आहे. यावरून

$$भगण = ३६० \text{ अंश} = २\pi \text{ वृत्त परिमाण.}$$

$$राशि = ३० \text{ अंश} = \frac{\pi}{६} \text{ वृत्त परिमाण.}$$

$$नक्षत्र = १३\frac{१}{३} \text{ अंश} = \frac{२\pi}{२७} \text{ वृत्त परिमाण.}$$

४८३. वरच्या विवेचनावरून कळून येईल की ठ ल इ ई ह्या केवळ सख्या म्हणजे भाव सख्या आहेत. त्या सर्वांना किंवा त्याच्या बेरीज-वजावाकीला किंवा

गुणाकार-भागाकाराना एकच परिमाण देना येतें. यास्तव त्यास वृत्त परिमाण हा एक घेऊ आणि प्रत्येक सख्या वृत्त परिमाणाने दाखवूं. एका वृत्तपरिमाणाच्या विकला—

$$१ \text{ वृत्तपरिमाण} = २०६२६४ \cdot ८०६२ \text{ विकला.}$$

$$\text{घातांक } २०६२६४ \cdot ८०६२ = \overset{+}{५} \cdot ३१४४२५१$$

$$\text{घा ठ} = \text{घा } (\cdot ०७४८०१३५) = \overline{२} \cdot ८७३९०९३$$

$$\text{घा ल} = \text{घा } (\cdot ०९००६८१) = \overline{२} \cdot ९५४५७१०$$

$$\text{घा इ} = \text{घा } (\cdot ०५४८४४२) = \overline{२} \cdot ७३९१३०७$$

$$\text{घा ई} = \text{घा } (\cdot ०१६७७५१) = \overline{२} \cdot २२४६६५०$$

या घाताकाच्या सहाय्याने ठ^३ई किंवा ठ ल^३ई अगर ठ^३असल्या पदांची किंमत सहज काढता येईल.

उदाहरणार्थ ठल^३ई ह्या गुणकाची विकलात्मक किंमत काढून दाखवितां. वगतिमक जी संख्या असेल तिचा घातांक दोन वेळा घ्यावा.

घा ठ = $\overline{२} \cdot ८७३९०९३$	घा ठल ^३ ई = $\overline{५} \cdot ५२२१८२०$
घा ल = $\overline{२} \cdot ९५४५७१०$	घा वृ. वि. = $\overset{+}{५} \cdot ३१४४२५१$
घा ल · २ = $\overline{२} \cdot ९५४५७१०$	घा (ठल ^३ ई) = $\overline{०} \cdot ८३६६०७१$
घा इ = $\overline{२} \cdot ७३९१३०७$	ठल ^३ ई = $\overline{६} \cdot ८६४ \text{ विकला.}$

$$\text{घा ठल^३ई} = \overline{५} \cdot ५२२१८२०$$

४८४. प्रत्येक पदाचें केंद्र आपण पयपर्यंत जे लिहिन आलो आशेन त्यातील स्थीर पद आपण गालिली आहेत. म्हणजे स्थीर लिहिलीं नाहीत पण ती त्यात आहेत. सूक्ष्माय समीकरणान विकाारी पद आणि अवलंबी पद या व्यतिरिक्त सर्व संख्या स्थीर असल्याने तें समीकरण सोडविता येते. म्हणून प्रत्येक चल मध्येची गति विकाारी पदाच्याच रूपानें दाखवावी लागते. यामुळे केंद्राचें स्थान विस्तार पावले आहे. आता तो विस्तार कमी करून प्रत्येक केंद्राची समस्या कशी तयार करावी याचा आता आपण विचार करू. याकरिता प्रमुख केंद्राचें स्पष्टीकरण करू.

४८५. ण व आणि ण क म ही केंद्रे आपण योजिली आहेत याचें स्वरूप जाणण्याकरिता ३८३ वा लेख पहा. ह्या दोन्ही केंद्रामध्ये उ हे स्थीर पद आहे. म्हणजे ती केंद्रे खाली दिल्याप्रमाणे आहेत.

(णकम — उ) आणि (णद्र — उ)

ह्या केंद्रामधील ण ही समस्या केंद्र मन्निधानाचें चलन दाखविण्यासाठी योजिली आहे. (लेख ३७८ व ३७९ पहा). त्या स्थानी दाखविले आहे की:

चंद्रोच्चगति म्हणजेच चं. केंद्र मन्निधान गति - चं. म. गति (१-ण) तेव्हा.

$$\begin{aligned}\text{णकम} - \text{उ} &= -\text{कम} + \text{णकम} + \text{कम} - \text{उ} \\ &= -\text{कम} (१ - \text{ण}) + \text{कम} - \text{उ} \\ &= \text{कम} - \text{उ} - \text{कम}(१ - \text{ण}) \\ &= \text{कम} - \left\{ \text{उ} + \text{कम}(१ - \text{ण}) \right\}\end{aligned}$$

= मध्यमचंद्र क काली — (क — ० अमता केंद्र स — क कालातील के. स. गति)

= क काली म. चंद्र — क काली चं. केंद्रमन्निधान

ह्यावरून लक्षात येईल की णकम याचा अर्थ क कालातील मध्यमचंद्र यातून वजा त्याच क्षणीचें चंद्राचें केंद्र मन्निधान. हा आहे. ह्या केंद्राम पूर्वकालीन गणकानी मदकेंद्र असें नाव दिले आहे. तेच मी माझ्या ग्रंथांमधून वापरले आहे. हे केंद्र सक्षेपे एकाक्षरानें दाखवावे हें मनात आणून त्याम मं हें अक्षर योजिले आहे. आणि णव ह्याचाही अर्थ असाच आहे तो अमा को व हा स्पष्टचंद्र ज्या क्षणीचा आहे, त्यात त्याच क्षणीचें केंद्र मन्निधान वजा करून आलेली बाकी. पण मध्यमचंद्र आणि स्पष्टचंद्र समान असे सर्वदा नमनान पण त्याचे वैपम्य पदरूपाने काढून टाकले आहे. म्हणून णव हें केंद्रसुद्धा मं ह्या अक्षरानें दाखविता येते.

४८६. आता एक म आणि एव याचा विचार करू.

$$\begin{aligned} \text{एक म} - \text{रा} &= - \text{कम} + \text{एकम} + \text{कम} - \text{रा} \\ &= + (\text{ए} - १) \text{कम} - \text{कम} - \text{रा} \\ &= \text{कम} - \text{रा} + (\text{ए} - १) \text{कम} \\ &= \text{कम} - \left\{ \text{रा} - (\text{ए} - १) \text{कम} \right\} \end{aligned}$$

— मध्यमचंद्र क काली (क ० असता राहु क कालातील राहुगति)

== क कालातील मध्यमचंद्र — क कालातील राहु. ह्या केंद्रास विराहुचंद्र हे नांव देऊन वि हे नामाक्षर योजिले आहे.

४८७. (२—२४) कम—२घ या केंद्रात

२कम—२ठाम २ध - २(मध्यमभद्र - मध्यमरवि) चंद्र सूर्याच्या वजाबाकीवरून यास तिथिकेंद्र असे नांव आहे तसेच

(२—२४—ण) कम--२घ+३ या केंद्रांत.

{(२ २४) कम—२घ} — णकम + ३ - तिथिकेंद्राची दुपट यातून मद्र-केंद्र वजा करणे असा अर्थ आहे या केंद्रास च्युतिकेंद्र असे नांव आहे. (म.घ—म. रवि) यास मध्यजें तिथिकेंद्रास नि हे नामाक्षर योजिले आहे. आणि च्युतिकेंद्रास च्यु हे नामाक्षर योजिले आहे.

त्याचप्रमाणे ठकम + घ—३ हे रवीचें मद्रकेंद्र आहे यास सं हे नामाक्षर योजिले आहे.

मं, वि, नि, च्यु आणि सं ही मुख्य केंद्रे होत इतर केंद्रे याच केंद्राच्या काही पटीच्या मयोग वियोगाने बनतात. तेव्हा, ही नामाक्षरे योजून आपणाम केंद्रे लिहिली पाहिजेत.

४८८. लेखाक ४६५ मध्ये जें क म चें समीकरण लिहिले आहे, त्या समीकरणावरून सिद्ध होते की, जर आपणाम स्पष्टचंद्र माहित असेल तर तो ज्या क्षणीचा असेल त्याक्षणी मध्यमचंद्र किती हें आपणाम कळेल. त्या मध्यमचंद्राला म ह्या चंद्राच्या मध्यमगतीने भागिले तर मध्यमचंद्र ० ज्या क्षणी होत त्या क्षणापासून स्पष्टचंद्र ज्या क्षणीचा त्या क्षणपर्यंत गेलेला काल समजेल. जसें—

कम = व — २ इ भुण व . $\frac{1}{2}$ ठं भू (२—२४) व
किंवा कम = व — २ इ भुमं — $\frac{1}{2}$ ठं भू २ ति + यास म
ने भागिले तर

$$\text{कम} = \frac{\text{व}}{\text{म}} = \frac{२६}{८} \text{ भुमं} - \frac{११}{८} \frac{\text{ठ}}{\text{म}} \text{ भु र ति} + \dots\dots\dots$$

ह्यावहन वळणे की व हा काल आहे व ती काल व हा मध्यमचंद्र अमना तर जो काल आला अगता नितकाच आहे. आणि म, रवि, वगैरे वेद $\frac{\text{व}}{\text{म}}$ ह्या पदाने जो काल दाखविला जाईल त्या कालाची अगता. या विषयाचा विचार पुढे करू. आता आपण कम चें समीकरण सामान्य सध्यात्मक गुणकाचें आहे ते विकलात्मक गुणकाचें करूं.

४८९. विकलात्मक गुणकाचें कम चें समीकरण.

कम = खालचा पदसमूह

व — २२६२४.८४ भुमं	;	+ ४७६.३८ भु रमं
— ११.३४ भु रमं		+ ०.५८ भु रमं
+ १३१.८६ भु ति		— १९२४.९६ भु रति
— ०.९६ भु रति		+ ७.१७ भु रति
— ४६९६.६५ भु च्यु		+ ७.१५ भु रच्यु
+ ६७९.७९ भु रमं		+ ९.७२ भु रमं
+ ४१०.९० भु रवि		+ ०.४२ भु रवि
— १८६.१८ भु (रति-रमं)		— ७.०४ भु (रति+रमं)
+ १४४.०० भु (रति+मं)		+ १४.७८ भु (रति—मं)
— १८२.९६ भु (च्यु—सं)		+ ५५.७० भु (च्यु+सं)
— १२४.१२ भु (रति—सं)		+ १२.५० भु (रति+सं)
— ७१.१८ भु (मं—सं)		— ६२.०४ भु (मं—सं)
+ ९९.२९ भु (रवि—मं)		— २२.९४ भु (रवि+मं)
— ५९.२१ भु (रति—रवि)		— १.१९ भु (रति+रवि)
— ३.०० भु (रति+रवि—मं)		+ ५.१४ भु (रति—रवि—मं)
— १५.२२ भु (रति—रमं+सं)		— १०.२५ भु (रति—रमं—सं)
— ६.५९ भु (रति—रवि+सं)		— ७.२४ भु (रति—रवि—सं)
+ ५.५६ भु (मं—रमं)		— ६.१८ भु (मं—रमं)
+ ३.८६ भु (रवि+सं)		— ३.८६ भु (रवि—सं)

—७.४८ मुं (रति—२सं)	—३.१६ मु (ति+मं)
+४.९६ मु (ति—मं)	+०.९४ मु (रवि+२मं)
+०.४२ मु (रति+मं—सं)	+१.२२ मु (२मं—सं)
—१.०६ मु (रति+मं+सं)	—१.२२ मु (२मं+सं)
—९.०१ मु (रति—रवि+मं)	

४९०. केन्द्र परिवर्तन कार्यानि जो पदसंघ उत्पन्न झाला आहे त्या मंधानीक प्रत्येक पदाची विकलात्मक किंमत खाली दिली आहे:—

+१२४५.४३ मु २मं	+२५.५२ मु ३मं
—८.३८ मु रवि	+२.३० मु ४मं
+२२.९४ मु (रवि—मं)	—६८.८२ मु (रवि+मं)
—३.१८ मु (२ वि+२मं)	+०.८५ मु ४वि
+४४०.४६ मु रति	—१४.७१ मु च्यु
+३.२४.८१ मु (रति+मं)	+२६.०२ मु (रति—२मं)
+३.२५ मु (रति+२मं)	+८.३३ मु (रति—३मं)
—४५.७५ मु (मं+सं)	+३९.३९ मु (मं—सं)
—६.४३ मु (२मं+सं)	+६.४३ मु (२मं—सं)
+३.८६ मु (रति—रवि+मं)	+०.६४ मु (२ ति—रवि—मं).
—९.६५ मु (रति+रवि+मं)	—६.४३ मु (२ ति+रवि)
+१५.३१ मु (रति+मं+सं)	—२.१८ मु (रति+मं+सं)
+१९.६३ मु (रति—सं)	+११.८३ मु (रति+सं)
+०.५२ मु (मं—२मं)	—०.५२ मु (मं+२मं)
+०.८६ मु (च्यु—सं)	—५.२४ मु (च्यु+सं)
+१.५८ मु (रवि—मं)	—१.५८ मु (रवि—सं)
+३६.५८ मु (४ति—मं)	+२४.४० मु २च्यु
+१२.२१ मु ४ति	

४९१. कम चा विकलात्मक पदसंघ जो ४८९ व्या लेखांत दिला आहे, त्याला — १ ने गुणून म्हणजे पद घन असेल तर ऋण आणि ऋण असेल तर धन करून त्यान, वरचा केन्द्र परिवर्तन कार्यानि उत्पन्न झालेला पदसंघ घनर्ण केला म्हणजे व ह्या स्पष्ट

चंद्राबरोबर असलेला पदसंघ तयार होतो. त्याप्रमाणे कृति करून ग्यालचा पदसंघ लिहिला आहे—

ब=सालचा पदसंघ

कम + २२६२४.८४ भु मं	+ ७६९.०५ भु २मं
३६.८६ भु ३मं	+ १.७६ भु ८म
- १३१.८६ भु ति	+ २३६५.४२ भु २ति
+ ०.९६ भु ३ति	+ ५.०४ भु ४ति
+ ४६०१९३ भु च्यु	+ १७.२५ भु २च्यु
- ६७९.७९ भु सं	- ९.७२ भु २सं
- ४१९.२८ भु २ वि	- १.२७ भु ४ वि
+ २१३.२० भु (२ति-२मं)	+ १०.२९ भु (२ति+२मं)
+ १८३.८२ भु (च्यु-सं)	- ६०.९४ भु (च्यु+सं)
+ १८०.८१ भु (२ति+म)	+ ३६.५८ भु (४ति-म)
+ १४३.७५ भु (२ति-स)	- २४.३३ भु (२ति+स)
+ ११०.५८ भु (मं-स)	- १०७.७९ भु (मं+स)
- ७६.३५ भु (२वि-म)	- ४५.८८ भु (२ वि+म)
+ ५९.२१ भु (२ति-२वि)	- ५.२४ भु (२ति+२वि)
+ १५.२२ भु (२ति-२म + म)	+ १०.२५ भु (२ति २म म)
+ ५.७८ भु (२ति-२वि-म)	+ १२.८७ भु (२ति-२वि + म)
- ६.६५ भु (२ति+२वि-म)	+ ८.३३ भु (२ति-३म)
+ ७.२४ भु (२ति-२वि-स)	+ ६.५९ भु (२ति-२वि+सं)
+ ७.८९ भु (२ति + म-स)	- १.१२ भु (२ति + म+मं)
- ५.२१ भु (२मं+सं)	+ ५.२१ भु (२म-स)
+ ६.७० भु (मं-२सं)	- ६.०८ भु (मं + २स)
+ २.२८ भु (२वि-सं)	- २.२८ भु (२वि+स)
+ ७.४८ भु (२ति-२स)	+ ३.१६ भु (ति+म)
- ४.९६ भु (ति-मं)	- ०.९४ भु (२वि+२म)

४९२. चंद्राचा शर साधण्याचे समीकरण तयार करावयाचे आहे. ४३६ व्या लेखात शराचे समीकरण चवथ्या पदवीचे तयार केले परंतु त्यातील अव्यक्त सख्या काढून त्याच्या व्यक्त किमती त्या जागी आणिल्या पाहिजेत. त्या समीकरणात श

ही शराची समीरेपा (त्रिकोण मिति त्रिपयक गुणोत्तर) आहे. तेव्हां प्रथम त्याचें वृत्तपरिमाण केले पाहिजे. हें कार्य लेख २३४ च्या आधारे करिता येते. त्याप्रमाणे

$$\text{शर (वृत्त परिमाण)} = \text{श} - \frac{१}{३}\text{श}^२ + \frac{१}{५}\text{श}^३$$

आपल्या गणिताची मूढमत्ता चवथ्या पदवीपर्यंत आहे. म्हणून वरच्या $+\frac{१}{५}\text{श}^३$ ह्या पदाची आवश्यकता नाही. म्हणून $-\frac{१}{३}\text{श}^२$ ह्या पदाची किमत्ता काढून ती श मध्ये वजा केली म्हणजे वृत्त परिमाणान्मक शर होईल. आता

$$-\frac{१}{३}\text{श}^२ = \frac{१}{३} \left\{ (\text{श}_१)^२ + ३(\text{श}_१)(\text{श}_२) + ३(\text{श}_२)(\text{श}_३) \right\}$$

$$= \frac{१}{३} \left\{ \text{ल}^३\text{भु}^२\text{एव} + ३\text{ल}\text{भु}\text{एव} + ३\text{ल}\text{भु}(\text{२}-\text{२ठ}-\text{ए})\text{व} \right\}$$

$$\frac{१}{३}\text{श}^२ = \left[-\frac{१}{३}\text{ल}^३\text{भु}\text{एव} + \frac{१}{३}\text{ल}^३\text{भु}\text{३एव} - \frac{१}{३}\text{ल}^३\text{ठल}^३\text{भु}(\text{२}-\text{२ठ}-\text{ए})\text{व} \right. \\ \left. + \frac{१}{३}\text{ल}^३\text{ठल}^३\text{भु}(\text{२}-\text{२ठ}+\text{ए}) + \frac{१}{३}\text{ल}^३\text{ठल}^३\text{भु}(\text{२}-\text{२ठ}-\text{३ए})\text{व} \right]$$

ही पाच पदे श च्या किमतीत घनर्ण केली म्हणजे शराचें वृत्त परिमाण ह्याची किमत्ता येईल. त्या किमतीतील ठ ल इ या गुणकाच्या विकलात्मक किमती ४८३ च्या लेखांत दिल्या आहेत, त्या घेऊन प्रत्येक पदाचा विकलात्मक गुणक तयार केला म्हणजे शराचे समीकरण तयार होईल. ह्याप्रमाणें कृति करून शराचें विकलात्मक गुणकाचे समीकरण खाली लिहिले आहे. त्यात वरची पाच पदे घनर्ण केली आहेत.

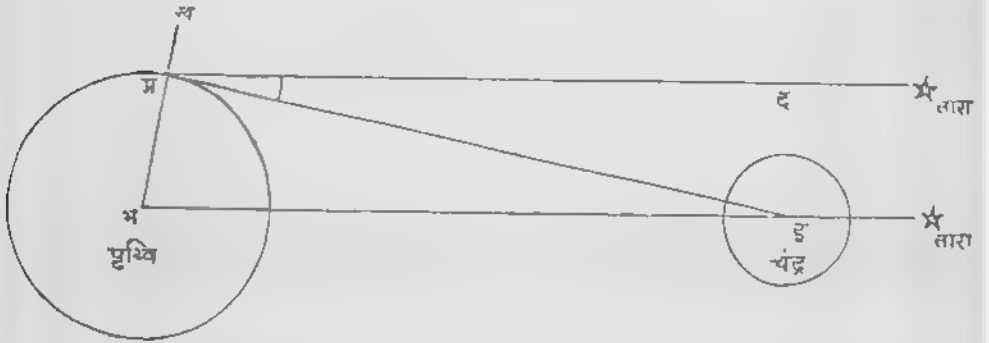
४९३. चंद्राच्या शराचे समीकरण विकलात्मक गुणकाचें हें समीकरण स्पष्ट चंद्रावरून साधिले आहे.

शर = खालचा पदमध

$$\begin{aligned} & + १८५४००२० \text{ भु वि} \quad , \quad ५३३०६४ \text{ भु } \{ \text{वि} - २(\text{म} + \text{र} - \text{रा}) \} \\ & - २५०८९ \text{ भु } (\text{वि} - \text{स}) \quad + २४०२६ \text{ भु } (\text{वि} + \text{स}) \\ & + २५०२२ \text{ भु } (२ \text{ मं} - \text{वि}) \quad - १९०२४ \text{ भु } (२ \text{ ति} - \text{वि} - \text{म}) \\ & + २२००८ \text{ भु } (२ \text{ ति} - \text{वि} - \text{स}) \quad - १००२३ \text{ भु } (२ \text{ ति} - \text{वि} + \text{स}) \\ & + १७०१० \text{ भु } (\text{वि} - \text{मं}) \quad + १२०५६ \text{ भु } ३ \text{ वि} \\ & + ५००० \text{ भु } (२ \text{ ति} - \text{वि} - \text{म}) \quad - ५०७० \text{ भु } (२ \text{ वि} + \text{म}) \\ & + १०४४ \text{ भु } (२ \text{ ति} + \text{वि}) \quad - ३०३३ \text{ भु } (२ \text{ ति} - २ \text{ म} - \text{वि}) \\ & \hline & - ००७१ \text{ भु } (२ \text{ ति} + \text{वि} - \text{म}) + ००१४ \text{ भु } (२ \text{ ति} + \text{वि} + \text{मं}) \\ & + ००६२ \text{ भु } (२ \text{ ति} - \text{वि} - २ \text{ स}) - ००१९ \text{ भु } (\text{वि} - २ \text{ स}) \\ & + ००९८ \text{ भु } (२ \text{ ति} - २ \text{ म} + \text{वि}) - ००४१ \text{ भु } (२ \text{ ति} - ३ \text{ वि}) \end{aligned}$$

चंद्राचे क्षितिज लंबन

४०४. लंबन म्हणजे लांबणे. चंद्राचे वास्तव स्थान गणिताने जे येते ते भूमध्यापासून पाहिले अमता जे आकाशात दिसेल तें असतें. पण आपण पाहणार भूपृष्ठावरून म्हणून दृश्यस्थानान भेद पडतो. त्यामुळे वास्तव स्थानापासून तो दृश्य पदार्थ क्षितिजाकडे लांबलेला दिसतो. हे जे दिशांतर त्याला लंबन म्हणतात. हे लंबन क्षितिजाशी जास्त असून पदार्थ स्वस्वामिकाकडे जमजमा वर येईल तमतमें तें कमी कमी होऊन स्वस्वामिकाकडे शून्य होते. क्षितिजाशीमुद्धा लंबन भिन्न भिन्न होते. पदार्थ भूमध्यापासून जमजमा दूर असेल तमतमें लंबन कमी होत जाते. ह्या संबंधी स्पष्ट वर्णन आकृतीने केले अमता विशेष स्पष्ट होते. म्हणून आकृतिद्वारा खुलासा करितो.



भ हा पृथ्वीचा मध्य आणि इ हा चंद्राचा मध्य आहे. भ स्थानापासून चंद्राचा मध्य भइ दिशेला दिसेल. पण प्रेक्षक जर भ स्थानी नसेल आणि प्र स्थानापासून जर चंद्राकडे पहात असेल तर चंद्र त्याला प्रइ दिशेला दिसेल. पण चंद्र जर फार अंतरावर अमता तर भ आणि प्र ह्या दोन्ही स्थानापासून एकाच ताऱ्याच्या दिशेत दिसला अमता. दोन्ही स्थानापासून पाहिले अमता जे दिशा भिन्नत्व येतें त्यास लंबन म्हणतात म्हणजे दप्रइ ह्या कोनास लंबन असे म्हणतात. चंद्र क्षितिज पातळीत असता जें लंबन दिसतें तें क्षितिज लंबन होय.

४०५. लंबन म्हणजे दप्रइ कोन किंवा प्रइभ कोन होय. ह्या कोनाचे मापन भप्र आणि भइ ह्या दोन रेपानी होते. इप्रभ कोन काटकोन आहे. कारण क्षितिज पातळी भ ख ह्या ख स्वस्तिकाच्या दिशेशी काटकोन करणारी अमते. आता दप्रइ कोन हा भइप्र कोनाबरोबर आहे. तेव्हां

$$\frac{\text{प्र भ}}{\text{भ इ}} = \text{भुज ज्या (भ इ प्र) कोन} = \text{भुज ज्या (लंबन)}$$

चंद्राचा हा भइप्र कोन मध्यम मानाचें ५७ कला १-८ विकला असतो. मध्यम मानाचे म्हणजे भइ हे अंतर मध्यमानराइनके असेल तेव्हाचा कोन. प्रभ ही रेखा भूविज्ञ्या आहे म्हणजे ही रेखा लावीच्या मानाचे स्थिर म्हणजे कमीजास्त न होणारी आहे. तेव्हा चंद्राचें क्षितिज लवत सर्वदा चंद्राच्या भूमध्यापासून अमलेल्या अंतरावर अवलंबून आहे. चंद्राचें भूमध्यापासून अंतर त्याच्या कक्षेतील प्रत्येक स्थानीं किती असते हें आपण मिद्ध वेळे आहे. चंद्र मध्य आणि भूमध्य यामध्ये अंतर र परिमाणे आहे असे आपण घेतले आहे. आणि $r = \frac{1}{v}$ मानिला आहे म्हणजे

$$\frac{1}{r} = v \text{ हा अपूर्णारु आहे. } v \text{ ची किमत चंद्र कक्षेच्या केन्द्रास भुजाधारे दायविली}$$

आहे. तें समीकरण ४५१ ह्या लेखात आहे. त्यातील केद्रे व ह्या स्पष्टचंद्रांनी निर्मिली आहेत. लंबन मिद्ध करण्याला व च्या किमतीची आवश्यकता आहे. ती किमत मात्र मध्यमचंद्राचें केद्र वनवून आणि पाहिजे. स्पष्टचंद्राचे आणि त्यास स्थूल घेतें. यासाठी व ची किमत कम ने मिद्ध केली पाहिजे.

४९६. व चे समीकरण ४९३ व्या लेखात आहे किंवा ४५१ ह्या लेखांत दिले आहे त्याचैकी निगया गदवीची काही निवडक पदे घेतली म्हणजे ती लवनाचे गणिताला पुरगी होतत. ह गमीकरण स्पष्टचंद्राचे माथिलेले तें आपणाला मध्यमचंद्रावरून साधले पाहिजे. यासाठी त्यामधील स्पष्टचंद्राच्या जागी त्याबरोबर अमलेली मध्यमचंद्राचे माथिलेली किमत ठेवू म्हणजे दृष्ट असे गमीकरण तयार होईल. आरभी व ची किमत सामान्य स्वरूपाची घेऊं. ती अशी

$$v = \text{कम} + (v_1) + (v_2)$$

$$\text{णव} = \text{णकम} + \text{ण} (v_1) + \text{ण} (v_2)$$

४५६ ह्या लेखाप्रमाणे म्हणजे

$$\text{को भु घ} \quad (1 \quad 1/2) \text{ को भु अ} - \text{प भु अ} - \text{द भु अ}$$

$$\text{यातील घ} = \text{णव आणि अ} = \text{णकम, तसेंच प} = \text{ण}(v_1)$$

$$\text{को भु ण व} = \text{को भु ण क म} - \text{ण} (v_1) \text{ भु ण क म}$$

$$- \frac{1}{2} \{ \text{ण} (v_1) \}^2 \text{ को भु ण क म} - \text{ण} (v_2) \text{ भु ण क म}$$

$$(v_1) = + २ इ भु ण क म; (v_2) = + (२ इ^२ - \frac{३}{४} इ^२)$$

$$\frac{३}{४} इ^२ \text{ भु २ ण क म}$$

$$\text{आणि ण} = १ \text{ तेव्हां}$$

$$\text{को भु ण व} = \text{को भु ण क म} - २ इ भु ण क म \times \text{भु ण क म}$$

$$- \frac{१}{४} \times ४ इ^२ \text{ भु २ ण क म को भु ण क म} - \text{ण} (v_1) \text{ भु २ ण क म}$$

हयामधील (व.) मध्ये पांच पदे आहेत त्यापामून येणारी पदे.

+ $\frac{1}{2}$ इ^१ {को भु^१ण कम — को भु^१ण कम}

— $\frac{1}{2}$ ल^१ {को भु^१ (२ ए + ण) कम — को भु^१ (२ ए — ण) कम}

+ $\frac{1}{2}$ ठ^१ {को भु^१ (२ — २ ठ + ण) कम

— को भु^१ (२ — २ ठ — ण) कम}

+ $\frac{1}{2}$ ठ इ^१ {को भु^१ (२ — २ ठ) कम

— को भु^१ (२ — २ ठ — २ ण) कम}

— $\frac{1}{2}$ ठ इ^१ {को भु^१ (ण + इ) कम — को भु^१ (ण — इ) कम}

वर निघालेल्या पदाम इ ने गुणून सर्व समीकरण लिहिले तेव्हा

$$\left\{ \begin{array}{l} + इ को भु^१ण कम — इ^१ + इ^१ को भु^१ण कम \\ + $\frac{1}{2}$ इ^१ को भु^१ण कम — $\frac{1}{2}$ इ^१ को भु^१ण कम \\ — $\frac{1}{2}$ ल^१ इ को भु^१ (२ ए + ण) कम \\ + $\frac{1}{2}$ ल^१ इ को भु^१ (२ ए — ण) कम \\ + $\frac{1}{2}$ ठ^१ इ को भु^१ (२ — २ ठ + ण) कम \\ — $\frac{1}{2}$ ठ^१ इ को भु^१ (२ — २ ठ — ण) कम \\ + $\frac{1}{2}$ ठ इ^१ को भु^१ (२ — २ ठ) कम \\ — $\frac{1}{2}$ ठ इ^१ को भु^१ (२ — २ ठ — २ ण) कम \\ — $\frac{1}{2}$ ठ इ इ को भु^१ (ण + इ) कम + $\frac{1}{2}$ ठ इ^१ को भु^१ (क — इ) कम \end{array} \right.$$

आता व च्या किमतीतील दुसऱ्या पदवीच्या पदानील व च्या ठिकाणी कम येईल अशी पदे शोधायची आहेत.

व = कम — २इ भुणकम

ह्यास फ ने गुणून त्याची को मुज्या केली

को भु फ व = को भु फ कम × को भु^१ (२ फ इ भुण कम)

— भु फ कम × भु^१ (२ फ इ भुण कम)

= को भु फ कम — फ इ को भु^१ (फ + ण) कम

+ फ इ को भु^१ (फ — ण) कम

ह्यातील फ च्या ठिकाणी दुसऱ्या पदवीच्या प्रत्येक पदाचा केंद्रगुण केवून पदे काढिली, आणि त्या पदाम ज्याच्या त्या केंद्रगुणकाने गुणिले म्हणजे दृष्ट पदे तयार होतील.

क च्या ठिकाणी २ए, २ — २ठ आणि २ — २उ — ण हे तीन गुणक येतात.

२ ए पासून — $\frac{१}{३}$ ल' इ {को भु (२ ए + ण) कम
— को भु (२ ए — ण) कम}

२ — २ ठ पासून + $\frac{२}{३}$ ठ' इ {को भु (२ — २ ठ + ण) कम
— को भु (२ — २ ठ — ण) कम}

२ — २ ठ — ण पासून + $\frac{१}{३}$ ठ इ' {को भु (२ — २ ठ) कम
— को भु (२ — २ ठ — २ ण) कम}

तिसऱ्या पदवीची पदे व च्या स्थानी कम ठेवून येतील ती पदे घ्यावयाची आहेत.
ह्याप्रमाणे सर्व पदे गोळा करून समीकरण लिहिले. स्थिरपदे जशीची तशीच घेणे.

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned}
 & १ - \frac{३}{४} ल' - \frac{१}{३} ठ' - इ' + इ को भु (ण कम - उ) \\
 & \quad + \frac{१}{३} ल' को भु २ म - \frac{१}{३} ल' को भु २ वि \\
 & + (ठ' + \frac{२}{३} ठ' - \frac{१}{३} ठ ल' + \frac{२}{३} ठ इ') को भु २ ति \\
 & \quad + (\frac{१}{३} ठ इ + \frac{१}{३} ठ' इ) को भु च्यु - - \frac{३}{३} ठ' इ को भु म \\
 & + \frac{१}{३} ठ' इ को भु (२ ति + म) \\
 & \quad + \frac{१}{३} ठ ठ' का भु (२ वि - २ ति) \\
 व - अ & \quad \frac{३}{३} ठ' इ का भु (२ ति - म) \quad \frac{१}{३} ठ' इ का भु (२ ति + म) \\
 & \quad \frac{२}{३} ठ उ ठ को भु (म - म) \quad \frac{२}{३} ठ उ इ को भु (म + म) \\
 & \quad \frac{३}{३} ठ इ इ को भु (च्यु - म) - \frac{१}{३} ठ उ ठ इ को भु (च्यु - म) \\
 & - \frac{३}{३} ठ' उ को भु (२ ए - ण) - \frac{३}{३} ल' ठ को भु (२ ए + ण) \\
 & \quad \frac{१}{३} ठ' का भु म \quad + \frac{१}{३} ठ' को भु २ म \\
 & - \frac{१}{३} ठ \frac{अ}{अ} को भु ति
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

४९३. चद्राचे क्षितिज लवत हे चद्राचे जें मूमध्यापासून अंतर त्या अनरावर अवलंबून असते. हे अंतर मध्यम मानावे

$$\frac{१}{व} = \frac{१}{अ} (१ - \frac{३}{४} ल' - \frac{१}{३} ठ' - इ')$$

हे अंतर कानिनावरील आहे. तें वास्तव पाहिजे आहे म्हणून त्याम $\sqrt{(१ + श')}$ याने गुणिले पाहिजे. येथें श म्हणजे शराची साशंरेषा होय.

आतां

$$\begin{aligned}
 \text{क्षितिज लंबन} &= \frac{\text{भूगोलाची त्रिज्या}}{\text{चंद्राचे अंतर}} = \frac{v}{\frac{1}{v} \sqrt{(1 + s^2)}} \\
 &= v \times v (1 + s^2)^{-\frac{1}{2}} \\
 &= v (1 - \frac{1}{2} s^2) \\
 &= v (1 - \frac{1}{2} l^2 \text{ भु}^2 \text{ एक म}) \\
 &= v (1 - \frac{1}{2} l^2 + \frac{1}{2} l^2 \text{ को भु } 2 \text{ एक म})
 \end{aligned}$$

ह्या समीकरणांतील v ची किंमत ४९६ व्या लेखांत आढे ती समीकरणांत ठेविली. तेव्हा जी पदे येतात ती सर्व घेण्याचे कारण नाही. ज्या फलाचा गुणक १.० विकला आहे अशीच पदे घेणे इष्ट आहे. त्यापेक्षा सूक्ष्म असलेली पदे सोडली तरी चालतील. यास्तव सगली १० पदे घेतली आहेत.

$$\left\{ \begin{aligned}
 &1 - \frac{1}{2} l^2 - \frac{1}{2} l^2 - l^2 \quad \text{२ को भु म} \\
 &+ \frac{1}{2} \text{ को भु } 2 \text{ म} + (\frac{3}{2} l^2 \text{ ठ इ} + \frac{3}{2} l^2 \text{ ठ इ}) \text{ को भु च्यु} \\
 &+ (l^2 + \frac{1}{2} l^2 - \frac{1}{2} l^2 \text{ ठ इ} - \frac{1}{2} l^2 \text{ ठ इ}) \text{ को भु र ति} \\
 &+ \frac{1}{2} l^2 \text{ ठ इ को भु (२ ति + म)} \\
 &+ \frac{1}{2} l^2 \text{ ठ इ को भु (२ ति - सं)} \\
 &+ \frac{1}{2} l^2 \text{ ठ इ को भु (मं - स)} \\
 &\quad - \frac{1}{2} l^2 \text{ ठ इ को भु (म + स)} \\
 &+ \frac{1}{2} l^2 \text{ ठ इ को भु (च्यु - स)} \\
 &\quad - \frac{1}{2} l^2 \text{ ठ इ को भु (२ वि - मं)}
 \end{aligned} \right.$$

ह्या समीकरणाने $a (1 - \frac{1}{2} l^2 - \frac{1}{2} l^2 - l^2)$ ही स्थीर संख्या आहे. ह्या संख्येबरोबर ३४२१.८ विकला मध्यम क्षितिज लंबन आहे. ह्यावरून $a = ३४५६.३$ विकला किंमत येते. ही किंमत समीकरणांत ठेविली तेव्हा —

$$\left\{ \begin{aligned}
 &+ ३४२१.८० & + १८९.५६ \text{ को भु मं} \\
 &+ १०.४० \text{ को भु } 2 \text{ मं} & + २६.१४ \text{ को भु } 2 \text{ ति} \\
 &+ ३२.८२ \text{ को भु च्यु} & + २.१९ \text{ को भु (२ ति + मं)} \\
 &+ १.२२ \text{ को भु (च्यु - सं)} & + १.१३ \text{ को भु (२ ति - स)}
 \end{aligned} \right.$$

चंद्राची स्पष्ट गति

४२८. चंद्राची एका घटिकेतील स्पष्ट गति किती हे समीकरण मिळ करायचाचं आहे. मूक्षमास गणिताच्या मिळानानें हे समीकरण सहज मिळ होतें. ते याची लिहिल्याप्रमाणे. ४२१ व्या लेखातील व चे समीकरण सक्षेपे घेऊन, त्यातील पदे सामान्य स्वरूपानें लिहितो.

$$ब = कम + फभु (नकम - उ) + धमु (तकम - ग)$$

हया समीकरणाचे मूक्षमास गुणोत्तर किंवा शुन्यलब्धगुण काढिला तर

$$\frac{\text{सूब}}{\text{सूक}} = म + नम \times फ कोमु (नकम - उ)$$

$$+ तम \times ध कोमु (तकम - ग)$$

$$\text{म्हणून सूब - म (सूक) + नमफ (सूक) कोमु (नकम - उ)}$$

$$+ तमध (सूक) कोमु (तकम - ग)$$

हया समीकरणांत सूक हा वालाचा मूक्षमास आहे असे घेऊ व हा वालाचा मूक्षमास १ घटिका मानूं. म हा चंद्राची मध्यमगति आहे, ही एका घटिकेन १३.१७६३५८ कला इनकी आहे. सूब म्हणजे एका घटिकेतील चंद्राची स्पष्ट गति होय. यावरून रीती ठरते ती अशी—

‘प्रत्येक पदाच्या गुणकाला मध्यम गर्ताने गुणन केंद्र गुणकाने गुणाचे जो गुणाकार घेईल तो त्या केंद्राच्या कोमुज्येला गुणक जोडावा. म्हणजे ते त्या केंद्राचे गतिफल होईल.’

हयाप्रमाणे प्रत्येक पदाला कृती करून चंद्राच्या स्पष्टगतीचे समीकरण तयार करावे. पद गुणकाला मध्यमगतीने गुणावयाचे तेव्हा गुण्य गुणकयापैकी एक तरी वृत्त-परिमाणात्मक असला पाहिजे याकरिता १३.१७६३५८ कलाचे वृत्तपरिमाण तयार करूं.

३६० अंशांचें वृत्तपरिमाण $2 \times 3 \cdot 1415926$ इत्यादि म्हणजे २π तेव्हा
१३ १७६३५८ कलांचे किती अंश त्रैराशिकाने काढू तेव्हा —

$$३६० \text{ अंशांस : } \frac{१३ \cdot १७६३५८}{६०} \text{ अंश :: } २\pi : \text{उत्तर}$$

$$\begin{aligned} \frac{१३ \cdot १७६३५८}{६०} \times \frac{२\pi}{३६०} &= \frac{० \cdot १३१७६३५८}{१०८} \times ३ \cdot १४१५९२६ \\ &= ० \cdot ००१२२०० \times ३ \cdot १४१५९२६ \\ &= ० \cdot ००३८३३ \\ &= ० \cdot ००३३३३ + ० \cdot ०००५ \\ &= \frac{१}{३} \times (० \cdot १) + \frac{१}{३} (० \cdot ०१) \end{aligned}$$

ह्यावरून अंश ठरतें की ब च्या समीकरणांतील पदगुणकाच्या विकलांना $\frac{१}{३}(० \cdot १)$ आणि $\frac{१}{३}(० \cdot ००१)$ या दोन गुणकांनी गुणून येणाऱ्या विकलांनी बेरीज करून बेरजेला पदाच्या केंद्रगुणकानें गुणावें. म्हणजे ते गतिफलाचे पद होते. केंद्र गुणक ण ए आणि ठ हे असताना याच्या व्यक्ती किमती खाली लिहिल्याप्रमाणे घ्याव्यात :—

$$\begin{aligned} \pi &= १ - \frac{१}{३}, \\ \epsilon &= १ + \frac{१}{३}, \\ \delta &= \frac{१}{३} \end{aligned}$$

४९९. चंद्राच्या घटिगतीचे समीकरणांनी काही पदे तयार करितां. ८९१ व्या लेखातील समीकरणांचें पहिलें पद.

$$२२६२४ \cdot ८४ \text{ भु म}$$

$$\begin{aligned} २२६२४ \cdot ८४ \times \frac{१}{३}(० \cdot १) &= ७५४१ \cdot ६१ \times (० \cdot १) = ७५४१६ \\ २२६२४ \cdot ८४ \times \frac{१}{३}(० \cdot ००१) &= ११३१२ \cdot ४२ \times (० \cdot ००१) = ११३१२ \\ \text{बेरीज} &= ८६७२८ \\ ८६७२८ - (८६७२८ \div १३०) &= ८६०६ \text{ विकला.} \\ + ८६०६ \text{ कोभु मं} &\quad \cdot \cdot \quad \cdot \cdot \quad \cdot \cdot \quad (१) \end{aligned}$$

$$७६९०५ \text{ भु र म}$$

$$\begin{aligned} ७६९०५ \times \frac{१}{३} \times (० \cdot १) &= २५६३५ \times (० \cdot १) = २५६३ \\ ७६९०५ \times \frac{१}{३} \times (० \cdot ००१) &= ३८४५२ \times (० \cdot ००१) = ३८४ \\ \text{बेरीज} &= २९४७ \end{aligned}$$

$$२०९४७ - (२०९४७ \div १३०) = २०९२ \text{ विकला.}$$

$$+ ५०८४ \text{ कोभु र मं} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (२)$$

$$२३६५४२ \text{ भु (२-२ ठ)}$$

$$२३६५४२ \times \frac{३}{४} \times (०१) = ७८८४७३ (०१) = ७८८५$$

$$२३६५४२ \times \frac{३}{४} \times (००१) = ११८२०३१ (००१) = ११८३$$

$$\text{बेरीज} = ९०६८$$

$$९०६८ \times (२ - २ ठ) = १८०१३६ - (१८०१३६ \div १३) = १६०५$$

$$+ १६०५ \text{ कोभुरति} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (३)$$

$$४६०१०९३ \text{ भु च्यु}$$

$$४६०१०९३ \times \frac{३}{४} \times (०१) = १५३३०९८ \times (०१) = १५३४$$

$$४६०१०९३ \times \frac{३}{४} \times (००१) = २३०००९६ \times (००१) = २३०$$

$$(\text{बेरीज} - १७६४) \times (१ - \frac{१३}{१३०} + \frac{१३०}{१३०}) = १४८५$$

$$+ १४८५ \text{ का भु च्यु} \quad - १०७ \text{ कोभु (२ ति + म)}$$

$$- ३०२२ \text{ कोभु र वि} \quad + १०० \text{ कोभु (२ ति - ग)}$$

$$\left[\begin{array}{l} ७९००५८ + ८६००० \text{ कोभु म} + ५०८४ \text{ कोभु र म} \\ - १६०५ \text{ का भु र ति} + १६०५ \text{ का भु च्यु} \\ - ३०२२ \text{ कोभु र वि} \\ - १०७ \text{ का भु (२ ति + म).} \\ + १०० \text{ कोभु (२ ति - ग)} \end{array} \right]$$

५००. चद्राच्या प्रतिमनि प्रमाणेच त्याच्या शरघटिगतीच्या गर्भिकरणाची साधनिका आहे. तेव्हां त्याच प्रमाणेच शरघटिगतीच्या समीकरणातील पदे शोधू.

$$१८५४०००० \text{ भु वि}$$

$$१८५४००२० \times \frac{३}{४} (०१) = ३१८०००३ (०१) = ३१८०१$$

$$१८५४००२० \times \frac{३}{४} (००१) = ३२८००१० (००१) = ९२७०$$

$$(\text{बेरीज} = ७१०७१) (१ + \frac{१३}{१३०}) = ७१६२ \quad (१)$$

मध्यमचंद्रानें चंद्राचा शर मापण्याचें समीकरण केले म्हणजे शराची फार पदें उत्पन्न होतात त्यापैकी १०१४६० मु (वि + म) हें पद घेते. आणि ह्या पदापासून शरघटिगतीचें पद उत्पन्न होणे तें खाली दिले आहे.

$$\begin{aligned} १०१४६० \times \frac{१}{३} (०१) &= ३३८०२ (०१) = ३०३८२ \\ १०१४६० \times \frac{२}{३} (००१) &= ५०७०३ (००१) = ००५०३ \\ &(\text{वेगळी} = ३०८८०) \quad २ = ३०३८ \dots (२) \end{aligned}$$

बाकीची पदें वरच्याप्रमाणेच घेतली आहेत. ह्या प्रमाणे शरघटिगतीची पदें तयार करून खाली लिहिली आहेत.

$$\text{शरघटि गति} = \begin{cases} ७१०६२ \text{ को भु वि} + ३०३८ \text{ को भु (वि + म)} \\ २००४ \text{ को भु (२ ति - वि)} + १०३८ \text{ को भु (२ ति - वि)} \\ ००८४ \text{ को भु (२ ति + वि)} + ००६६ \text{ को भु (२ वि + म)} \end{cases}$$

प्रकरण सतरावे

पंचांग प्रवर्तनीय सिद्धांत

५०१. पंचांगामध्ये वार, तिथि, नक्षत्र, करण, योग ह्या पाच अंगाचा विचार केलेला असतो. वार किंवा वामर याचा विचार सूर्यदुस्थानमान ह्या ग्रथात केला आहे, आणि करण हे तिथीचे अंग आहे. विवक्षित तिथीच्या आरंभक्षणापासून अंत्यक्षणापर्यंत जो काल त्याचे दान समान भाग केले असता त्या प्रत्येक काल विभागास करण म्हणतात. प्रत्येक महिन्याच्या तिथि ३० अर्थात करण ६० होतात. त्यात ४ करणे स्थीर आहेत ती अशी शकुनी चतुष्पाद आणि नाग ही चांद्रमासाच्या अती असतात. कृष्ण १४ उत्तराशी शकुनी करण असते. आमावास्याच्या चतुष्पाद आणि नाग ही करण असतात. आणि प्रत्येक चांद्रमासाच्या आरंभी म्हणजे वृद्ध प्रणिदेच्या आरंभी कीर्तुनृत नामक करण असते. वारी राहिलेल्या ५६ करणाची, ७ करणांचे १ चक्र अशी आठ चक्रे होतात. त्या ७ चक्रांचा क्रम ग्राह्या राहिल्याप्रमाणे असतो:—

१ वर, २ बालव, ३ कौलव, ४ तैत्तीळ, ५ गर, ६ धनिज आणि ७ भद्रा.

५०२. पंचांगाची राहिली अंगे तीन तिथि, नक्षत्र आणि योग याचा विचार करावयाचा. त्यांपैकी प्रथम नक्षत्र नंतर तिथि आणि मग योग असाच त्याचा क्रम आहे. सूर्य निडातात प्रथम नक्षत्राचे मान मागून नंतर तिथीचे मान सांगितले आहे. भमोगोष्ठशतीलित्पाः खाश्वि शैला स्तथा तिथे ॥

(सूर्य सि. अ-२—६४)

आणि प्रस्तुत ग्रंथातील प्रतिपादनाच्या मोडने पाहिले असता हाच क्रम युक्त ठरतो. नक्षत्र, तिथि आणि योग याचा मी तीन भागात विचार केला आहे त्या भागास मी अनुक्रमे 'नक्षत्र रत्नमाला', 'तिथिमुक्ताहार' आणि 'योगपद्मावली' अशी नावे दिली आहेत. या क्रमानेच त्यांचा विचार करीत आहे.

नक्षत्र रत्नमाला

५०३. पंचागापैकी जे एक अंग त्यास उद्देशून वरचे नांव दिले आहे. श्रुति-वृत्ताचे म्हणजे ३६० अशाचे प्रत्येक भाग ८०० कलांचा असे समान भाग केले आहेत ते भाग २७ होतात. हे भाग अचल असे स्वीकारले आहेत, आणि ते फार प्राचीन काली स्वीकारले आहेत. हे अनेक प्रमाणांनी मिद्ध होते. ह्या अचल भागापैकी प्रथम भाग अश्विर्न नक्षत्राचा. त्याचा आरंभ विदु 'पौष्णांत' होय. अर्थात तोच विदु रेवती नक्षत्र भागाचा अत्य विदु होय. ह्या प्रत्येक भागाच्या आरंभ विदूशी, चंद्र प्रत्यक्ष आला कोणत्या क्षणी आणि अन्य विदूशी गेला कोणत्या क्षणी हे पंचागात

दाखवावें लागते. कोणत्याहि नक्षत्राचा भाग हा ८०० कलांचाच असतो हे सिद्धांत वाक्यानेच सिद्ध आहे. तेव्हां स्पष्ट गतीने चंद्राम हा प्रत्येक भाग आक्रमण करण्यास किती काळ लागेल हे आपणाला सिद्ध करावयाचे आहे.

५०८. मध्यमचंद्र ज्याक्षणी शुन्य होना तो क्षण म्हणजेच पौष्णांती मध्यम चंद्र असेल तो क्षण काल मापनाचा आरंभ क्षण म्हणू आणि सामान्यतः व अपात्मक स्पष्टचंद्र आढे तर काल किती गत झाला हें समीकरण आपण सिद्ध करू. मागील सिद्धांताच्या आधारे हें समीकरण सहज सिद्ध होते ४८९ व्या लेखाच्या आधारे हें सिद्ध होते. येथे हे लक्षण असावे की, ४८९ व्या लेखातील मं मदकेन्द्र स्पष्टचंद्रावरून मांडिले आहे. ते समीकरण खाली लिहिल्याप्रमाणे आहे असे माना —
 कम = ब — २इ भु (ण ब — उ) + ३इ भु (ण ब — उ)

$$. ३ल' भु (एव ग) ३' ठ' भु \left\{ (२ - २ठ) व - २ घ \right\}$$

$$+ ३' ठ' भु \left\{ (२ - २ठ - ण) व - २ घ + उ \right\} + इत्यादि.$$

(१)

ह्या समीकरणात कम हें पद अव्यक्त आहे. आणि व ह्या स्पष्टचंद्रावर कम अवलंबून आहे. व हा स्पष्टचंद्र ज्या क्षणीचा असेल त्या क्षणीची वेद्रे असली पाहिजेत किंवा कम, वगैरे विचार मागाहून करू. प्रथम हें समीकरण आहे, ह्याच्या दोन्ही पेट्यांना म चंद्राची एका घटिकेतील गति, हिने भागिले तरी समीकरणानें दोन्ही पक्षाचें (पेट्याचें) समानत्व भंग पावत नाही म्हणून

$$क = \frac{व}{म} - \frac{२उ}{म} भु (ण ब - उ) + ३ \frac{इ}{म} भु (ण ब - उ) \quad (२)$$

ह्या समीकरणात क हा काल आहे. म ही एका घटिकेतील चंद्राची मध्यम गति आहे, आणि कम हा मध्यमचंद्र म्हणून $\frac{कम}{म}$ ह्या बरोबर क ह्या कालाच्या घटिका आहेत. व हा कोनच आहे त्याला म ह्या एका घटिकेतील कोनाने भागिले तेव्हा $\frac{व}{म}$ कालच आहे व ह्याही घटिकाच आहेत. ह्या प्रमाणेच $\frac{२इ}{म}$

$\frac{३इ}{म}$ हे सर्व गुणक कालात्मक असून ह्या सर्व घटिकाच्या सख्या आहेत. क हा काल आहे आणि तो मध्यमचंद्र ० ज्या क्षणी होता त्या क्षणापासून मोजलेला आहे.

त्यामध्ये $\frac{व}{म}$ हा काल आणि प्रत्येक केद्रापासून आलेला काल घनर्ण केला म्हणजे व मोगात्मक स्पष्ट व्हावयास लागणारा काल येईल.

५०५. वरच्या लेखातील ममीकरणाच्या केंद्रामध्ये व ही स्पष्टचंद्राच्या भोगाची मर्या आहे. तेव्हा केंद्राची माथनिका कमी माघाची, यावरून विचार कर.

णव—उ हें एक केंद्र आहे या बरोबरच खालचें केंद्र आहे

$$\text{णव} \times \frac{\text{म}}{\text{म}} - \text{उ} = \text{ण} \frac{\text{व}}{\text{म}} \text{म} - \text{उ}$$

ण $\frac{\text{व}}{\text{म}}$ हा दिलेला म्हणजे व भोगापामून उत्पन्न झालेला काल आहे. अर्थात मध्यम काल आहे, त्यामाठी त्याचे मार्गी क. हें मध्यम काल दयाविणारे नक्षत्र लिहिले तर

णव उ - नकम उ म हे मदकेद्र होय आणि ते $\frac{\text{व}}{\text{म}}$ ह्या मध्यम कालाची व होय. व ही चंद्राच्या स्पष्टभोगाची हवी ती मर्या आपण मानिली आहे, तिच्या मर्याती $\frac{२३}{२७}$ न हें वृत्तपरिमाण ठेवूं. याचा अर्थ असा आहे,

$$\frac{३६० \text{ अंश}}{२७} \text{ न} = (१३ \text{ अंश } २० \text{ कला}) \times \text{न} \quad ८०० \text{ न कला. तेव्हा}$$

$$\begin{aligned} \left(\text{ण} \frac{२३}{२७} \text{ न} - \text{उ} \right) &= \text{ण} \frac{२३ \text{ न}}{२७ \text{ म}} \times \text{म} - \text{उ} \\ &= \text{ण} \frac{१३ \text{ अंश } २० \text{ कला}}{१३.१७६३६ \text{ अ}} \text{ नम} - \text{उ} \\ &= \text{नकम} - \text{उ} \end{aligned}$$

ह्यातील न ही मर्या ०, १, २, ३ इत्यादि मर्या दायविणारी आहे $\frac{२३}{२७ \text{ म}} = ६०.७१४८$ मध्यमकालाच्या घटिका आहेत. ह्याला म = १३.१७६ कला घटिकेतील गुणिले म्हणजे १३ अ २० कला एका नक्षत्राची मध्यमचंद्राची गति होते. यावरून—

$$\frac{२३ \text{ न}}{२७ \text{ म}} = ६०.७१४८ \text{ घ} \times \text{न} = \text{न नक्षत्रांचा मध्यमकाल}$$

णम = चंद्रमध्यमगति—केंद्र मं. मध्यमगति. दोहाचा गुणाकार केला तर $\text{ण} \frac{२३ \text{ न}}{२७ \text{ म}} \times \text{म} = (\text{चंद्रमध्यमगति} - \text{कें. मं. म. गति}) \times \text{न नक्षत्रांचा म. काल.}$

यावरून स्पष्ट कळतें की $\text{ण} \frac{२३}{२७} \text{ न} - \text{उ}$ हे, ज्या क्षणी मध्यममानाने नक्षत्र पूर्ण होते त्या क्षणीचे चंद्राचे मदकेद्र आहे. हें वरच्या संक्षिप्त लेखन पद्धतीने

मं ह्या अक्षर चिन्हांने दाखवितो. आणि ह्याच पद्धतीने ति च्यु वि सं ही हीं अक्षरें योजिली आहेत. ह्याप्रमाणे योजना करून नक्षत्रांचे स्पष्टकाल वर्तविण्याचे समीकरण तयार होतें. ते असे की, ४८९ व्या लेखातील समीकरणाच्या प्रत्येक केंद्राच्या गुणकाम म ह्या चंद्राच्या मध्यमघटि गतीने भागावें, भागाकार घटिकात्मक होईल तो ज्या त्या केंद्राम गुणक द्यावा आणि चिन्ह कायम ठेवून समीकरण लिहावे म्हणजे खाली लिहिल्याप्रमाणे समीकरण तयार होईल:—

	आद्यकाल + ३६४२.९३६ पल्ले × न	
	— १७१७.१० भुमं + ३६.१५ भुरम	
	— ०.८६ भुरमं + ३१.१९ भुरवि	
	— १४६.१० भुरति + ११.०१ मुति	
	+ १०.९३ भु (रति + म) + ०.५४ भुक्षति	
	— ३५६.४४ भुच्यु + ०.५४ भुरच्यु	
	+ ५१.५९ भुस + ०.७४ भुरसं	
	— १४.१३ भु(रति — रम) + ०.३८ भु(ति — म)	
	— १३.८९ भु(च्यु — सं) + ७.६३ भु(रवि — मं)	
	— ५.४० भु(मं — सं) + ४.७१ भु(म + स)	
नक्षत्र स्पष्ट काल	} — {	— ९.४२ भु(रति — स) + ४.२३ भु(च्यु + स)
		— ४.४९ भु(रति — रवि) + १.१२ भु(क्षति — म)
		— १.७४ भु(रवि + म) + ०.९५ भु(रति + म)
		— १.१६ भु(रति — रम + सं) + ०.४२ भु(म + रस)
		— ०.६८ भु(रति — रवि + म)
		— ०.५६ भु(रति + म — स)
		— ०.५७ भु(रति — स) + ०.३० भु(रवि + स)
		— ०.७८ भु(रति — रमं — स)
		+ ०.३९ भु(रति — रवि — म)
		— ०.५४ भु(रति + रम) + ०.३० भु(रवि — सं)
		— ०.५० भु(रति — रवि + स)
		— ०.५५ भु(रति — रवि — सं)
	— ०.४७ भु(मं — रसं) — ०.२४ भु(ति + मं)	

५०६. वस्त्या समीकरणान न ही सख्या नक्षत्र कम दाखविणारी आहे. जेव्हा न ही सख्या ० असेल तेव्हा नक्षत्र एरुही भुक्त जाळेल नाही अर्थात रेवतीचा अत्यक्षण (मध्यममानाने) आहे. परंतु ह्या क्षणाची जाणीव जाही पाहिजे. काल हा अर्जन आहे, त्यातील कोणत्या क्षणाशी रेवती अत्यक्षण जोडावा हे समजत पाहिजे. यासाठी समीकरणान आद्यकाल हे पद लिहिले आहे. हा क्षण ज्या क्षणी मध्यम चंद्र शून्य होता तो क्षण होय. तो क्षण अहर्ण घट्टिपळे यांनी दाखविला जातो. ह्या अहर्ण घट्टिपळाना आद्यकाल म्हटले आहे. न ही सख्या १, २, ३ इत्यादि घेऊन जो काल उत्पन्न होईल तो आद्य काल न मिळवून जो काल होईल त्या त्या मध्यम नालाची मदतद्रादि केंद्रे तयार करून कालान्तर फले जी येतील ती मध्यमकालान धनर्ण केली म्हणजे नक्षत्राचे स्पष्टकाल तयार होतील. अशा प्रकारे एखाद्या नक्षत्राच्या अत्यक्षण आणिना येईल. परंतु सर्व वर्षांचे नक्षत्र काल काढण्यास हे समीकरण उपयोगी आहे.

तिथि मुक्ताहार

५०७. नक्षत्राचे स्पष्टकाल सिद्ध करण्याचे समीकरण ज्याप्रमाणे सिद्ध केले, त्याच पद्धतीने तिथीचे स्पष्टकाल सिद्ध करण्याचे समीकरण सिद्ध करिता येते. विवक्षित नक्षत्राचा स्पष्ट काल ठरविणारे समीकरण ४८१ व्या लेखातील समीकरणाच्या आधारे सिद्ध केले. त्यात विवक्षित स्पष्टचंद्रास किती काळ लागेल हे समीकरण सिद्ध केले, तसेच समीकरण पद्धतीने चंद्राचे स्पष्टभोग आणि सूर्याचे स्पष्टभोग (अंग, कला, विकला) ह्यामध्ये उच्छिन्नलेखा अंग, कला, विकला इतके अंतर व्हायवाला काळ किती लागेल हे साधण्याचे समीकरण आपणाला सिद्ध केले पाहिजे. त्यावरून आपणाला तिथीचे समीकरण सिद्ध करिता येईल.

५०८. सूर्याचे स्पष्टभोग सिद्ध करण्याचे समीकरण ३२० व्या लेखात दिले आहे. ते खाली लिहिल्याप्रमाणे आहे:—

$$\begin{aligned} & \text{व} + \text{कमठ} + ६९२०.२२ \text{ भु} (\text{कमठ} - \text{द्र}) \\ & + ७२.५५ \text{ भु} (\text{कमठ} - \text{द्र}) \end{aligned}$$

किंवा

$$\text{व} = \text{कमठ} + \text{घ} + ६९२०.२२ \text{ भुडकम} + ७२.५५ \text{ भुडकम}.$$

स्पष्ट चंद्राचें समीकरण आपण मिद्ध केले आहे ४९१ लेख पहा त्या वरून
समीकरणांत हें वं चें समीकरण वजा केले, तेव्हां—

(वेद्र म म इत्यादि मक्षेपे न लिहिता विसृत लिहिल्या)

$$ब - बं = क म - क म ठ - घ + २२६२४.८४ भु (णकम - उ)$$

$$+ ७६९.०५ भु२ (णकम - उ)$$

$$+ ३६.८६ भु३ (णकम - उ)$$

$$+ २३६५.४२ भु \{ (२ - २ठ) क म - २घ \}$$

$$- १३१.८६ भु \{ (१ - ठ) क म - घ \}$$

$$+ ४६०१.९३ भु \{ (२ - २ठ - ण) क म - २घ + उ \}$$

$$- ७६००.०१ भु (ठकम + घ - द्र)$$

$$- ८२.२७ भु२ (ठकम + घ - द्र) इत्यादि$$

(बाकीची सर्व पदे ४९१ व्या लेखाप्रमाणें चिन्हासह).

ह्या समीकरणांमध्ये क म हें व्यक्त पद अगून व—बं हे अव्यक्त पद आहे, ह्या
समीकरणांमून ज्यामध्ये, क म हें अव्यक्त पद असून (व—व) ह्या व्यक्त पदानें
क म ची किंमत मिद्ध होईल असें समीकरण मिद्ध करावयाचे आहे. याकरिता
क म - क म ठ - (१ - ठ) क म हे पद डावीकडे घेऊन (व - बं) हे पद उजवीकडे
घेतले. त्यामुळे राहिलेल्या सर्व पदांची चिन्हे बदलली म्हणजे धन तें ऋण झाले आणि
ऋण तें धन झाले आणि क म ला जो (१ - ठ) हा गुणक होता त्यानें सर्व
समीकरण भागिलें. तेव्हां—

$$क म = + \frac{घ}{१ - ठ} - \frac{१}{१ - ठ} (व - बं)$$

$$- २२६२४.८४ \frac{१}{१ - ठ} भु (णकम - उ)$$

$$- ७६९.०५ \frac{१}{१ - ठ} भु२ (णकम - उ) - इत्यादि.$$

$$५०१. वरच्या समीकरणातील \left\{ +\frac{\text{घ}}{१-ठ} + \frac{१}{१-ठ} (\text{व} - \text{व}') \right\}$$

ह्या पदाच्या स्थानी लेखन मीतयोजकता ये हे अक्षर योजिले. तेव्हा—

$$\text{कम} = \text{थ} - २२६२४.८४ \frac{१}{१-ठ} \text{ भु (णकम—उ)}$$

$$- ७६९.०५ \frac{१}{१-ठ} \text{ भुर (णकम—उ)}$$

$$२३६५.४२ \frac{१}{१-ठ} \text{ भु} \left\{ (२-२ठ) \text{ कम—२ घ} \right\}$$

$$- ४६०१.२३ \frac{१}{१-ठ} \text{ भु} \left\{ (०-०ठ-ण) \text{ कम—२ घ+३} \right\}$$

$$७६००.०१ \frac{१}{१-ठ} \text{ भु (ठकम : व—३)}$$

$$+ ८२.२७ \frac{१}{१-ठ} \text{ भुर (ठकम+घ—३)}$$

इत्यादि

इत्यादि

इत्यादि

ह्या समीकरणात अव्यक्त पद कम हे डावीकडे माविले आहे परंतु उजवीकडे केंद्रात कम हे पद नसेच आहे ते नेथून लुप्त केले पाहिजे आणि त्या जागी $\frac{१}{१-ठ}(\text{व}-\text{व}'-\text{घ})$ हे पद आणिले पाहिजे म्हणजे ह्या समीकरणातील केंद्राचें परिवर्तन केले पाहिजे. हें कार्य २६६ व्या लेखान दिलेल्या सिद्धान्ताने होतें. पण वरच्या समीकरणातील पदांचे गुणक विकलात्मक आहेत त्यांनी परिवर्तन कार्य करिता यावयाचे नाही यास्तव ते गुणक वृत्तपरिमाणाचे आणिले पाहिजेत. परिवर्तन बायं तिसऱ्या पदवीपर्यंत होतें. म्हणून वरच्या समीकरणाचे स्वरूप तिसऱ्या पदवीपर्यंत वृत्तपरिमाण गुणकाचें केले पाहिजे.

५१०. लेखाक ४६९ मध्ये परिवर्तन पदसंघानें युक्त असं व तें समीकरण दिले आहे. तें असें—

व — कम — (कम चा पदसंघ) (परिवर्तन पदसंघ) (अ) ह्यापैकी कम चा पदसंघ लेखाक ४६९ मध्ये आहे. आणि परिवर्तन पदसंघ ४७० ह्या लेखान आहे. ह्या दोन्ही पदसंघातील पहिल्या, दुसऱ्या व तिसऱ्या पदवींची पदे मात्र ध्यावयाची ती घेऊन समीकरण खाली लिहिले आहे. आणि त्यात व' = अमलेली पदे लेखाक ५०८ प्रमाणे घेऊन तें समीकरण व च्या समीकरणात वजा केले आहे. योगाचें स्पष्टकाल मिद्ध करण्यामाठी ह्या समीकरणांचा उपयोग करावयाचा आहे.

$$\text{व} = \text{क म ठ} + \text{घ} + २ \text{ इ} \text{ भु ड कम} + \frac{१}{१-ठ} \text{ भुर ड कम} \dots (ब)$$

(अ) मध्ये (ब) समीकरण वजा केलें. तेव्हां—

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned}
 & \text{कम} - \text{कमठ} - \text{घ} \quad , \quad २३\text{भु} (\text{ण कम} - \text{उ}) \\
 & + \frac{१}{४} \text{इ}^३ \text{भुर} (\text{ण कम} - \text{उ}) - \frac{१}{४} \text{ल}^३ \text{भुर} (\text{एकम} - \text{रा}) \\
 & + \frac{१}{४} \text{ठ}^३ \text{भु} \left\{ (२ - २\text{ठ}) \text{कम} - २\text{घ} \right\} \\
 & \quad - (२\text{इ} + ३\text{ठइ}) \text{भुडकम} \\
 & + \frac{१}{४} \text{ठइ} \text{भु} (२ - २\text{उ} - \text{ण}) \text{कम} - \frac{१}{४} \text{इ}^३ \text{भुण कम} \\
 & \quad \frac{१}{४} \text{इ}^३ \text{भुरेण कम} + \frac{१}{४} \text{ठ}^३ \text{इ} \text{भु} (२ - २\text{ठ} - \text{ण}) \text{कम} \\
 & + \left(\frac{१}{४} \text{ठ}^३ + \frac{१}{४} \text{ठइ} - \frac{१}{४} \text{ठल}^३ \right) \text{भु} (२ - २\text{ठ}) \text{कम} \\
 & + \frac{१}{४} \text{ठ}^३ \text{इ} \text{भु} (२ - २\text{ठ} + \text{ण}) \text{कम} - \frac{१}{४} \text{इ}^३ - \frac{१}{४} \text{ठइ}^३ \text{भुरेडकम} \\
 & + \frac{१}{४} \text{ठइ}^३ \text{भु} (२ - २\text{ठ} - \text{ड}) \text{कम} \\
 & \quad - \frac{१}{४} \text{ठ}^३ \text{इ} \text{भु} (२ - २\text{ठ} + \text{ड}) \text{कम.} \\
 & + \frac{१}{४} \text{ठइ}^३ \text{भु} (२ - २\text{ठ} - \text{ण} - \text{ड}) \text{कम} \\
 & + \frac{१}{४} \text{ठइ}^३ \text{भु} (२ - २\text{ठ} - २\text{ण}) \text{कम.} \\
 & + \frac{१}{४} \text{ठल}^३ \text{भु} (२ - २\text{ठ} - २\text{ए}) \text{कम} \\
 & \quad - \frac{१}{४} \text{ठइ}^३ \text{भु} (२ - २\text{ठ} - \text{ण} + \text{ड}) \text{कम.} \\
 & - \frac{१}{४} \text{ठइ}^३ \text{भु} (\text{ण} - \text{उ}) \text{कम} - \frac{१}{४} \text{ठइ}^३ \text{भु} (\text{ण} + \text{उ}) \text{कम} \\
 & - \frac{१}{४} \text{ल}^३ \text{इ} \text{भु} (२\text{ए} - \text{ण}) \text{कम} - \frac{१}{४} \text{ल}^३ \text{इ} \text{भु} (२\text{ए} + \text{ण}) \text{कम}
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

ह्या समीकरणातील पदाना स्थान भेद करून १ - ठ ने भागिले तेव्हा—

$$\frac{१}{१ - \text{ठ}} (\text{ब} - \text{व} + \text{घ}) = \text{कम} + \frac{२३}{१ - \text{ठ}} \text{भुण व. ग} + \frac{५}{४} \frac{\text{इ}^३}{१ - \text{ठ}} \text{भुरेण कम}$$

किंवा

$$\text{ग} = \text{कम} + \frac{२३}{१ - \text{ठ}} \text{भुण कम} + \frac{५}{४} \times \frac{\text{इ}^३}{१ - \text{ठ}} \text{भुरेण कम ज्यादि.}$$

अद्या तऱ्हेने जें समीकरण होईल ह्यामधील कम च्या जागी थ आणि थ च्या जागी कम अशा रीतीचे केन्द्रपरिवर्तन करिता येतें. आणि ते २६६ ह्या लेखामधील समीकरणानें करिता येतें. केन्द्रपरिवर्तन वयाच ठिकाणी केले आहे त्याअर्था त्याबद्दल विशेष सांगण्याचें कारण नाहीं. त्या समीकरणातील १९ पदांपैकी एक एक वेळून त्यापासून उत्पन्न होणारी पदे शोधूं.

५११. परिवर्तन समीकरणानील प्रत्येक पदाचे परिवर्तन.

[१] — पञ्चमय. ह्या पदात $p = \frac{2z}{1-z}$; $n = \eta$; $y = \theta$.

$$= \frac{2z}{1-z} \text{ भुणथ } \dots\dots\dots (१)$$

[२] — दशमय. ह्या पदात d च्या किमती पाच आहेत आणि m च्याहि पाच किमती आहेत. त्याप्रमाणे

$$\begin{aligned} &= \frac{4}{z} \frac{z^2}{1-z} \text{ भुणथ } + \frac{2}{1-z} \text{ भुणथ} - \frac{1}{2} \frac{z^2}{1-z} \text{ भु } (2-z) \text{ थ} \\ &+ (2z + 2z^2) \frac{1}{1-z} \text{ भुणथ} - \frac{1}{2} \frac{z^2}{1-z} \text{ भु } (2-z-\eta) \text{ थ} \\ &\dots\dots\dots (२) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [३] &+ \frac{1}{2} p^2 n^2 \text{ भुनय } = \frac{1}{2} \frac{4z^2}{(1-z)^2} (1 - \frac{1}{2} z^2) \text{ भुणथ} \\ &+ \left\{ \frac{2z^2}{(1-z)^2} - \frac{2z^2 z^2}{2(1-z)^2} \right\} \text{ भुनय } \dots\dots\dots (३) \end{aligned}$$

[४] — त्रयोदशय. वरच्या लयांनील $v = b$ च्या समीकरणांनील तिसऱ्या पदाच्या प्रत्येक पदाला $= \frac{1}{2} \frac{z^2}{1-z}$ ने गुणून आणि कम च्या जागी थ लिहून होणारा पदसमूह.

... (४)

$$\begin{aligned} [५] &+ \frac{1}{2} p^3 n^3 \text{ भुनय } = \frac{1}{2} \frac{(-4z^3)}{(1-z)^3} \eta^3 \text{ भुणथ} \\ &- \frac{z^3}{(1-z)^3} \text{ भुणथ } \dots\dots\dots (५) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [६] &- \frac{1}{2} p^3 n^3 \text{ भुनय } = \frac{1}{2} \frac{(-4z^3)}{(1-z)^3} \eta^3 \text{ भुणथ} \\ &+ \frac{2z^3}{(1-z)^3} \text{ भुनय } \dots\dots\dots (६) \end{aligned}$$

[७] $+\frac{1}{2}$ पद $(म+n)$ भु $(म+n)$ य. ह्यांत $प = -\frac{२इ}{१-ठ}$; $न = ॥$

$$द = -\frac{५}{४} \frac{इ^२}{(१-ठ)} ; म = २ण$$

$$+\frac{१५}{४} \frac{इ^३}{(१-ठ)^२} भु ३ण थ \dots \dots \dots$$

$$द = -\frac{१५}{४} \frac{ठइ}{(१-ठ)} ; म = २-२ठ-ण$$

$$+\frac{१५}{४} \frac{ठइ^३}{(१-ठ)^२} भु (२-२ठ) थ ;$$

$$-\frac{१५}{४} \frac{ठ^३इ^३}{(१-ठ)^३} भु (२-२ठ) थ$$

$$द = -\frac{१५}{४} \frac{ठ^३}{१-ठ} ; म = (२-२ठ)$$

$$+\frac{३३}{८} \frac{ठ^३इ}{(१-ठ)^३} भु (२-२ठ+ण) थ$$

$$-\frac{११}{४} \frac{ठ^३इ}{(१-ठ)^३} भु (२-२ठ+ण) थ$$

$$द = +\frac{३}{४} \frac{ल^३}{१-ठ} ; म = २ए$$

$$-\frac{३}{४} \frac{ल^३इ}{(१-ठ)^२} भु (२ए+ण)$$

$$द = + (२इ+३ठइ) \frac{१}{१-ठ} ; म = ठ \quad (ड)$$

$$-(२३इ, ३ठइइ) \frac{१}{(१-ठ)^२} भु (ण-ड) थ \dots (३)$$

[८] $-\frac{1}{2}$ पद $(म-n)$ भु $(म-n)$ य.

$$-\frac{५}{४} \frac{इ^३}{(१-ठ)^२} भुण थ$$

$$-\left(\frac{१५}{८} \frac{ठ^३इ}{(१-ठ)^२} - \frac{११}{४} \frac{ठ^३इ^३}{(१-ठ)^३} \right) भु (२-२ठ-ण) थ$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\theta^2 \delta^2}{(1-\theta)^2} \text{મુ (૨-૨ઠ-ળ) થ}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{\theta^2 \delta^2}{(1-\theta)^2} \text{મ (૨ ઇ-ળ) થ}$$

$$+ (૨ ઢઢ + ૨ ઠ ઢઢ) \frac{1}{(1-\theta)} \text{મ (ળ-ઢ) થ} \dots (૮)$$

$$[૯] \quad \frac{1}{2} \text{પ'ત'મુર નથ. યાચે પરિવર્તન} - \frac{1}{2} \frac{\theta^2}{(1-\theta)^2} \text{મુરળથ} \dots (૯)$$

$$[૧૦] \quad + \frac{1}{2} \text{પ'ત'મુર નથ. યાચે પરિવર્તન} + \frac{1}{2} \frac{\theta^2}{(1-\theta)^2} \text{મુરળથ} \dots (૧૦)$$

$$[૧૧] \quad + \frac{1}{2} \text{પ'દમ'મુમય યાચે પરિવર્તન}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{\theta^2}{(1-\theta)^2} \text{મુરળથ} - \frac{1}{2} \frac{\theta^2 \delta^2}{(1-\theta)^2} \text{મુ (૨-૨ઠ) થ}$$

$$+ \frac{\theta^2 \delta^2}{(1-\theta)^2} \text{મુરળથ} - \frac{1}{2} \frac{\theta^2 \delta^2}{(1-\theta)^2} \text{મ (૨-૨ઠ-ળ) થ} \dots (૧૧)$$

$$[૧૨] \quad - \frac{1}{2} \text{પ'દ (મ, ંન) મ (મ, ંન) થ}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\theta^2}{(1-\theta)^2} \text{મુરળથ} + \frac{1}{2} \frac{\theta^2 \delta^2}{(1-\theta)^2} \text{મુ (૨-૨ઠ ; ૨ળ) થ}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\theta^2 \delta^2}{(1-\theta)^2} \text{મુ (૨-૨ઠ ; ળ) થ}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{\theta^2 \delta^2}{(1-\theta)^2} \text{મ (૨ ઇ + ૨ ણ) થ}$$

$$- \left(\frac{૪ \theta^2 \delta^2}{(1-\theta)^2} + \frac{૬ \theta^2 \delta^2}{(1-\theta)^2} \right) \text{મુ (૨ ણ ; ઢ) થ} \dots (૧૨)$$

$$[૧૩] \quad - \frac{1}{2} \text{પ'દ (મ, ૨ન) મુ (મ, ૨ન) થ}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\theta^2 \delta^2}{(1-\theta)^2} \text{મુ (૨-૨ઠ-૩ળ) થ}$$

$$+ \left(\frac{4\delta^2\delta'}{(1-\delta)^3} - \frac{6\delta'\delta'^2}{(1-\delta)^3} \right) \mu (2\eta - 2) \text{ थ} \quad \dots (१३)$$

$$[१४] + \frac{1}{2} \mu (\kappa + \eta) \mu (\kappa + \eta) \text{ थ.}$$

$$- \frac{3}{2} \frac{\delta^2}{(1-\delta)^3} \mu \text{ रण थ}$$

$$+ \frac{1}{(1-\delta)^3} \left(\frac{4}{3} \delta^3 \delta' + \frac{2}{15} \delta^2 \delta'^2 - \frac{1}{5} \delta \delta'^3 \right) \mu (2 - 2\delta - \eta) \text{ थ}$$

$$+ \frac{3}{2} \frac{\delta^2 \delta'}{(1-\delta)^3} \mu (2 - 2\delta) \text{ थ} - \frac{3}{2} \frac{\delta^2}{(1-\delta)^3} \mu \text{ रण थ}$$

$$+ \frac{3}{2} \frac{\delta^2 \delta'^2}{(1-\delta)^3} \mu (2 - 2\delta + 2\eta) \text{ थ}$$

$$+ \frac{3}{2} \frac{\delta^2 \delta' \delta''}{(1-\delta)^3} \mu (2 - 2\delta + \eta - \delta) \text{ थ}$$

$$- (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \delta) \frac{\delta^2 \delta'}{(1-\delta)^3} \mu (\eta + 2\delta) \text{ थ}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{\delta^2 \delta' \delta''}{(1-\delta)^3} \mu (2 - 2\delta + \eta + \delta) \text{ थ}$$

$$+ \frac{3}{2} \frac{\delta \delta'^2 \delta''}{(1-\delta)^3} \mu (2 - 2\delta - \delta) \text{ थ}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{\delta \delta'^2 \delta''}{(1-\delta)^3} \mu (2 - 2\delta + \delta) \text{ थ}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\delta \delta'^3}{(1-\delta)^3} \mu (2 - 2\delta - \eta) \text{ थ}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{\delta \delta' \delta''}{(1-\delta)^3} \mu (2 - 2\delta - 2\eta + \eta) \text{ थ}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\delta \delta'^2 \delta''}{(1-\delta)^3} \mu (2\eta - 2) \text{ थ}$$

$$- \frac{3}{2} \frac{\delta \delta'^2 \delta''}{(1-\delta)^3} \mu (2\eta + \delta) \text{ थ}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{l^2 d^2}{(1-\alpha)^2} \text{ મુ (૨૯ થ - ૨ } \frac{l^2 d^2}{(1-\alpha)^2} \text{ મુ (૨૯ + ૨૭) થ}$$

... .. (૧૪)

[૧૫] — $\frac{1}{2}$ વલ (ક ન) મુ (ક-ન)

$$- \frac{1}{2} \frac{l^2 d^2}{(1-\alpha)^2} \text{ મુ (૨૭ થ - } \frac{1}{2} \frac{l^2 d^2}{(1-\alpha)^2} \text{ મુ (૨-૨૮) થ}$$

$$- \left(\frac{1}{(1-\alpha)^2} \left(\frac{1}{2} l^2 d^2 - \frac{1}{2} l^2 d^2 - \frac{1}{2} l^2 d^2 \right) \right) \text{ મુ (૨-૨૮-૨૭) થ}$$

$$+ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \frac{l^2 d^2}{(1-\alpha)^2} \text{ મુ (૨-૨૮) થ}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{l^2 d^2}{(1-\alpha)^2} \text{ મુ (૨-૨૮-૨૭) થ}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{l^2 d^2}{(1-\alpha)^2} \text{ મુ (૨-૨૮-૨૭) થ}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{l^2 d^2}{(1-\alpha)^2} \text{ મુ (૨-૨૮-૨૭+૨૮) થ}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{l^2 d^2}{(1-\alpha)^2} \text{ મુ (૨-૨૮-૨૭-૨૭) થ} + \frac{1}{2} \frac{l^2 d^2}{(1-\alpha)^2} \text{ મુ (૨૭ થ}$$

... .. (૧૫)

[૧૬] — $\frac{1}{2}$ લ, લ (મ, + મ) મુ (મ, + મ) થ

$$+ \frac{1}{2} \frac{l^2 d^2}{(1-\alpha)^2} \text{ મુ (૨-૨૮-૨૭) થ}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{l^2 d^2}{(1-\alpha)^2} \text{ મુ (૨-૨૮+૨૭) થ}$$

$$- \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \frac{l^2 d^2}{(1-\alpha)^2} \text{ મુ (૨૭+૨૮) થ}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{l^2 d^2}{(1-\alpha)^2} \text{ મુ (૨૯+૨૭ થ)}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left(\frac{11}{4} + \frac{33}{2} \delta \right) \frac{\delta^3 \delta^1}{(1-\delta)^3} \text{ મુ } (2-2\delta+\delta) \text{ થ } \\
 & \quad + \frac{11}{4} \frac{\delta^3 \delta^1}{(1-\delta)^3} \text{ મુ } (4-4\delta-\eta) \text{ થ } \\
 & - \left(\frac{11}{4} - \frac{33}{2} \delta \right) \frac{\delta^3 \delta^1}{(1-\delta)^3} \text{ મુ } (2-2\delta-\eta+\delta) \text{ થ } \\
 & \quad - \frac{11}{4} \frac{\delta^3 \delta^3}{(1-\delta)^3} \text{ મુ } (2-2\delta+2\eta) \text{ થ } \\
 & + \left(\frac{11}{4} + \frac{33}{2} \delta \right) \frac{\delta^3 \delta^1}{(1-\delta)^3} \text{ મુ } (2\eta+\delta) \text{ થ } \\
 & \quad + \frac{11}{4} \frac{\delta^3 \delta^1}{(1-\delta)^3} \text{ મુ } (2-2\delta+2\eta-\eta) \text{ થ } \dots \dots (16)
 \end{aligned}$$

[૧૭] - $\frac{1}{2} d_1 d_2 (m_1 - m_2)$ મુ $(m_1 - m_2)$ થ.

$$\begin{aligned}
 & + \frac{11}{4} \frac{\delta^3 \delta^1}{(1-\delta)^3} \text{ મુ } (2-2\delta-2\eta) \text{ થ } \\
 & \quad - \left(\frac{11}{4} + \frac{33}{2} \delta \right) \frac{\delta^3 \delta^1}{(1-\delta)^3} \text{ મુ } (2\eta-\delta) \text{ થ } \\
 & + \left(\frac{11}{4} + \frac{33}{2} \delta \right) \frac{\delta^3 \delta^1}{(1-\delta)^3} \text{ મુ } (2-2\delta-\delta) \text{ થ } \\
 & \quad - \left(\frac{11}{4} - \frac{33}{2} \delta \right) \frac{\delta^3 \delta^1}{(1-\delta)^3} \text{ મુ } (2\eta-\delta) \text{ થ } \\
 & - \frac{11}{4} \frac{\delta^3 \delta^1}{(1-\delta)^3} \text{ મુ } \eta \text{ થ } \\
 & \quad + \left(\frac{11}{4} + \frac{33}{2} \delta \right) \frac{\delta^3 \delta^1}{(1-\delta)^3} \text{ મુ } (2-2\delta-\eta-\delta) \text{ થ } \\
 & \quad - \frac{11}{4} \frac{\delta^3 \delta^1}{(1-\delta)^3} \text{ મુ } (2-2\delta-2\eta-\eta) \text{ થ } \dots \dots (17)
 \end{aligned}$$

[૧૮] - $\frac{1}{2} d_1 m_1 m_2$ થ.

$$+ \frac{11}{4} \frac{\delta^3 \delta^1}{(1-\delta)^3} \text{ મુ } \eta \text{ થ } + \frac{11}{4} \frac{\delta^3 \delta^1}{(1-\delta)^3} \text{ મુ } (4-4\delta) \text{ થ }$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{१०३१}{(१-४)} \frac{४^३}{(१-४)} \text{ मु } (४-४४-२१) \text{ थ} \\
 & + \frac{१३}{(१-४)} \frac{४^४}{(१-४)} \text{ मु४ ए थ} \\
 & + (४+६४) \frac{४^५}{(१-४)} \text{ मु४ थ} \dots \dots \dots (१८)
 \end{aligned}$$

५१०. वरच्या लेखात जी पदे निघाली आहेत, त्या प्रत्येक पदाचा $\frac{१}{(१-४)}$ हा किंवा याचा वर्ग घन गुणक आहे. त्यां पदामध्ये ४ इ ल ई हे गुणक आहेत. ह्या गुणकाच्या किमती ४८३ व्या लेखांत दिल्या आहेत. त्या घेऊन वरच्या लेखात निघालेल्या सर्व पदाच्या किमती काढिल्या. मात्र प्रत्येक पदाचा $\frac{१}{(१-४)}$ हा गुणक कायम ठेविला. $\frac{१}{(१-४)}$ असेल तर $\frac{१}{(१-४)}$ हा एक गुणक ठेवून एका गुणकाने गुणून किमती घेतल्या. यास्तव काही पदाना $\frac{१}{(१-४)}$ ने गुणावे लागले व काही पदाना $\frac{१}{(१-४)}$ या पदाने गुणावे लागले. यानस्ता

$$\frac{१}{(१-४)} = १ + ४ + ४^२ + ४^३ + ४^४ + ४^५ + \dots$$

$$\frac{१}{(१-४)} = १ + ४ + ४^२ + ४^३ + ४^४ + \dots$$

हे गुणक घेऊन गुणाकार केले. $\frac{१}{(१-४)}$ हा एक गुणक सर्व पदाना ठेवण्याचे कारण ही सर्व पदे ४९१ व्या व ४९२ व्या किमतीत घनपं करावयाची आहेत. ४९१ व्या लेखातील सर्व पदे - १ ने गुणून जो पदसंघ झाला त्यान व ची पदे म्हण करून घेऊन निघालेला परिवर्तन पद मिळविला आणि त्याला $\frac{१}{५}$ ने गुणिले. तेव्हा अखेर गुणक

$$\frac{१}{(१-४)} = ४ - ४^२ + ४^४ - ४^६ + \dots$$

तिथिकाल दाखविणारे समीकरण होते. ते पुढे दाखविले आहे तें समीकरण लिहिण्यापूर्वी केवळमध्य जी थ ही संख्या आणिली आहे तिचे स्पष्टीकरण केले पाहिजे

५१३. थ ही मूल्या कोनाचा वृत्तपरिमाणाची आहे, आणि ती ह्या ती सहजा आहे. ह्या संख्येचें स्वरूप खाली दिल्याप्रमाणें आहे:—

$$\text{थ} = \frac{\text{व} - \text{व} + \text{घ}}{१ - \text{ठ}} = \text{क म} + \frac{१}{१ - \text{ठ}} \text{ पदसंघ}$$

ह्या समीकरणाला म ही चंद्राची मध्यमगति (एका पळांतील विकला) ह्या संख्येने भागिलें तेव्हां—

$$\frac{\text{थ}}{\text{म}} = \frac{\text{घ}}{(१ - \text{ठ})\text{म}} + \frac{\text{व} - \text{व}}{(१ - \text{ठ})\text{म}} = \text{क} + \frac{१}{(१ - \text{ठ})\text{म}} \times \text{पदसंघ}$$

ह्यांतील व—व ही मूल्या स्वीकारलेली आहे. तिचें स्वरूप १२ अश × न असे घेऊं. व—व हे अंतर १२ अश झाले म्हणजे १ तिथि झाली, २४ अश झाले म्हणजे २ तिथि झाल्या या अर्थाने व—व हे अंतर न तिथीचें आहे असे घेऊं. १२ अश हे वृत्त परिमाणाने म्हणजे केवळ संख्येनें $\frac{२\pi}{३०}$ आहे. तेव्हा व—व = $\frac{२\pi}{३०} \times \text{न}$

$$\begin{aligned} \text{म्हणून, } \frac{\text{थ}}{\text{म}} &= \frac{\text{घ}}{(१ - \text{ठ})\text{म}} + \frac{२\pi}{३०} \times \frac{\text{न}}{(१ - \text{ठ})\text{म}} \\ &= \frac{\text{घ}}{(१ - \text{ठ})\text{म}} + \frac{२\pi}{३०(१ - \text{ठ})\text{म}} \times \text{न} \\ &= \frac{\text{घ}}{(१ - \text{ठ})\text{म}} + \frac{१२ \text{ अ}}{१२ \cdot १९०७५} \text{ विकला} \times \text{न} \\ &= \frac{\text{घ}}{१२ \cdot १९०७५} + ३५४३ \cdot ६७०५६ \text{ पळे} \times \text{न} \end{aligned}$$

घ ही मूल्या जा क्षणी मध्यमचंद्र ० होता त्या क्षणीने सूर्याचे मध्यम भोग दाखविणाऱ्या कोनाची मूल्या वृत्तपरिमाणाची आहे. त्याच्या विकला करून त्यास $१२ \cdot १९०७५$ नी भागिले म्हणजे पळाची मूल्या येते. ह्या पळाच्या संख्येला आद्य-काळ म्हणू. त्या काळामागचा आरंभकाळ (मध्यममानाचा) होय. ह्यात प्रत्येक तिथीचा मध्यकाळ ५९ घ = ३६७२ पळे मिळवित गेल्याने तिथीचे मध्यमकाळ होतील. ह्या मध्यमकाळाम क म संस्कार केल्याने तीथीचे स्पष्टांक होतील. ५०५ घा केला दर्शिल्याप्रमाणे आणि व च्या स्थानी थ ठिहल्याने जी केंद्रे होतात ती तिथीच्या मध्यमकाळाच्या अति चंद्राच्या मध्यम गतीने होणारी म ति च्यु इत्यादि

केद्रे होत. तेव्हा तिथीचे स्पष्टकाल दाखविणारे गमीकरण याची विहवाप्रमाण होतें. ह्या समीकरणाने काल दाखविणाऱ्या संस्था पळांच्या आहेत: -

$$\begin{array}{l}
 \text{तिथीचा} \\
 \text{स्पष्ट} \\
 \text{काल}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{तिथीचा} \\ \text{स्पष्ट} \\ \text{काल} \end{array}} \right\} = \left\{ \begin{array}{l}
 \text{आद्य काल} + ३५४३.६७१ \times \text{त} \\
 - १८६४.० \text{ भु म} \quad + ४४.७ \text{ भु र म} \\
 + १८.० \text{ भु र म} \quad + ३.७ \text{ भु र म} \\
 - १५८.४ \text{ भु र ति} \quad + ११.० \text{ भु ति} \\
 - ३७८.२ \text{ भु र वि} \quad + ३४.० \text{ भु र वि} \\
 + ६०२.४ \text{ भ म} \quad - ८४ \text{ भ म} \\
 - ३१.८ \text{ भु (म+स)} \quad + २५.९ \text{ भु (म-स)} \\
 - १५.२ \text{ भु (रति-रम)} \quad + १४.४ \text{ भु (रति+म)} \\
 १०.३ \text{ भ (चु म)} \quad + ८.३ \text{ भ (रति म)} \\
 - ७.३ \text{ भ (रम म)} \quad + ७.३ \text{ भ (रम-ग)} \\
 - ५.३ \text{ भ (रति म)} \quad + ४.८ \text{ भ (रति-रम)} \\
 - ४.८ \text{ भु (रति-रवि)} \quad - ३.८ \text{ भु (रति+स)} \\
 + २.३ \text{ भु (रति म)} \quad - २.० \text{ भु (रति-म)} \\
 - १.४ \text{ भु (रवि-स)} \quad + १.४ \text{ भु (रवि+स)} \\
 - १.२ \text{ भु (रति-म-ग)} \quad - ०.८ \text{ भ (रति-रम-ग)}
 \end{array} \right.$$

योग पद्यावली

५१८. चंद्रसूर्याच्या निरग्रन भोगाची वेरीज दृष्टिकेल्या वांतांशी दहावयास किती काल लागेल, किंवा ती वेरीज कोणत्या क्षणी होईल, तो काल ठरविण्याचें समीकरण मिद्ध करावयाचें आहे. असे समीकरण मिद्ध केले म्हणजे त्यावरून विष्कभादि २७ योगाचे भोग काल ठरविता येतील. तें समीकरण आता आपण मिद्ध करूं. तिथीचे स्पष्ट काल ठरविण्याचें समीकरण ज्या पद्धतीने मिद्ध केले त्याच पद्धतीने हें योगाचे काल ठरविण्याचें समीकरण मिद्ध होते. ती मिद्धता खाली देत आहे.

५१९. वरच्या तिथीच्या समीकरणाकरिता व आणि व याची समीकरणे ५०८ व्या लेखाने दिली आहेत, त्याच समीकरणांचा उपयोग करून योगाचें समीकरण मिद्ध करिता येते. तिथी प्रवरणी ह्या समीकरणाची वजावाकी केली आहे, ती आतां वेरीज करूं.

$$व + व' = क म + क म ठ + घ + २२६२४.८४ \text{ भुणकम}$$

$$+ \quad +$$

$$+ ६२४० \cdot ४३ \text{ भु (ठकम + घ — द्र)}$$

$$+ ६२ \cdot ८३ \text{ भु (२ठकम + २घ — २द्र)}$$

$$(ब + बं — घ) \frac{१}{१ + ठ} = \text{कम} + २२६२४ \cdot ८४ \frac{१}{१ + ठ} \text{भुणकम}$$

+

+

$$\text{थ} = \text{कम} + २२६२४ \cdot ८४ \frac{१}{१ + ठ} \text{भुणकम}$$

+

+ \dots \dots (अ).

ह्या समीकरणाचें केंद्र परिवर्तन म्हणजे कम स्थानीं स्थ हें पद आणि ले म्हणजे योगाचें स्पष्टकाल साधनाचें समीकरण सिद्ध होईल.

५१६. वरच्या लेखांतील (अ) समीकरणाचें केंद्र परिवर्तन केलें असतां त्या समीकरणाचें स्वरूप खालीं दिल्याप्रमाणें होईल. केंद्र परिवर्तनां जे नवीन पदें उत्पन्न होतील तीं ५११ व्या लेखांत जीं पदें उत्पन्न झाली तींच पदें उत्पन्न होतात.

त्यामध्ये भिन्नत्व कोणते येईल ते दाखवितां. $\frac{१}{१ - ठ}$ यांच्या जागीं $\frac{१}{१ + ठ}$

येतो. थ च्या जागीं $(ब + बं — घ) \frac{१}{१ + ठ}$ हें पद येतें. तसेंच ५१० व्या

लेखांतील ब — बं च्या जागीं ब + बं येतो, मुडकम याला गुणक $(+ २३ — ३८३)$ हा येतो. याशिवाय दुसरा कांहीं फरक येत नाही. परिवर्तन करून आलेल्या समीकरणाचें स्वरूप खालीं दिल्याप्रमाणें होतें:—

$$क = \frac{\text{थ}}{\text{म}} = २२६२४ \cdot ८४ \frac{१}{१ + ठ} \times \frac{१}{\text{म}} \text{भुणथ} + \text{इत्यादि.}$$

$$क = \left\{ (ब + बं) \frac{१}{(१ + ठ) म} - \frac{\text{घ}}{(१ + ठ) म} \right\}$$

$$- \frac{२३}{(१ + ठ) म} \text{भुणथ.}$$

त्या समीकरणांतील प्रत्येक पदाला $\frac{१}{(१ + ठ) म}$ हा गुणक आहे. $(१ + ठ) म$

ही चंद्र आणि सूर्य यांच्या मध्यम गतीची बेरीज आहे. $(ब + बं)$ हा एक समयाद परंतु चल असा कोन आहे आणि ह्या कोनाचें चलन समान कालांत

समान असें होतें, $\frac{१}{(१ + ठ) म}$ हा त्यास गुणक आहे. घ हाही एक कोन आहे.

तोही स्थीर असा कोन दाखवितो. आणि त्यास $\frac{१}{(१ + ठ) म}$ या गुणकाने

गुणिल्याने स्थीर असा काल त्या गुणाकाराने दाखविला जातो. यावरून $\frac{थ}{म}$ हा

अपूर्णांक योगाचा मध्यमकाल दाखवितो. एका योगाचा मध्यम काल

८०० कला $\div १४.१६१९७$ कला = ५६.४८९३ घटिका इतका आहे. किंवा ४८००० विकला $\div १४.१६१९७$ विकला = ३३८९.३५८ पळ इतका आहे. प्रत्येक फलाच्या विकलात्मक गुणकाला १४.१६१९७ विकलांनी भागिल्याने पळात्मक गुणक येतो. विकलांच्या संख्येला कृती सुगम व्हावी म्हणून खाली दाखविलेल्या गुणकाने गुणिल्याने पळ येतात. तो गुणक असा—

$$\text{विकला} \times \left(\frac{१}{३४} - \frac{१}{३४} \text{ चा } \frac{१}{३४} - \frac{१}{३४} \text{ चा } \frac{१}{३४} \times \frac{१}{३} \right)$$

५१७. प्रत्येक फलाच्या केंद्रामध्ये थ ही संख्या आहे. केंद्रांत थ संख्येला कांहीं गुणक (केंद्रगुणक) असून स्थीर संख्या क्षेपक आहेत जसे—

$$\left\{ (२ - २ठ - ण) थ - २घ + ३ \right\} \text{ ह्यातील थ च्या जागी त्याची किंमत}$$

$$\left\{ \left(\frac{ब}{१ + ठ} + \frac{ब}{१ + ठ} \right) \frac{१}{(१ + ठ)} - \frac{घ}{(१ + ठ)} \right\}$$

हा कोन आहे. आणि तो योगाचा मध्यमकाल ज्या क्षणी पूर्ण होईल

त्या क्षणीचा आहे. तो $\frac{२\pi}{२७}$ न हा आहे. $\frac{२\pi}{२७} = ८००$ कला होतात. म्हणजे

थ = ८०० \times न कला.

$$२थ = २ \times ८०० \times न कला$$

$$\frac{२थ \times म}{(१ + ठ) म} = \frac{२ \times ८०० \times न}{(१ + ठ) म} \times म.$$

ह्या समीकरणांत $\frac{८०० न}{(१ + ठ) म}$ हा योगाचा मध्यम काल आहे. ह्या मध्यम

कालास म ह्या चंद्र गतीने गुणिले म्हणजे, मध्यम चंद्र होतो.

$$२ \times \frac{८०० न}{(१ + ठ) म} \times म = २ \text{ मध्यम चंद्र ;}$$

ह्याचप्रमाणे

$$\frac{-२ठथ \times म}{(१ + ठ) म} = -२ \text{ मध्यम रवि गति}$$

$$-\frac{२४५ \times म}{(१+४)म} - २४ = -२ मध्यम रवि$$

$$तसेच - \frac{णथ \times म}{(१+४)म} + ३ = - चंद्राचे मंदकेंद्र.$$

ह्यावरून कळून येते की, प्रत्येक फलाचे केंद्र हें योगाच्या मध्यम कालक्षणीचे चंद्राचे केंद्र आहे. याकरिता त्यास मं ति च्यु ह्या अक्षरात्मक नामांनी उच्चारितां व लिहिता येतें. त्याप्रमाणें लिहून योगांचे स्पष्ट काल दाखविणारें समीकरण खाली लिहिलें आहे. त्यांतील गुणकसंख्या पळाच्या संख्यांचे आहेत. ह्या समीकरणांत कालाची स्थीर संख्या

$$-\frac{४}{(१+४)म} ही आहे. \frac{ब + बं - घ}{(१+४)म} हा काल, योगाचा मध्यम$$

परंतु तो कोणत्या तरी योगाचा पूर्ण काल आहे, असे समजतें. म्हणजेच ब + बं - घ हा कोन ८०० कलांनी विभाज्य आहे. मध्यम रवि आणि मध्यम चंद्र यांच्या वेरजेला ८०० कलांनी भागून जी पूर्णांक संख्या येईल ते गत योग ज्या कला बाकी राहतील त्या चालू योगाच्या गत कला होत. त्यांस किंवा त्यांच्या विकला करून त्यास (३६ - ३४०० - २४००) यांनी गुणून पळात्मक गुणाकार हा चालू योगाचा भोग्यकाल (मध्यम मानाचा) होईल. त्यास येथें आद्यकाल असें म्हणतो. योगांचे स्पष्ट काल दाखविणारें समीकरण खाली लिहिल्याप्रमाणें आहे :—

$$\left. \begin{array}{l} \text{योगांचा} \\ \text{स्पष्ट} \\ \text{काल} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{आद्यकाल} + ३३८९.३५८ \times न \\ - १६०५.३ भुमं + २५.७ भुरमं \\ + १२.० भुरमं + २.३ भु४मं \\ - १४०.७ भुरति + ९.३ भुति \\ - ३२५.९ भुच्यु + २९.० भुरवि \\ - ४४०.७ भुमं - ३.१ भुरतं \\ - १३.३ भु (रति - २मं) + ४.३ भु (रति + २मं) \\ - ९.४ भु (च्यु - सं) + ८.५ भु (रति + मं) \\ - ५.४ भु (रति - सं) - २.६ भु (रति + सं.) \\ - १४.१ भु (मं - सं) - १६.२ भु (मं. + सं.) \\ + ७.० भु (रवि - मं.) - १.४ भु (रवि + २मं) \\ - १.३ भु (रवि + मं) - १.२ भु (रवि - सं) \\ + १.२ भु (रवि + सं) - ०.८ भु (रति - रवि + मं) \end{array} \right.$$

